

А. А. Иванов

ФИЗИКА
СИЛЬНОНЕРАВНОВЕСНОЙ
ПЛАЗМЫ



МОСКВА
АТОМИЗДАТ
1977

Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М., Атомиздат, 1977, 352 с.

В книге рассмотрены явления и процессы, изучаемые в физике плазмы при решении проблемы управляемого термоядерного синтеза. Основное внимание уделено описанию линейных и нелинейных режимов плазменных неустойчивостей и их влияния на удержание и нагрев плазмы. Подробно изложены проблемы, возникающие при нагреве плазмы мощными пучками электронов, а также возможности инициирования термоядерной реакции мощным лазерным импульсом.

Книга рассчитана на специалистов в области физики плазмы, а также на аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Рис. 72. Список литературы 188 наименований.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой попытку охватить ряд интересных явлений и процессов, изучаемых физикой плазмы как в научном, так и в прикладном аспекте. Бурное развитие физики плазмы, вызванное к жизни стремлением создать управляемую термоядерную реакцию, привело к развитию в теории и эксперименте новых методов исследования, которые внесли существенный вклад в часть разделов физики и химии. В частности, изучение неустойчивостей плазмы и их нелинейных режимов оказалось весьма существенным для таких, на первый взгляд, далеких друг от друга областей, как астрофизика и физика твердого тела, высокотемпературная химия и проблемы управляемого термоядерного синтеза, физика газового разряда и проблема магнитогидродинамического преобразования энергии, газовые и твердотельные лазеры, мощные электронные релятивистские пучки и ускорители.

По всем этим вопросам написано много работ, однако часто они носят слишком специальный характер, а книги, которая бы объединяла перечисленные проблемы, имеющие в сущности одну и ту же физическую основу, нет. Это затрудняет развитие общих представлений о физике плазмы, приводит к еще более узкой специализации исследователей, работающих в отдельных областях физики плазмы. Поэтому создание подобной книги представляется своевременным.

На заре развития физики плазмы теория и эксперимент были в большой степени оторваны друг от друга, так как теоретические работы выполнялись главным образом в рамках линейного приближения, в то время как эксперименты в основном были связаны с измерением параметров развитых нелинейных режимов той или иной неустойчивости. С развитием теории были созданы методы, позволяющие исследовать нелинейные или коллективные эффекты в плазме, которые можно было уже более надежно сопоставлять с экспериментальными результатами. Это не означает, что роль линейных приближений в теории плазмы уменьшилась. Линейная теория позволяет не только определять пороги неустойчивостей, но и предсказывать влияние неустойчивых колебаний достаточно большой амплитуды на усредненные характеристики системы. В последнее десятилетие возник еще один важный метод изучения явлений в плазме — чис-

ленное моделирование, которое оказалось весьма существенным дополнением к теории и занимает промежуточное положение между экспериментальными и теоретическими исследованиями.

Таким образом, чтобы избежать фрагментарности и, как уже упоминалось, слишком узкой специализации, будем описывать явления в плазме, не разделяя их на линейные и нелинейные, используя при этом наиболее адекватные методы.

Элементарные процессы в плазме (кулоновские столкновения, столкновения электронов и ионов с атомами и молекулами и столкновения нейтральных частиц) достаточно хорошо изучены [1, 2], поэтому в книге они специально не описаны.

При описании явлений в плазме здесь использованы различные подходы; метод исследования описан достаточно подробно, но без излишней детализации, которую читатель может найти в уже имеющихся монографиях. Основное внимание сосредоточено на взаимодействии электронных и ионных пучков с полностью ионизованной и слабоионизованной плазмой, взаимодействии высокочастотных полей с плазмой, проблеме удержания и стабилизации плазмы в магнитных ловушках, проблеме турбулентного нагрева плазмы, взаимодействии мощного лазерного излучения с плазмой.

При описании этих явлений затронуты условия реализации и существующее положение в основном в области управляемого термоядерного синтеза.

Автор считает приятным долгом выразить свою глубокую благодарность всем участникам семинара академика М. А. Леонтовича в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, с которыми неоднократно обсуждались освещенные в этой книге проблемы, а также Т. К. Соболевой за помощь при подготовке рукописи к печати.

ЭЛЕКТРОННЫЕ И ИОННЫЕ ПУЧКИ В ПЛАЗМЕ

§ 1.1. Квазинейтральность плазмы

Плазмой будем называть среду, состоящую из электронов, ионов и нейтральных частиц и обладающую свойством квазинейтральности. Математически условие квазинейтральности можно записать в виде

$$n_e \approx n_i \approx n_0, \quad (1.1)$$

где n_e и n_i — концентрация электронов и ионов.

Под влиянием электростатических сил вблизи каждого заряда в том случае, если концентрация нейтральных частиц не слишком велика, группируются заряды противоположного знака, в значительной степени компенсирующие электростатическое поле. Поэтому поле заряда убывает гораздо сильнее, чем в вакууме, и для характеристики степени убывания этого поля можно ввести еще одно важное понятие — *дебаевский радиус*. Этот радиус равен длине, на которой поле заряда убывает в e раз. Дебаевский радиус определяет области значений температуры и концентрации заряженных частиц, при которых существенны те или иные процессы в плазме. Столкновения заряженных частиц между собой, происходящие с *прицельным параметром*, меньшим дебаевского радиуса, можно описывать как обычные газокINETические столкновения, введя понятие *частоты столкновений*. Чтобы выразить дебаевский радиус через температуру и концентрацию плазмы, поместим в плазму пробный заряд и найдем расстояние, на котором электрическое поле этого заряда уменьшается в e раз. Будем считать для простоты, что система находится в равновесии, температура электронов и ионов одинакова и равна T . Здесь и в дальнейшем будем измерять температуру в энергетических единицах, так что постоянная Больцмана k в формулах отсутствует. Согласно формуле Больцмана, концентрация электронов и ионов, находящихся в равновесии, вблизи заданного заряда зависит от потенциала φ :

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/T); \quad n_i = n_0 \exp(-e\varphi/T), \quad (1.2)$$

где n_0 — средняя концентрация электронов и ионов по большому объему; e — заряд электрона, а ионы для простоты считаются однозарядными. Подставляя выражение (1.2) для концентрации электронов в уравнение Пуассона в сферической системе координат с

центром, совпадающим с положением пробного заряда, получаем

$$(1/r^2) (\partial/\partial r) (r^2 \partial\varphi/\partial r) = 4\pi e n_0 [\exp(e\varphi/T) - \exp(-e\varphi/T)] + 4\pi e_a \delta(r).$$

Введя, как обычно в электростатике, новую функцию $\chi = r\varphi$, получим в случае слабых полей ($e\varphi/T \ll 1$) вне точки $r = 0$

уравнение
$$\ddot{\chi} = 2(4\pi e^2 n_0/T) \chi = (2/r_D^2) \chi, \quad \text{откуда следует}$$

$$\varphi = (a/r) \exp(-r\sqrt{2}/r_D). \quad (1.3)$$

Константу a надо выбирать из следующих соображений. Найденное решение справедливо везде, кроме начала координат, т. е. точки, где находится заряд e_a . Вблизи начала координат в уравнении Пуассона можно пренебречь всеми членами, кроме δ -функции. После этого, пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса, получим для электрического поля точечного заряда обычный результат e_a/r^2 , т. е. потенциал φ вблизи начала координат равен $-e_a/r$. Таким образом, $a = -e_a$.

Очень часто при исследовании различных явлений в плазме оказывается, что электронная и ионная температуры существенно различаются. Поэтому при выводе формулы (1.3) мы выделили множитель 2, обязанный своим происхождением одинаковому вкладу в экранирование электронов и ионов. Будем считать определением дебаевского радиуса электронов и ионов плазмы соотношение

$$r_{D_{e,i}} = [T_{e,i} / (4\pi e^2 n_0)]^{1/2} \quad (1.4)$$

и отметим, что дебаевские радиусы электронов и ионов могут существенно различаться.

Определение квазинейтральности теперь следует несколько уточнить и дополнить, используя понятие дебаевского радиуса. Действительно, чтобы плазма была квазинейтральной, характерный размер той области, которую она занимает, должен быть существенно больше дебаевского радиуса. Очень полезными в ряде приложений могут оказаться формулы, позволяющие быстро оценить дебаевский радиус, зависящий от плотности плазмы, измеряемой числом частиц в 1 см^3 , и температуры, измеряемой в электронвольтах:

$$r_D = 8 \cdot 10^2 \sqrt{T/n}. \quad (1.5)$$

§ 1.2. Столкновения в плазме

Когда рассматривается газ, состоящий из нейтральных молекул, можно ввести понятия *длины свободного пробега* молекулы и *частоты парных столкновений*. Это связано с тем, что эффективное сечение столкновения практически не зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц, и при достаточно малой плотности газа

столкновения являются парными. При этом поперечное сечение молекулы равно πr_0^2 , где r_0 — размер молекулы, составляющий несколько ангстрем. Согласно формулам обычной газокинетической теории, длина свободного пробега $\lambda = 1/(n\sigma)$, где n — концентрация молекул, а частота столкновений молекул $\nu_M = n\nu_T\sigma$, где ν_T — средняя тепловая скорость молекулы.

Аналогичные соотношения имеют место для упругих столкновений электронов с нейтральными частицами, только вместо ν_T туда входит величина ν_{Te} — средняя тепловая скорость электронов. Такие простые оценки соответствуют действительности лишь в том случае, если взаимодействующие частицы можно описать моделью твердых шаров, когда радиус действия сил между частицами мал по сравнению с расстоянием между ними. Если рассматривается взаимодействие заряженных частиц, простые газокинетические оценки необходимо усовершенствовать. Эффективное сечение σ будет пропорционально r^2 , где r — расстояние наибольшего сближения частиц. Так, если температура плазмы T , то наименьшее расстояние, до которого могут сблизиться заряженные частицы, определяется из соотношения $e^2/r \approx T$, т. е. $\sigma \sim T^{-2}$. Это означает, что эффективное сечение рассеяния довольно сильно зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц. Однако такие лобовые столкновения вносят сравнительно малый вклад в полное сечение рассеяния, так как заряженная частица из-за дальнего действия характера сил испытывает очень большое число столкновений, отклоняющих ее на малые углы. Поэтому эффективное сечение увеличивается в Λ раз, где Λ — натуральный логарифм отношения дебаевского радиуса к расстоянию наибольшего сближения [1], составляющий обычно для плазмы 10—20, — кулоновский логарифм.

Таким образом, можно считать, что эффективное сечение кулоновского столкновения примерно на порядок превосходит $\pi(e_1e_2/\mathcal{E}^2)$, где e_1 и e_2 — заряды сталкивающихся частиц, а \mathcal{E} — энергия их относительного движения. Частота рассеяния электронов на ионах определяется этим сечением и тепловой скоростью электронов по обычным газокинетическим формулам и пропорциональна $n_0/T^{3/2}$. Так как скорость ионов при одинаковой температуре электронов и ионов в $(M/m)^{1/2}$ раз меньше скорости электронов, то частота столкновений ионов между собой во столько же раз меньше частоты столкновений электронов с ионами.

Интересно еще выяснить, каким образом происходит выравнивание температуры различных компонент полностью ионизованной плазмы. Поскольку отношение масс электронов и ионов очень мало, выравнивание сначала происходит в каждой из компонент в отдельности, а потом между компонентами. Это связано с тем, что, как известно из механики, максимальная доля энергии, передаваемая от движущейся частицы к покоящейся, по порядку величины равна отношению малой массы к большой. Поэтому, чтобы выравнивались энергии электрона и иона, они должны столкнуться друг с другом примерно в M/m раз больше, чем движущийся электрон с покоящим-

ся. Если ввести τ_{ee} — время обмена энергией между электронами, τ_{ii} — время обмена энергией между ионами и τ_{ei} — время обмена энергией между электронами и ионами, то в случае, когда температура электронов и ионов приблизительно одинакова, получим [2]

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} = 1 : (M/m)^{1/2} : M/m. \quad (1.6)$$

Таким образом, локальное тепловое равновесие между электронами и ионами может устанавливаться гораздо быстрее внутри каждой из компонент полностью ионизованной плазмы, что в принципе может приводить к сильному различию температур электронов и ионов [3]. Если рассматривать слабоионизованную плазму, необходимо сравнивать частоты столкновений различных компонент. Для этого полезны формулы

$$\begin{aligned} v_{Te} &= 6 \cdot 10^7 \sqrt{T \text{ (эВ)}}; \\ v_{ei} &= 3 \cdot 10^{-5} [n \text{ (см}^{-3}\text{)}/T^{3/2} \text{ (эВ)}] [(\Lambda/10)]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Что касается столкновений заряженных частиц с нейтральными и нейтральных друг с другом, то для грубых оценок сталкивающиеся частицы можно представлять твердыми гладкими шарами с радиусом порядка 10^{-8} см. Если частота столкновений заряженных частиц друг с другом много больше частоты столкновений с нейтральными частицами, то плазму можно считать полностью ионизованной, так как нейтральные частицы слабо влияют на движение электронов и ионов. Движение заряженных частиц в этом случае определяется самосогласованными электрическими и магнитными полями и может описываться кинетическими уравнениями для функции распределения электронов и ионов по скоростям. Если же температура плазмы достаточно велика, может оказаться, что время жизни плазмы в системе много меньше времени между столкновениями заряженных частиц. При этом время жизни плазмы, ее нагрев определяются эффектами, связанными не со столкновениями частиц, а, как показал А.А. Власов, с самосогласованными полями, возникающими из-за движения заряженных частиц [4].

§ 1.3. Бесстолкновительное кинетическое уравнение

Наиболее существенные эффекты, коренным образом отличающие плазму от обычного газа, проявляются в очень важном для приложений случае, когда всеми частотами столкновений можно пренебречь. Поведение плазмы описывается при этом системой уравнений, состоящей из бесстолкновительного кинетического уравнения

$$\partial f_{i,e} / \partial t + \mathbf{v} \partial f_{i,e} / \partial \mathbf{r} + (e/m) \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}] \} \partial f_{i,e} / \partial \mathbf{v} = 0 \quad (1.8)$$

и уравнений Максвелла, в которые в качестве плотности заряда вхо-

дит величина $e \int (f_i - f_e) d\mathbf{v}$, а в качестве плотности тока величина $e \int f_i \mathbf{v} d\mathbf{v} - e \int f_e \mathbf{v} d\mathbf{v}$. Здесь, как обычно, для простоты ионы считаем однозарядными. Очевидно, что в отсутствие столкновений частиц [т. е. в случае равенства нулю правой части уравнения (1.8)] ни о каком максвелловском распределении частиц по скоростям не может идти речи. В этом смысле система является сильно неравновесной, и в принципе она может быть неустойчивой. Электрические и магнитные поля, входящие в правую часть уравнения (1.8), вообще говоря, представляют собой сумму внешних и внутренних самосогласованных полей.

Если уравнение (1.8) рассматривать как следствие теоремы Лиувилля, то взаимодействие заряженных частиц можно учесть по методу самосогласованного поля, не принимая во внимание взаимодействия частиц на близких расстояниях, которое учитывается кулоновскими столкновениями. В этом приближении функция распределения должна удовлетворять уравнению $(d/dt)(f d\Gamma) = 0$, которое соответствует сохранению числа частиц каждой компоненты плазмы, так как $d\Gamma = dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ есть элемент объема в фазовом пространстве. По теореме Лиувилля [5] $d\Gamma/dt = 0$; следовательно, $df/dt = 0$. Так как $d/dt = \partial/\partial t + (dr/dt)(\partial/\partial \mathbf{r}) + (d\mathbf{v}/dt)(\partial/\partial \mathbf{v})$, а $dr/dt = \mathbf{v}$ и $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}/m$, где \mathbf{F} — сила, действующая на частицу, то, действительно, можно заключить, что уравнение (1.8) есть следствие теоремы Лиувилля. Трудность вывода бесстолкновительного кинетического уравнения из полного кинетического уравнения, содержащего в правой части столкновительный член, заключается в делении сил взаимодействия между частицами на короткодействующие и далекодействующие. При этом радиус действия короткодействующих сил примерно равен корню квадратному из сечения кулоновского столкновения, деленному на π , в то время как далекодействующие силы определяются самосогласованными полями. Такое рассмотрение, когда в правой части уравнения (1.8) опущен столкновительный член, справедливо при изучении явлений, протекающих за время, много меньшее времени столкновения частиц. Если столкновения с нейтральными частицами существенны, использование бесстолкновительного кинетического уравнения оправдано также и при рассмотрении процессов, протекающих за достаточно малое характерное время.

Итак, возникающие в области неравновесной плазмы задачи и проблемы связаны с нестационарными процессами. Так как система неравновесна, необходимо выбрать начальную функцию распределения. В качестве такой функции можно выбрать любую функцию распределения частиц по скоростям, удовлетворяющую следующим условиям. Моменты, взятые от этой функции по скоростям, должны сходиться, что соответствует вполне определенным значениям концентрации, направленной скорости, энергии и т. д. Отметим, что функция распределения отнюдь не обязательно должна быть максвелловской, и обычно используемую в качестве начальной функции в физике плазмы максвелловскую функцию выбирают только для

простоты вычислений. С этой точки зрения температура электронов и ионов является просто мерой хаотичности движения заряженных частиц, а вовсе не истинной температурой в термодинамическом смысле.

Так, если исследуется плазма, в которой в начальный момент был создан электронный пучок, то функцию распределения электронов по скоростям можно представить в виде двух слагаемых: $f_{oe} = f_{ep} + f_b$, где f_{ep} — функция распределения электронов плазмы, в качестве которой можно выбрать, например, максвелловскую функцию с температурой T_e ; f_b — функция распределения электронов пучка, которая в ряде случаев может представлять собой δ -функцию в пространстве скоростей, т. е. $f_b \sim \delta(v - v_0)$. Функция распределения ионов в такой плазме может быть максвелловской с той же температурой T_e . Существенно новых эффектов, очевидно, можно ожидать в том случае, если скорость направленного движения частиц v_0 существенно больше тепловой скорости электронов, так как в противном случае при небольшой плотности пучка функция распределения электронов была бы искажена лишь очень незначительно.

Так как мы имеем дело с неравновесным случаем, то для того, чтобы проследить за эволюцией функции распределения и самосогласованных полей в плазме, необходимо решить временную задачу. Ее решение предполагает знание начальных условий. Функции распределения в начальный момент заданы. Открытым остается лишь вопрос о начальной амплитуде самосогласованных полей в плазме. Определение такой амплитуды весьма важно, так как при неустойчивости исходного неравновесного состояния экспоненциальный во времени рост амплитуды самосогласованных полей происходит от начального уровня, и для характеристики временных процессов амплитуда этого начального уровня так же важна, как инкремент неустойчивости.

Для оценки исходной амплитуды можно поступить следующим образом. Как уже отмечалось выше, самосогласованные поля описывают дальнедействующую часть потенциала взаимодействия между заряженными частицами от бесконечно больших расстояний до размеров порядка дебаевского радиуса. Напомним, что короткодействующая часть потенциала, определяющая кулоновские столкновения, существенна в области от расстояния максимального сближения до дебаевского радиуса. Пусть, как обычно, плазма помещена в произвольный объем, который можно для простоты считать параллелепипедом с ребрами, направленными по осям x, y, z . Соответствующие длины ребер равны L_x, L_y, L_z . Тогда максимальная длина волны, которая может установиться вдоль оси x , равна L_x , вдоль оси y — L_y , а вдоль оси z — L_z , что означает соответствующую периодичность граничных условий. Найдем число волн, которые могут существовать в плазме объемом $V = L_x L_y L_z$. Для этого введем волновые числа $k_x = 2\pi/\lambda_x, k_y = 2\pi/\lambda_y, k_z = 2\pi/\lambda_z$, где $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ — длины волн вдоль соответствующих осей

координат. Теперь можно говорить о пространстве волновых чисел, имея в виду, что минимальный объем ячейки в этом пространстве есть $(2\pi)^3/V$. Таким образом, найдя полный объем плазмы в k -пространстве и разделив его на объем элементарной ячейки, найдем полное число волн или, что то же самое, полное число степеней свободы, которыми обладают самосогласованные поля. Элемент объема в k -пространстве есть $4\pi k^2 dk$. Чтобы найти весь объем, необходимо проинтегрировать от $k_{\text{мин}}$, определяемого размером параллелепипеда, до $k_{\text{макс}}$, определяемого минимальным размером, на котором обрывается дальное действие, т. е. дебаевским радиусом r_D . Учитывая, что $k_{\text{макс}} \sim 2\pi/r_D \gg k_{\text{мин}} \sim 2\pi/L (L_x \sim L_y \sim L_z \sim L)$, найдем, что объем в k -пространстве с хорошей точностью равен $(4\pi/3)k_{\text{макс}}^3$. Отсюда число волн в единице объема равно $(1/6\pi^2) \times k_{\text{макс}}^3$.

Считая, что при $t = 0$ волны, описывающие самосогласованные поля, находятся в тепловом равновесии с частицами плазмы, получим для плотности энергии волн, находящихся в равновесии с частицами плазмы:

$$W_0 \approx (k_{\text{макс}}^3 / 6\pi^2) T = (4\pi/3) (n_0 T / n_0 r_D^3). \quad (1.9)$$

Таким образом, отношение начальной плотности энергии (запасенной в самосогласованных полях) колебаний, которые находятся в тепловом равновесии с плазмой, к плотности энергии частиц nT по порядку величины равно обратному числу частиц в дебаевской сфере N_D^{-1} , где $N_D \sim n_0 r_D^3$.

Энергию W_0 называют еще уровнем тепловых шумов в плазме. Определим теперь порядок N_D . Это число можно записать в виде $N_D = n_0 (T/4\pi e^2 n_0)^{3/2}$, причем $\ln N_D = \Lambda$.

Таким образом, N_D очень велико, так что не только N_D^{-1} , но и $1/\ln N_D$ может служить малым параметром.

§ 1.4. Неустойчивости холодной плазмы

Появилось несколько книг, в которых подробно изучаются волны в плазме [6—9]. Эту важную проблему, как правило, решают в линейном приближении, и результатами, имеющими важное значение для таких приложений, как физика ионосферы, распространение радиоволн, диагностика плазмы, являются дисперсионные соотношения. Они связывают частоту волны, распространяющейся в плазме, с волновым вектором \mathbf{k} . Простейшим примером дисперсионного соотношения может служить связь частоты электромагнитной волны ω с \mathbf{k} в вакууме: $\omega = |\mathbf{k}|c$. Плазма, обладающая достаточно большой поляризуемостью, изменит связь между ω и \mathbf{k} для электромагнитной волны. Таким образом, для электромагнитной волны, распространяющейся в плазме, будет уже другое дисперсионное соотношение.

При помощи дисперсионных соотношений можно находить групповые и фазовые скорости волн, расстояния, на которых заданная электромагнитная волна затухает, и другие важные для приложений характеристики. Когда система не обладает явной неравновесностью, распространяющаяся в плазме волна затухает. Если же в плазме имеется достаточно сильная неравновесность, т. е. плазма пронизывается электронным или ионным пучком достаточно большой плотности или удерживается сильным магнитным полем и неоднородность поперек магнитного поля достаточно велика, то в такой системе могут возрасти амплитуды тепловых шумов, соответствующих определенным значениям k . Иногда такое неустойчивое состояние довольно быстро стабилизируется из-за небольшого изменения средних параметров системы, вызванного возросшей амплитудой самосогласованного поля. В других случаях неустойчивость приводит к такому сильному увеличению амплитуды самосогласованного поля, что плазма уходит из объема, в котором она удерживалась. Некоторые неустойчивости приводят к перераспределению частиц в пространстве скоростей, и если это позволяет нагреть плазму, их можно считать полезными. Другие же, напротив, приводят к перераспределению концентрации и температуры в обычном пространстве, так что увеличивается диффузия частиц из системы. Для нагрева и удержания плазмы изучение неустойчивостей плазмы и в особенности их нелинейного режима играет определяющую роль.

Опишем наиболее простую и наиболее часто встречающуюся ситуацию, когда плазму пронизывает электронный пучок, скорость которого v_0 много меньше скорости света c , но много больше тепловой скорости электронов плазмы $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m}$, $T_e = T_i = T$. Плотность пучка равна n_{0b} , плотность полностью ионизованной плазмы равна n_0 . В силу квазинейтральности полная концентрация электронов плазмы и пучка равна концентрации ионов, однако, как правило, рассматриваются задачи, когда $n_{0b} < n_0$, поэтому концентрацию электронов плазмы можно считать равной концентрации ионов, т. е. $n_{0e} = n_{0i} = n_0$. В отсутствие электронного пучка при достаточно малой частоте кулоновских столкновений в плазме могут существовать собственные колебания. Если они обладают фазовой скоростью, много большей v_{Te} , то в принципе можно рассчитывать, что электронный пучок, пронизывающий плазму и имеющий скорость $v_0 > v_{Te}$, будет сильно взаимодействовать с этими собственными колебаниями плазмы. При этом энергия колебаний, нарастая от малого начального значения, соответствующего тепловым шумам в данном спектральном интервале k , может достигать значения, сравнимого с энергией пучка.

Таким образом, чтобы ответить на вопрос об устойчивости пучка в плазме, необходимо найти собственные колебания в плазме без пучка, а затем уже исследовать плазму с пучком, изучая собственные колебания такой плазмы с фазовыми скоростями, близкими к скорости пучка. На каждом из этих этапов нас интересуют интерва-

лы скоростей, много больших тепловой скорости электронов плазмы. Поэтому разумно считать, что функция распределения электронов и ионов плазмы

$$f_{e,i} = n_{e,i}(\mathbf{r}, t) \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_{e,i}(\mathbf{r}, t)], \quad (1.10)$$

а функция распределения электронов пучка

$$f_b = n_b(\mathbf{r}, t) \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_b(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.11)$$

Подставляя функции распределения такого вида в бесстолкновительное кинетическое уравнение (1.8), возьмем моменты от этого уравнения по скорости. Для этого при получении нулевого момента следует использовать следующие формулы:

$$\int (\partial f_{e,i} / \partial t) d\mathbf{v} = (\partial / \partial t) \int f_{e,i} d\mathbf{v} = \partial n_{e,i} / \partial t; \quad (1.12a)$$

$$\int \mathbf{v} (\partial f_{e,i} / \partial r) d\mathbf{v} = (\partial / \partial r) \int \mathbf{v} f_{e,i} d\mathbf{v} = \text{div} (n_{e,i} \mathbf{v}_{e,i}); \quad (1.12б)$$

$$\int (\partial f / \partial v) d\mathbf{v} = 0. \quad (1.12в)$$

В результате получим обычное уравнение непрерывности для каждой из компонент плазмы:

$$\partial n_\alpha / \partial t + \text{div} (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0, \quad (1.13)$$

где $\alpha = e, i, b$. Следует отметить отличие макроскопической скорости $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}, t)$, входящей в уравнение (1.13), от независимой переменной \mathbf{v} , не зависящей ни от t , ни от r в бесстолкновительном кинетическом уравнении (1.8). Если теперь взять первый момент по скорости от бесстолкновительного кинетического уравнения с функциями распределения типа (1.10) и (1.11), то получим уравнения движения для каждой из компонент плазмы. При этом нужно использовать уравнение (1.13) и интегральное соотношение

$$\int (e/m) \mathbf{v} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) (\partial f / \partial v) d\mathbf{v} = \int (e/m) \mathbf{v} \text{div}_v [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) f] d\mathbf{v}.$$

Здесь div_v означает операцию в пространстве скоростей. Возьмем интеграл по частям согласно обычным формулам векторного анализа [10]:

$$\int \mathbf{v} \text{div}_v (\mathbf{E}f) d\mathbf{v} = \oint \mathbf{v} (dS \mathbf{E}) f - \int f (\mathbf{E} \nabla_v) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

Интеграл по поверхности, как обычно, исчезает, так как можно выбрать поверхность в пространстве скоростей, настолько удаленную от начала координат, что функция распределения на ней равна нулю: $(\mathbf{E} \nabla_v) \mathbf{v} = \mathbf{E}$. Все остальные интегралы, возникающие при взятии первого момента по скорости от кинетического уравнения, сводятся к интегралам (1.12а, б, в). Окончательно имеем для каждой из компонент плазмы:

$$m_\alpha dv_\alpha / dt = e_\alpha E. \quad (1.14)$$

Если брать второй, третий и т. д. моменты по скоростям от кинетического уравнения (1.8) с δ -образными функциями распределения, то новых уравнений по сравнению с уравнениями (1.13) и (1.14) не будет. Поэтому можно считать, что система уравнений (1.13), (1.14) полностью эквивалентна кинетическому уравнению, для которого в качестве начальной функции распределения выбрана δ -функция (по крайней мере на линейной стадии развития колебаний описания при помощи уравнений (1.13) и (1.14) и кинетического уравнения (1.8) полностью адекватны). Функцию распределения по скоростям, имеющую вид δ -функции, можно считать, например, пределом максвелловской функции распределения при $T \rightarrow 0$. Поэтому такое приближение часто называют приближением холодной плазмы.

§ 1.5. Пучковая неустойчивость

Линеаризуем уравнение движения (1.14) и уравнение непрерывности (1.13). Для этого учтем, что в нулевом приближении $n_{0i} = n_{0e} = n_0$; $v_{0i} = v_{0e} = 0$; $E_0 = 0$, т. е. в начальный момент макроскопические скорости и электрические поля отсутствуют. Уже в первом приближении появятся возмущения концентраций и скоростей электронов и ионов и связанные с ними электрические поля.

Линеаризованные уравнения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m\partial v_e/\partial t &= -eE; & M\partial v_i/\partial t &= eE; & \partial n_e/\partial t + n_0 \operatorname{div} v_e &= 0; \\ \partial n_i/\partial t + n_0 \operatorname{div} v_i &= 0; & \operatorname{div} E &= 4\pi e(n_i - n_e). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Эти уравнения являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами для возмущенных величин v_e , v_i , n_e , n_i , E . Поэтому их решение можно искать в виде разложения в ряд или интеграл Фурье. В силу линейности отдельные компоненты Фурье не связаны между собой, поэтому можно считать, что любая из возмущенных величин пропорциональна фурье-компоненте данной величины, умноженной на функцию, описывающую плоскую волну, например:

$$v_e = v_{ek} \exp[-i\omega t + i(kr)]. \quad (1.16)$$

Подставляя возмущенные величины в виде плоских волн в систему (1.15) и пользуясь тем, что $\partial v_e/\partial t = -i\omega v_e$; $\operatorname{div} v_e = -(\mathbf{k}v)$ и т. д., получим, выражая все величины через E_k :

$$(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2)(E_k k) = 0, \quad (1.17)$$

где $\omega_{pe}^2 = 4\pi n_0 e^2/m$ и $\omega_{pi}^2 = 4\pi n_0 e^2/M$.

Рассмотрим случай, когда электрическое поле волны направлено вдоль направления распространения волны, т. е. вдоль волнового вектора \mathbf{k} . Такие волны в отличие от электромагнитных, распространяющихся в вакууме, называют продольными. Возмущение маг-

нитного поля в продольных волнах отсутствует, и, так как $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, их можно описывать при помощи потенциала φ , связанного с электрическим полем обычным образом: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Поэтому продольные волны называют еще потенциальными или электростатическими.

Итак, если $E_k = -ik\varphi_k$ и $\varphi \neq 0$ (иначе мы имели бы тривиальное решение), равным нулю оказывается первый сомножитель левой части уравнения (1.17):

$$1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2 - \omega_{pi}^2 / \omega^2 = 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, собственные электростатические колебания имеют строго определенную частоту

$$\omega = \omega_{pe} (1 + m/M)^{1/2}. \quad (1.19)$$

Величину ω_{pe} часто называют электронной плазменной частотой или ленгмюровской частотой [11]. Если бы мы с самого начала пренебрегли движением ионов, т. е. опустили второе и четвертое уравнения (1.15), а в последнем уравнении (1.15) соответственно пренебрегли возмущением концентрации ионов n , то частота колебаний ω равнялась бы ω_{pe} . Этот результат непосредственно можно получить из формулы (1.19) при устремлении массы ионов к бесконечности.

Удивительным свойством плазменных колебаний является независимость частоты от \mathbf{k} . Это позволяет заключить, что выбором достаточно малого \mathbf{k} можно сделать фазовую скорость плазменных волн большой и в принципе достичь значений, равных v_0 — скорости пучка электронов.

Покажем, как можно из простых физических соображений получить выражение для частоты плазменных колебаний. Рассмотрим слой плазмы, у которой ионы бесконечно тяжелые, а электроны в начальный момент смещены относительно ионов на расстояние Δx . Из теоремы Остроградского — Гаусса (или из уравнения Пуассона) непосредственно следует, что возвращающее электрическое поле E_x и смещение связаны соотношением $E = 4\pi n_0 e \Delta x$. Сила, действующая на электрон, равна $-4\pi n_0 e^2 \Delta x$, а уравнение движения электрона имеет вид $m d^2 \Delta x / dt^2 = -4\pi n_0 e^2 \Delta x$, т. е. представляет собой уравнение гармонического осциллятора, колеблющегося с частотой $\omega = \omega_{pe}$. Таким образом, ленгмюровские колебания есть осцилляции электронов относительно покоящихся ионов, они связаны с разделением зарядов.

Интересно, что групповая скорость плазменных колебаний $d\omega/dk = 0$. В действительности при учете тепловых поправок групповая скорость ленгмюровских колебаний отлична от нуля, но всегда много меньше фазовой (это будет показано в дальнейшем).

Займемся теперь изучением тех последствий, которые вызывает инжекция в плазму моноэнергетического или холодного пучка электронов малой плотности, движущегося через плазму со скоростью v_0 , много большей тепловой скорости частиц плазмы. Наиболее ин-

интересно изменение поведения волн, имеющих фазовую скорость, примерно совпадающую со скоростью частиц пучка v_0 . Собственные колебания плазмы, бывшие до этого нейтральными, могут теперь иметь нарастающую или убывающую во времени амплитуду в зависимости от того, будет передаваться энергия от электронов пучка к волне или наоборот. Найдем, как изменится дисперсионное соотношение по сравнению с соотношением (1.18). Уравнения (1.15) должны быть дополнены еще двумя уравнениями для электронов пучка:

$$\left. \begin{aligned} m_e [\partial \mathbf{v}_b / \partial t + (\mathbf{v}_{0b} \nabla) \mathbf{v}_e] &= -e\mathbf{E}; \\ \partial n_b / \partial t + (\mathbf{v}_{0b} \nabla) n_b + n_{0b} \operatorname{div} \mathbf{v}_b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Решая систему (1.15), (1.20), получаем дисперсионное соотношение

$$1 = \omega_{pe}^2 / \omega^2 + \omega_{pi}^2 / \omega^2 + \omega_{pb}^2 / [\omega - (k v_0)]^2. \quad (1.21)$$

Здесь введено обозначение $\omega_{pb}^2 = 4\pi n_{0b} e^2 / m$ и пренебрегается разницей в концентрации электронов и ионов, так как в действительности концентрация электронов плазмы несколько меньше $n_{0e} = n_{0i} - n_{0b}$. В третьем же слагаемом правой части уравнения (1.21) с малым отношением n_{0b} / n_0 уже нужно обращаться осторожно, так как нас интересуют волны, для которых $\omega \approx (k v_0)$, т. е. фазовая скорость которых в направлении движения пучка равна v_0 . Вкладом ионов в дисперсионное соотношение (1.21) можно пока пренебречь.

Таким образом, уравнение, описывающее пучковую неустойчивость, имеет вид

$$1 = \omega_{pe}^2 / \omega^2 + \omega_{pb}^2 / [\omega - (k v_0)]^2. \quad (1.22)$$

Это уравнение четвертого порядка по частоте ω , и хотя в принципе его можно решить точно, более полезны приближенные решения, которые можно найти из физических соображений. Действительно, в отсутствие пучка, т. е. при $n_b = 0$, решение уравнения есть $\omega = \omega_{pe}$. Так как нас интересует поведение волны с фазовой скоростью $\omega/k = v_0$, будем считать, что $\omega = \omega_{pe} = (k v_0)$.

В следующем приближении по $n_{0b} / n_0 \ll 1$ решение будем искать в виде $\omega = \omega_{pe} + \delta = (k v_0) + \delta$, где $\delta \ll \omega_{pe}$. Подставляя это выражение в уравнение (1.22) и разлагая $\omega_{pe}^2 / (\omega_{pe} + \delta)^2$ в ряд по δ / ω_{pe} , получаем $2\delta / \omega_{pe} = \omega_{pb}^2 / \delta^2$, откуда следует, что один из корней кубического уравнения для δ всегда имеет положительную мнимую часть γ порядка $\omega_{pe} (n_{0b} / n_0)^{1/3}$ [14]. Если учесть, что все возмущенные величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + ikr)$, то увидим, что те из них, которые соответствуют волновому вектору \mathbf{k} , определяемому из соотношения $\omega_{pe} = (k v_0)$, нарастают во времени экспоненциально, т. е. $n_e, v_e, n_b, v_b, \mathbf{E}$ пропорциональны $\exp(\gamma t)$.

Величина γ , характеризующая скорость роста амплитуды волны во времени, называется инкрементом. Таким образом, при пропускании через плазму электронного пучка тепловые шумы, попавшие в спектральный интервал вблизи $k = \omega_{pe}/v_0$, начнут экспоненциально нарастать во времени. Такое нарастание может привести к изменению начальных функций распределения пучка и плазмы, если плотность энергии волны, соответствующая E_k^2 , достигнет значения, сравнимого с $n_{ob} m v_0^2 / 2$. Если для оценок считать, что плотность энергии пучка, как минимум, на порядок меньше плотности энергии плазмы $(3/2) n_0 T$, а начальная плотность энергии волны порядка $n_0 T / N_D$, то время, в течение которого плотность энергии неустойчивой волны достигает значения порядка $n_{ob} m v_0^2 / 2$, приблизительно равно $\Lambda \gamma^{-1}$, где Λ — кулоновский логарифм. Действительно, $(1/10) (3/2) n_0 T \sim (n_0 T / N_D) \exp(2\gamma t)$, откуда следует приведенная выше оценка.

Здесь подробно рассмотрен простейший случай пучковой неустойчивости, так как он типичен для неустойчивостей всех более сложных типов. В заключение остается добавить, что в принципе неустойчивы и другие моды с большими k , однако их инкременты меньше [порядка $\omega_{pe} (n_{ob}/n_0)^{1/2}$], поэтому они играют меньшую роль. Волны с большими инкрементами достигают нелинейного режима раньше, чем колебания с меньшими инкрементами успевают существенно нарасти.

§ 1.6. Токовая неустойчивость в плазме

Гидродинамическая модель холодной плазмы весьма полезна при исследовании еще одной очень важной неустойчивости плазмы, которая связана с движением всех электронов относительно ионов и называется *токовой неустойчивостью*. Для ее исследования можно воспользоваться той же системой уравнений движения и непрерывности и уравнением Пуассона или получить дисперсионное уравнение из общего дисперсионного уравнения для пучковой неустойчивости. Для этого необходимо в уравнении (1.21) положить $n_{ob} = n_0$, а концентрацию покоящихся электронов считать равной нулю. Это соответствует случаю, когда все электроны представляют собой пучок, движущийся со скоростью v_0 относительно ионов. Дисперсионное уравнение при этом имеет вид

$$1 = \omega_{pe}^2 / [\omega - (k v_0)]^2 + \omega_{pi}^2 / \omega^2. \quad (1.23)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением для пучковой неустойчивости, если ввести новую частоту $\Omega = \omega - (k v_0)$ и учесть, что $\omega_{pi}^2 = (m/M) \omega_{pe}^2$.

Действительно, уравнение (1.23) в таких обозначениях имеет вид

$$1 = \omega_{pe}^2 / \Omega^2 + \omega_{pe}^2 (m/M) / [\Omega + (k v_0)]^2.$$

Это уравнение в сущности эквивалентно уравнению, описывающему пучковую неустойчивость, когда через плазму движется пучок со скоростью v_0 и концентрацией $n_0 \sqrt{m/M}$. Поэтому формулы для инкремента и частоты можно получить непосредственно из результатов предыдущего параграфа:

$$\Omega = \omega_{pe} = - (k v_0); \quad \gamma \sim \omega_{pe} (m/M)^{1/3}. \quad (1.24)$$

Чтобы найти частоту ω в лабораторной системе координат, необходимо учесть, что при решении кубического уравнения относительно δ возникает не только мнимая поправка к частоте, определяющая инкремент γ , но и действительная поправка того же порядка $\text{Re } \delta \sim \omega_{pe} (m/M)^{1/3}$. Поэтому в лабораторной системе координат в отличие от пучковой неустойчивости будет наблюдаться волна с частотой $\omega = \delta \sim \omega_{pe} (m/M)^{1/3}$ и амплитудой, экспоненциально нарастающей во времени с инкрементом $\gamma \sim \omega_{pe} (m/M)^{1/3}$. Интересно, что измеряемая частота пучковой неустойчивости гораздо выше частоты токовой неустойчивости. Неустойчивость, связанная с движением всех электронов относительно ионов, впервые исследована Бунеманом [12], поэтому ее часто называют также бунемановской неустойчивостью. Пучковая и бунемановская неустойчивости имеют максимальный инкремент для волн, распространяющихся соответственно вдоль пучка и потока при $k = \omega_{pe}/v_0$. Такой же инкремент имеют волны, распространяющиеся под углом θ к направлению движения заряженной компоненты плазмы, однако для них $k = \omega_{pe}/(v_0 \cos \theta)$. Естественно, что при переходе к $\theta \approx \pi/2$ k может приблизиться к значению r_{De}^{-1} , т. е. необходимо учитывать тепловое движение частиц.

§ 1.7. Влияние теплового разброса на устойчивость плазмы

Полное описание, безусловно, дают кинетические бесстолкновительные уравнения; однако в ряде случаев для получения приближенной картины можно воспользоваться их моментами по скоростям. Было показано, что в случае «холодной» плазмы можно ограничиться двумя моментами кинетических уравнений и получить адекватное описание неустойчивостей. Если температура, которая в бесстолкновительной системе является только мерой хаотичности движения, отлична от нуля (т. е. рассматриваются волны с фазовыми скоростями, меньшими или порядка тепловых скоростей заряженных частиц), полного детального описания плазмы даже в линейном приближении получить не удастся. Поскольку гидродинамическая модель чрезвычайно проста, ею часто пользуются для оценок, безусловно проверяя полученные результаты при помощи более строгого кинетического подхода.

Основные особенности гидродинамической модели плазмы состоят в том, что из-за «бесстолкновительности» системы температура различных компонент плазмы может быть разной. Кроме того, входящая в уравнения гидродинамики температура при движении среды в отсутствие магнитного поля не меняется, т. е. процессы происходят, как правило, изотермически. Это также связано с недостаточно частыми столкновениями, которые успевали бы выравнивать энергии, приходящиеся на различные степени свободы. Кроме того, совершенно очевидно, что система гидродинамических уравнений, состоящая из уравнений непрерывности и уравнений Эйлера с $T = \text{const}$, для каждой из компонент является неполной, так как помимо нулевого и первого моментов кинетических уравнений нужно было бы включить сюда третий, четвертый и т. д. моменты. Использование только нулевого и первого моментов позволяет полностью описать лишь холодную плазму.

Уравнения, описывающие плазму в гидродинамическом приближении с $T \neq 0$, можно получить тем же способом, что и уравнения для холодной плазмы, но в качестве функции распределения необходимо брать уже не δ -функцию, а, например, максвелловскую функцию типа

$$f = n(r) \left(\frac{m}{2\pi T(r)} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m [v - v(r)]^2}{2T} \right).$$

Опустив несложную процедуру получения таких уравнений [3], получим обычный результат, хорошо известный из гидродинамики:

$$\partial n_\alpha / \partial t + \text{div} [n v(r)] = 0; \quad m_\alpha n_\alpha dv_\alpha / dt = e_\alpha E - T_\alpha \nabla n_\alpha. \quad (1.25)$$

Отметим еще раз, что в отличие от обычной гидродинамики здесь температура T_α постоянна и может быть различной для электронов и ионов. Чтобы исследовать влияние температуры на устойчивость плазмы, получим дисперсионное соотношение в общем виде для плазмы, состоящей из n компонент, причем концентрация $n_{0\alpha}$, температура T_α и направленная скорость $v_{\alpha 0}$ каждой из компонент α могут различаться между собой. Считая, как и прежде, что все возмущенные величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + ikr)$, в линейном приближении получим дисперсионное соотношение

$$1 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - kv_{\alpha 0})^2 - k^2 v_{T\alpha}^2}, \quad (1.26)$$

где $\omega_{p\alpha} = 4\pi n_\alpha e^2 / m_\alpha$ и $v_{T\alpha} = (T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$. При температуре $T_\alpha = 0$ можно получить из общего уравнения прежние уравнения для пучковой и бунемановской неустойчивостей, а также дисперсионное соотношение для ленгмюровских волн. Кроме того, в отсутствие направленных скоростей у частиц можно найти новую ветвь колебаний, а именно ионно-звуковые колебания, и определить, при каких

условиях она неустойчива. Для этого запишем общее дисперсионное соотношение для плазмы, состоящей из электронов и ионов равной концентрации, в отсутствие пучков:

$$1 = \omega_{pe}^2 / (\omega^2 - k^2 v_{Te}^2) + \omega_{pi}^2 / (\omega^2 - k^2 v_{Ti}^2). \quad (1.27)$$

Можно теперь попытаться найти волны, которые распространяются с меньшими фазовыми скоростями, например от v_{Te} до v_{Ti} . Это позволит в дисперсионном уравнении (1.27) пренебречь в электронном члене частотой ω по сравнению с kv_{Te} , а в ионном члене kv_{Ti} по сравнению с ω^2 . Полученное дисперсионное соотношение уже легко разрешить относительно ω , в результате чего получим

$$\omega = \omega_{pi} / \sqrt{1 + 1/k^2 r_{De}^2}. \quad (1.28)$$

В принципе, в связанном с ионами члене можно было бы оставить kv_{Ti} , но, из-за кинетических эффектов, как показано ниже, ионно-звуковые колебания сильно затухают, когда их фазовая скорость сравнима с тепловой скоростью ионов. Поэтому наше рассмотрение справедливо, вообще говоря, при $T_e \gg T_i$. Действительно, при $kr_{De} \ll 1$ из формулы (1.28) имеем

$$\omega = kc_s; \quad c_s = \sqrt{T_e/M}. \quad (1.29)$$

При $kr_{De} \gg 1$ получаем $\omega = \omega_{pi}$, т. е. ионные ленгмюровские колебания, связанные с разделением зарядов. Чтобы выяснить физический смысл этой новой ветви колебаний, получим дисперсионное соотношение (1.29) непосредственно из гидродинамических уравнений, когда $T_i = 0$, а T_e конечна. Пренебрегая массой электронов, что справедливо при малой частоте колебаний, когда электроны движутся адиабатически, получим из второго уравнения (1.25) для потенциальных колебаний ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$)

$$0 = e\nabla\phi - T_e\nabla n. \quad (1.30)$$

Таким образом, $n_e = n_0 \exp(e\phi/T)$, или в линейном приближении $n_e - n_0 = n_0 e\phi/T$.

С другой стороны, складывая уравнение движения для электронов (1.25) при $\alpha = e$ с уравнением движения для ионов (1.26) при $\alpha = i$, получаем совместно с уравнением непрерывности для ионов следующую систему уравнений:

$$n_i M dv_i/dt = -T_e \nabla n_e; \quad \partial n_i / \partial t + \text{div}(n_i \mathbf{v}_i) = 0. \quad (1.31)$$

Если рассматривать колебания с характерными длинами волн, много большими дебаевского радиуса, то эту систему следует еще дополнить условием квазинейтральности колебаний

$$n_e = n_i. \quad (1.32)$$

Заменяя теперь в первом уравнении (1.31) n_e на n_i , получаем, что система уравнений (1.31) переходит в систему уравнений идеальной

гидродинамики с показателем адиабаты $\gamma = 1$ (изотермическое движение). Решение же такой системы, как известно, описывает обычные звуковые колебания, распространяющиеся со скоростью $\sqrt{\gamma T_e/M}$; но так как $\gamma = 1$, получаем скорость ионно-звуковых колебаний $\sqrt{T_e/M}$.

Таким образом, низкочастотные (н. ч.) колебания в плазме представляют собой колебания, в которых роль упругой, или возвращающей силы играет электронное давление ($T_e \neq 0$), а инерция определяется ионами.

Уже на этом простом примере видна ограниченность гидродинамической модели плазмы: приходится, опираясь на кинетику, формулировать условие существования ионно-звуковых колебаний $T_e \gg T_i$. Однако в общих чертах эта модель описывает явления довольно хорошо [13]. Самый надежный результат линейной теории — это порог неустойчивости, т. е. те минимальные направленные скорости, при которых возникает, например, пучковая или бунемановская неустойчивость. Что касается инкремента неустойчивости, то измерить его обычно трудно: плазменные частоты довольно высоки, поэтому неустойчивые колебания достаточно быстро достигают нелинейного режима.

Определим сначала порог бунемановской неустойчивости. Для этого выпишем дисперсионное соотношение для плазмы с учетом того, что $T_e \gg T_i$. Как правило, в большинстве экспериментальных установок такие условия выполняются (см., например, [14, 15]).

Пренебрежем для простоты вкладом T_i в дисперсионное соотношение. Тогда дисперсионное соотношение для бунемановской неустойчивости имеет вид

$$1 = \omega_{pi}^2/\omega^2 + \omega_{pe}^2/[\omega - (ku)]^2 - k^2 v_{Te}^2, \quad (1.33)$$

где u — направленная скорость электронов. Будем рассматривать сначала волны, которые распространяются вдоль потока электронов; тогда $ku = ku$. При этом уравнение (1.33) можно переписать в виде [13]

$$k^2 = \omega_{pi}^2/(\omega/k)^2 + \omega_{pe}^2/[(\omega/k - u)^2 - v_{Te}^2] = F(\omega/k). \quad (1.34)$$

Здесь решается задача на собственные значения, т. е. k — действительная величина ($k^2 > 0$), в то время как частота ω может иметь мнимую добавку. Записав уравнение в виде (1.34), мы тем самым ввели вместо ω и k новые переменные — действительную переменную k^2 и переменную ω/k , которая в принципе может быть комплексной. Правая часть уравнения (1.34) зависит лишь от фазовой скорости ω/k , в то время как левая — лишь от $k^2 > 0$. Это уравнение относительно ω/k при заданном k^2 имеет четыре корня. Так как коэффициенты уравнения действительны, то или все четыре корня действительны, или два из них действительны, а два комплексно сопряжены. Если решать уравнение (1.34) графически, то необходимо по-

строить функцию $F(\omega/k)$ и найти пересечения этой кривой с прямой $k^2 = \text{const} = 0$. Когда все четыре корня действительные, наблюдается четыре точки пересечения, если же два из них комплексные, то будет две точки пересечения. Рассмотрим сначала случай, когда

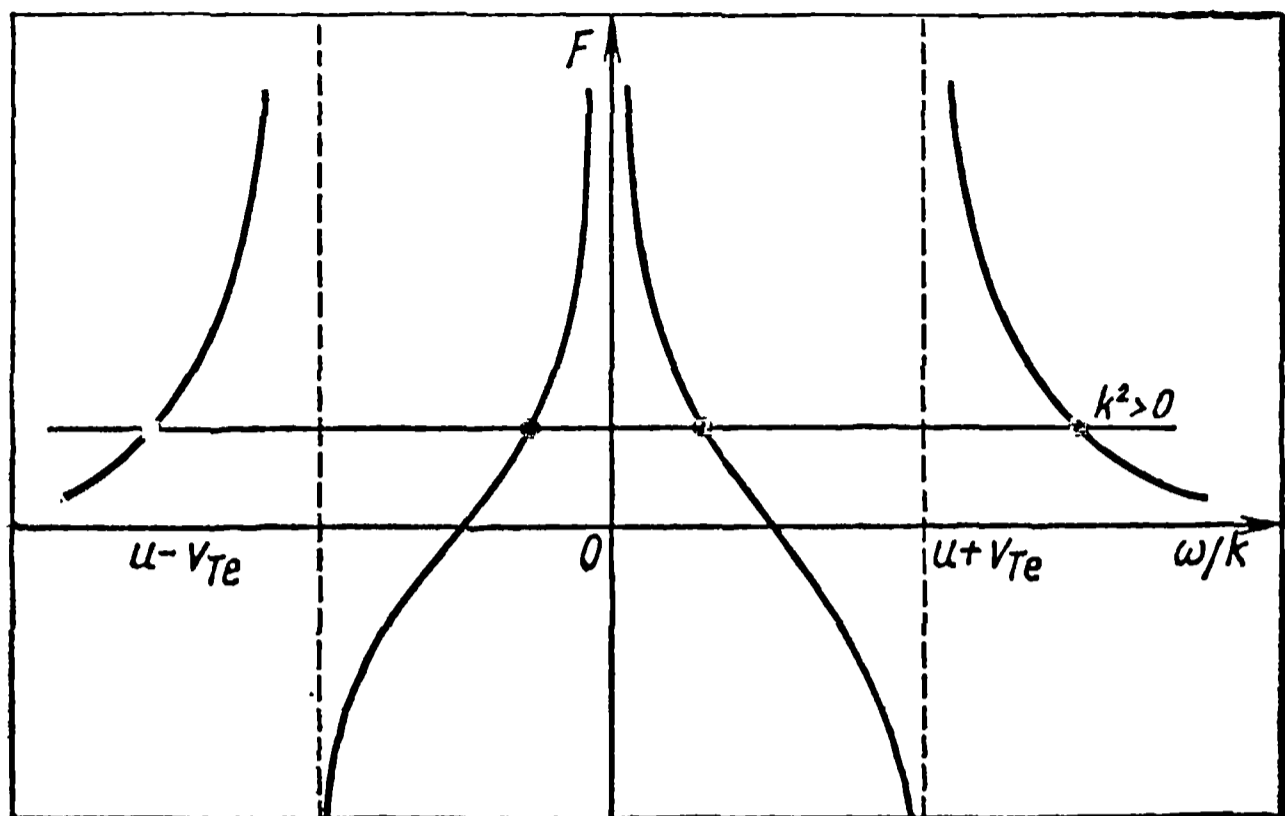


Рис. 1

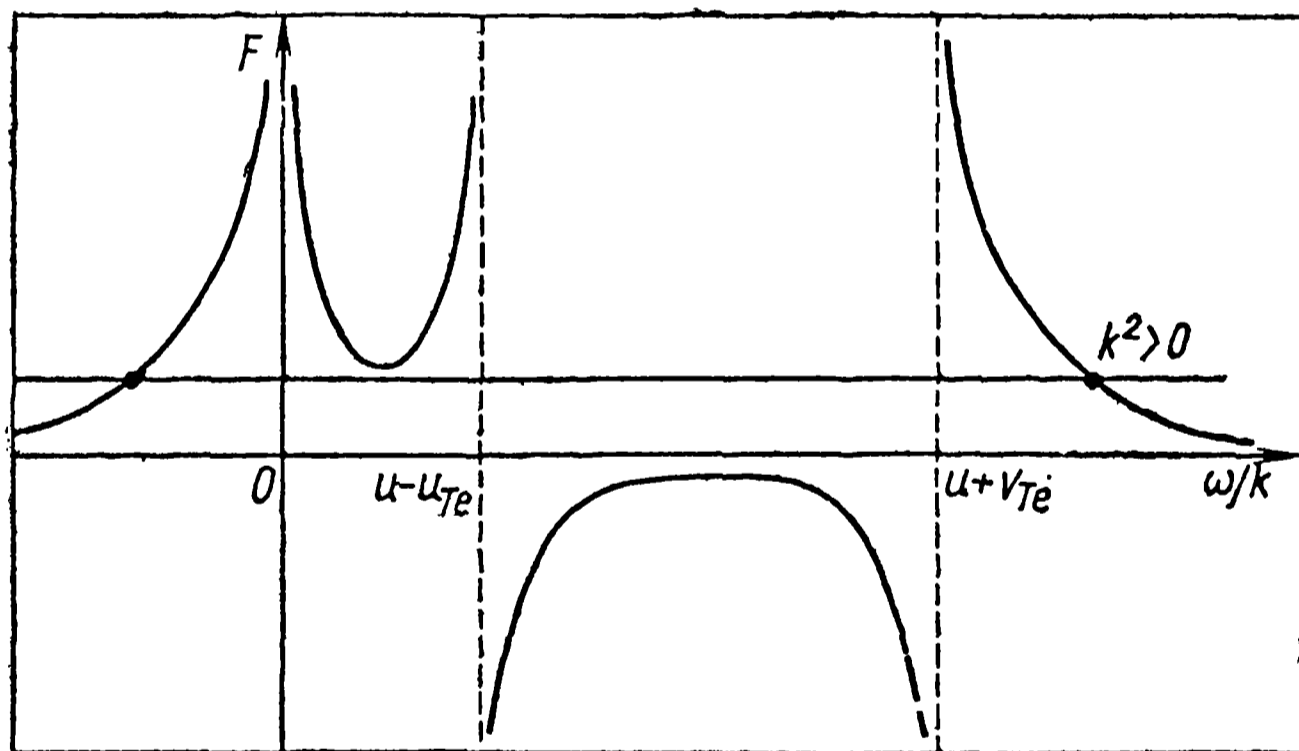


Рис. 2

направленная скорость электронов меньше тепловой, т. е. $u < v_{те}$. При этом функция $F(\omega/k)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.

Из рис. 1 следует, что при любом значении $k^2 > 0$ решение уравнения (1.34) имеет четыре действительных корня; следовательно, система устойчива в гидродинамическом приближении. Если же $u > v_{те}$, то соответствующие графики функции $F(\omega/k)$ и k^2 имеют вид, изображенный на рис. 2. При $u > v_{те}$ прямая $k^2 > 0$ пересекает график функции $F(\omega/k)$ в двух точках. Это означает, что действительны лишь два корня. Два других корня — комплексно-сопря-

женные, т. е. один из них обязательно соответствует неустойчивому решению.

Найдем условия, при которых система неустойчива. Условием неустойчивости будет равенство $\min F(\omega/k) = 0$ в области фазовых скоростей между нулем и $u - v_{Te}$. Из рис. 1 и 2 следует, что пороговое значение скорости должно быть порядка v_{Te} . Кроме того, при $u \gg v_{Te}$ уравнение для бунемановской неустойчивости уже исследовано и известно, что в лабораторной системе координат фазовая скорость неустойчивой волны много меньше направленной скорости электронов. Поэтому при решении задачи о пороге неустойчивости можно пользоваться тем, что $u \approx v_{Te} \gg \omega/k$.

Дифференцируя функцию $F(\omega/k)$ по переменной ω/k и приравняв результат нулю, получаем уравнение

$$\frac{(\omega/k - u)}{[(\omega/k - u)^2 - v_{Te}^2]^2} = -\frac{m/M}{(\omega/k)^3}. \quad (1.35a)$$

Уравнение для $F_{\min}(\omega/k) = 0$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{(\omega/k - u)^2 - v_{Te}^2} = -\frac{m/M}{(\omega/k)^2}. \quad (1.35b)$$

Возведем обе части уравнения (1.35б) в квадрат и разделим уравнение (1.35а) на результат. Тогда $\omega/k = u/(1 + M/m)$, т. е., действительно, фазовая скорость много меньше направленной скорости электронов. Подставив полученное значение фазовой скорости в уравнение (1.35а), найдем связь между пороговой и тепловой скоростью электронов:

$$u^2 = v_{Te}^2 (1 + m/M). \quad (1.36)$$

Когда направленная скорость значительно превышает тепловую электронную, можно пренебречь v_{Te} по сравнению с u и найти максимальный инкремент неустойчивости, как это было показано раньше. Пороговое значение скорости для электронного пучка можно получить точно так же, как и для бунемановской неустойчивости. В окончательных ответах нужно лишь заменить m/M на n_{ob}/n_0 .

§ 1.8. Неустойчивость ионного пучка в плазме

Рассмотрим задачу о прохождении моноэнергетического пучка ионов малой плотности через бесстолкновительную плазму, плотность которой намного превышает плотность пучка, причем $T_e \gg \gg T_i$. Таким образом, дисперсионное соотношение для случая ионной неустойчивости имеет вид

$$1 = \omega_{pi}^2/\omega^2 - 1/k^2 r_{De}^2 + \omega_{pi}^2 (n_{ob}/n_0)/[\omega - (ku)]^2, \quad (1.37)$$

где u — направленная скорость ионов пучка, плотность которого

равна n_{ob} . Это дисперсионное соотношение непосредственно следует из полного дисперсионного соотношения в пренебрежении температурой ионов ($v_{Ti} \ll \omega/k$) и фазовой скоростью колебаний по сравнению с тепловой электронной скоростью ($v_{Te} \gg \omega/k$).

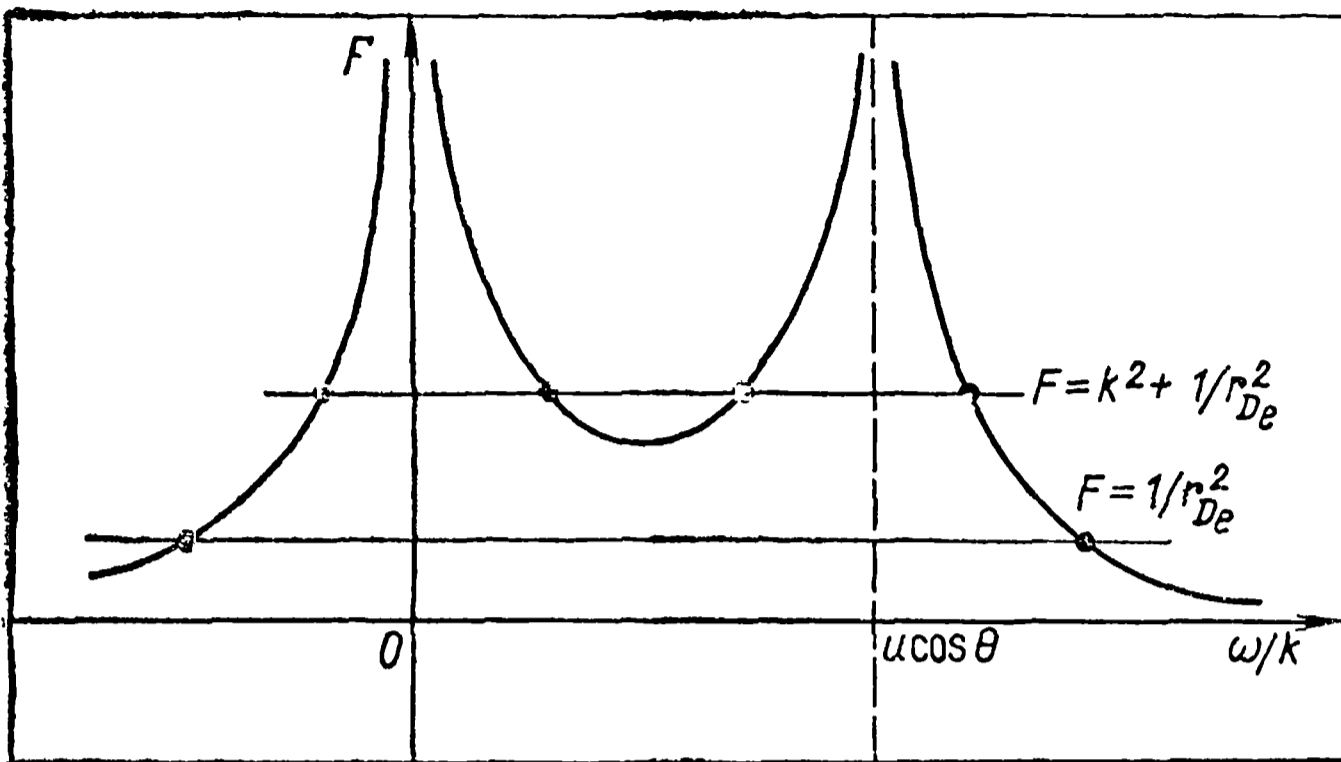


Рис. 3

Определим сначала порог неустойчивости. Для этого воспользуемся тем же методом, что и в предыдущем параграфе, представив дисперсионное соотношение (1.37) в виде

$$k^2 + \frac{1}{r_{De}^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega/k)^2} + \frac{\omega_{pi}^2 n_{ob}/n_0}{(\omega/k - u \cos \theta)^2} = F(\omega/k), \quad (1.38)$$

где θ — угол между направлением движения пучка и k . Уравнение (1.38) имеет четыре корня, и, повторяя те же рассуждения, что и в предыдущем параграфе, можно сказать, что неустойчивость имеет место, если прямая $k^2 + 1/r_{De}^2$ пересекает график функции $F(\omega/k)$ только два раза (рис. 3).

Найдем условие неустойчивости. Для этого потребуем, чтобы минимальное значение $F(\omega/k)$ было больше, во всяком случае, r_{De}^{-2} . При $\omega/k = (u \cos \theta) / [1 + (n_{ob}/n_0)^{1/3}]$

$$F_{\text{мин}}(\omega/k) = (\omega_{pi}^2 / u^2 \cos^2 \theta) [1 + (n_{ob}/n_0)^{1/3}]^{-2}. \quad (1.39)$$

Таким образом, условие неустойчивости можно переписать в виде

$$u \cos \theta < c_s / [1 + (n_{ob}/n_0)^{1/3}], \quad (1.40)$$

или

$$u \cos \theta < \sqrt{T_e/M}. \quad (1.41)$$

Интересно следующее обстоятельство. При исследовании электронных пучков в предыдущем параграфе условием неустойчивости

в одномерном случае было превышение некоторого порогового значения скорости пучка. В данном случае условие неустойчивости состоит в том, что скорость ионного пучка не должна превышать скорости ионно-звуковых колебаний в одномерной задаче, когда $\cos \theta = 1$. Это связано с тем, что максимальная фазовая скорость н. ч.-колебаний равна скорости ионно-звуковых колебаний c_s и при увеличении k фазовая скорость уменьшается. В случае неустойчивости электронного пучка собственные колебания были ленгмюровскими, фазовая скорость которых может быть достаточно большой, так как частота их постоянна. Что касается ограничения снизу, то, разумеется, скорость $u \cos \theta$ должна быть больше тепловой скорости ионов. Это ограничение непосредственно не следует из уравнений, так как мы пренебрегли ионной температурой. Если скорость пучка u намного превышает скорость ионно-звуковых колебаний, то возбуждаться будут преимущественно волны, распространяющиеся почти перпендикулярно направлению скорости пучка.

Найдем максимальный инкремент для рассматриваемой неустойчивости. Условием максимума инкремента, как и прежде, является равенство собственной частоты колебаний $\omega = \omega_{pi} [1 + 1/(k^2 r_{De}^2)]^{-1/2}$ значению $k u \cos \theta$. При этом оказывается, что инкремент

$$\gamma \sim (n_{ob}/n_0)^{1/3} \omega_{pi} \sqrt{1 + 1/(k^2 r_{De}^2)}, \quad (1.42)$$

а волновое число неустойчивых колебаний определяется соотношением

$$k^2 = r_{De}^{-2} (c_s^2 - u^2 \cos^2 \theta) / u^2 \cos \theta. \quad (1.43)$$

Таким образом, при достаточно малых значениях скорости для одномерного случая или, что то же, при достаточно больших значениях θ для трехмерного случая длина раскачиваемых волн много меньше r_{De} . Поэтому, пренебрегая в формуле (1.42) $(k^2 r_{De}^2)^{-1}$ по сравнению с единицей, получаем

$$\gamma_{\max} \sim \omega_{pi} (n_{ob}/n_0)^{1/3}. \quad (1.44)$$

§ 1.9. Кинетические эффекты

Рассмотрим влияние кинетических эффектов на неустойчивость и найдем область применения результатов, полученных в гидродинамическом приближении. Для этого исследуем в одномерном приближении задачу о прохождении электронного пучка через плазму. Будем считать для простоты, что электроны плазмы холодные, т. е. фазовая скорость интересующих нас колебаний много больше тепловой скорости электронов плазмы. Средняя направленная скорость электронов пучка, которая, как это следует из гидродинамической модели, близка к фазовой скорости колебаний, также много больше тепловой скорости электронов плазмы. Поэтому электроны плазмы

будем описывать в гидродинамическом приближении. Поведение электронов пучка будем исследовать в кинетике, вводя их функцию распределения по скоростям. Такой комбинированный подход, когда одна из компонент плазмы описывается кинетическим уравнением, а для другой используется гидродинамическое приближение, часто применяется в теории плазмы и помогает глубже понять физическую сторону явлений. Так как при пучковой неустойчивости возникают высокочастотные (в. ч.) колебания, в которых ионы в силу их большой массы не участвуют, будем считать их неподвижными, что соответствует, как было показано, пренебрежению m/M по сравнению с единицей. Таким образом, полная система уравнений, описывающая процесс, имеет следующий вид:

$$m dv_e/dt = -eE; \quad (1.45)$$

$$\partial n_e/\partial t + (\partial/\partial x)(n_e v_e) = 0; \quad (1.46)$$

$$\partial f/\partial t + v\partial f/\partial x - (eE/m)(\partial f/\partial v) = 0; \quad (1.47)$$

$$\partial E/\partial x = 4\pi e \left[n_0 + n_{ob} - n_e - \int_{-\infty}^{\infty} f dv \right]. \quad (1.48)$$

Ось x направлена вдоль скорости электронов пучка, и поскольку рассматривается одномерный случай, все возмущенные величины зависят только от координаты x . Так как колебания являются электростатическими, электрическое поле направлено также вдоль x .

Пусть все возмущенные величины зависят от времени и координаты следующим образом: $A(x, t) \sim \exp(-i\omega t + ikx)$. Тогда для фурье-компоненты v_k имеем из уравнения (1.45): $v_k = eE_k/(mi\omega)$. Подставляя это выражение в фурье-компоненту уравнения непрерывности (1.46), получаем $n_{ek} = (e/mi\omega^2)kE_k$. Невозмущенная функция распределения электронов пучка нормирована: $\int f_0 dv = n_{ob}$. Учитывая это обстоятельство, а также то, что $f = f_0 + f_1 = f_0 + \sum_k \exp(-i\omega t + ikx) f_k$, получим из уравнения Пуассона (1.48)

$$ikE_k = (\omega_{pe}^2/\omega^2) ikE_k - 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_k dv. \quad (1.49)$$

Обратимся теперь к кинетическому уравнению (1.47). В линейном приближении оно имеет вид

$$\partial f_1/\partial t + v\partial f_1/\partial x - (eE/m)(\partial f_0/\partial v) = 0.$$

Здесь учтено, что невозмущенная функция f_0 не зависит от x и t . Для фурье-компоненты f_k имеем уравнение

$$i(-\omega + kv) f_k = (eE_k/m)(\partial f_0/\partial v),$$

откуда следует, что

$$f_k = i (e/m) (\partial f_0 / \partial v) (\omega - kv)^{-1} E_k. \quad (1.50)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение имеет вид

$$1 = \omega_{pe}^2 / \omega^2 - [\omega_{pb}^2 (n_{0b} k)] \int_{-\infty}^{\infty} (\partial f_0 / \partial v) (\omega - kv)^{-1} dv, \quad (1.51)$$

где $\omega_{pb} = (4\pi n_{0b} e^2 / m)^{1/2}$. Видно, что подынтегральное выражение в последнем члене уравнения (1.51) имеет особенность в точке $v = \omega/k$, т. е. там, где скорость частиц пучка равна фазовой скорости волны. Этого следовало ожидать, исходя из результатов, полученных при использовании гидродинамической модели, так как частицы наиболее интенсивно взаимодействуют с волной, когда их скорость близка к фазовой скорости волны. Если рассматривается волна с фазовой скоростью, близкой к скорости пучка, то в принципе могут реализоваться условия, когда амплитуда волны, например, нарастает во времени. В этом случае частицы пучка отдают энергию волне, т. е. они должны двигаться несколько быстрее волны. При рассмотрении гидродинамических неустойчивостей в § 1.6 и 1.7 было показано, что экспоненциальное нарастание амплитуды волны во времени соответствует появлению положительной мнимой добавки к частоте волны. Иными словами, частота, вообще говоря, должна быть комплексной величиной. Поэтому особенность в последнем члене уравнения (1.51) смещается в комплексную плоскость, и при интегрировании по действительной оси v подынтегральное выражение не обращается в бесконечность. Однако возникает вопрос, в какую часть комплексной плоскости (верхнюю или нижнюю) должна быть смещена точка $v = \omega/k$, т. е. какого знака мнимое слагаемое необходимо добавлять к частоте. Ответ на этот вопрос можно получить из принципа причинности, переформулированного в правило обхода полюса для интегралов, содержащих в знаменателе $\omega - kv$. Это правило обычно называют правилом обхода Ландау [16], и состоит оно в следующем. Интеграл разбивается на интеграл в смысле главного значения и интеграл, взятый в окрестности особенности, при помощи прибавления к частоте ω малого положительного мнимого члена, который устремляется к нулю.

Знак мнимой добавки выбирают по принципу причинности из тех соображений, чтобы при $t = -\infty$ возмущение равнялось нулю. Действительно, так как возмущение в нашем случае пропорционально $\exp(-i\omega t)$, то, заменив ω на $\omega + i\nu$, получим, что при $t \rightarrow -\infty$ возмущение стремится к нулю. Аналогичный результат можно получить автоматически, если пользоваться преобразованием Лапласа [17], а не преобразованием Фурье.

Чтобы продемонстрировать применение правила обхода Ландау, обратимся к последнему слагаемому в правой части уравнения (1.51). Заменим в подынтегральном выражении ω на ком-

плексную величину $\omega + i\nu$. Тогда интеграл $I = \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial f/\partial v) (\omega - kv + i\nu)^{-1} dv$ можно разбить на действительную и мнимую части:

$$I = \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f_0/\partial v) (\omega - kv)}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv - i \lim_{\nu \rightarrow 0} \int \frac{(\partial f_0/\partial v) \nu}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv. \quad (1.52)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой интеграл, взятый в смысле главного значения, т. е. интеграл, взятый по всем точкам действительной оси v , кроме одной. Исключением как раз является точка $v = \omega/k$. Действительно, подынтегральное выражение в первом слагаемом при $v = \omega/k$, $\nu \neq 0$ обращается в нуль. Таким образом, подынтегральное выражение в первом слагаемом не имеет особенностей, вклад в интеграл от особой точки мал, поэтому эффект взаимодействия частиц с волной описывается вторым слагаемым. Интеграл $\int (\partial f_0/\partial v)[(\omega - kv)^2 + \nu^2]^{-1} dv$ взять довольно просто, когда функция распределения пучка плавная. Позднее это условие будет уточнено, а пока для простоты примем, что оно выполняется. Тогда, учитывая, что $\nu \rightarrow 0$, можно взять интеграл, пользуясь теоремой о среднем, т. е.

$$\int \frac{\partial f_0/\partial v}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} \approx \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \Big|_{v=\omega/k} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \Big|_{v=\omega/k} \frac{\pi}{|k| \nu}.$$

Окончательно получим

$$I = \lim_{\nu \rightarrow 0} \int \frac{(\partial f_0/\partial v) (\omega - kv) dv}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} - \frac{i\pi}{|k|} \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \Big|_{v=\omega/k}. \quad (1.53)$$

Правило обхода полюса записывают часто в общем виде:

$$\int dx/(x - a) = \mathcal{P} \int [dx/(x - a)] + i\pi \delta(x - a), \quad (1.54)$$

где буква \mathcal{P} показывает, что интеграл берется в смысле главного значения [18], а δ -функция, будучи проинтегрированной, даст значение той функции, которая умножится на дробь $1/(x - a)$ в точке $x = a$.

Обратимся к дисперсионному соотношению (1.51). Его можно переписать с учетом правила обхода Ландау следующим образом:

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{n_{0b}k} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv} dv + \frac{i\pi}{|k|} \frac{\omega_{pb}^2}{k} \left(\frac{1}{n_{0b}} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \Big|_{v=\omega/k}.$$

Во втором слагаемом интеграл берется в смысле главного значения. Поскольку параметр n_{0b}/n_0 мал, вклад от второго слагаемого в дей-

ствительную часть дисперсионного соотношения мал по сравнению с вкладом от остальных членов. Последнее слагаемое весьма важно, так как отражает взаимодействие электронов пучка с волной, а формально является единственным мнимым слагаемым в дисперсионном соотношении. Поэтому окончательный вид дисперсионного соотношения следующий:

$$1 = \omega_{pe}^2 / \omega^2 + i (\pi |k| k) (\omega_{pb}^2 / n_{0b}) (\partial f_0 / \partial v) \Big|_{v=\omega/k}. \quad (1.55)$$

Воспользуемся тем, что отношение плотности пучка к плотности плазмы мало. В нулевом приближении получаем, что частота собственных колебаний равна плазменной электронной частоте ω_{pe} . Далее, полагая $\omega = \omega_{pe} + \delta$, а $\delta \ll \omega_{pe}$, подставим выражение для ω в уравнение (1.55). Разлагая по $\delta / \omega_{pe} \ll 1$, получаем

$$2\delta / \omega_{pe} = (i\pi / |k| k) (\partial f_0 / \partial v) \Big|_{v=\omega/k} \omega_{pb}^2 / n_{0b}$$

или

$$\delta = i (\pi/2) (\omega_{pe} \omega_{pb}^2 / |k| k n_{0b}) (\partial f_0 / \partial v) \Big|_{v=\omega/k}. \quad (1.56)$$

Для $(\partial f_0 / \partial v) \Big|_{v=\omega/k} > 0$ получаем, что амплитуда волны растет во времени экспоненциально. Этот результат можно понять следующим образом. В окрестности $v = \omega/k$ функция распределения ведет себя таким образом, что электронов пучка, опережающих волну, больше, чем электронов, отстающих от нее. Те электроны, которые имеют скорости, близкие к $v = \omega/k$, но несколько опережают волну, отдают свою энергию волне, т. е. возбуждают ее. Отстающие же электроны отбирают энергию у волны, что приводит к ее затуханию. Условие возбуждения $\partial f_0 / \partial v \Big|_{v=\omega/k} > 0$ означает, что когда число электронов, опережающих волну, больше, возможна неустойчивость, т. е. возбуждение волны.

Найдем точные значения γ_{\max} и k , соответствующего этому инкременту. Разумеется, понятие точности здесь весьма относительно, так как в бесстолкновительной плазме функция распределения пучка может иметь любой вид. Важно только, чтобы это был именно пучок, т. е. его центр масс в пространстве скоростей должен быть отнесен достаточно далеко от начала координат; значит, должно выполняться условие $u \gg v_{Te}, v_{Te}^b$. Здесь v_{Te} и v_{Te}^b — ширина функции распределения в пространстве скоростей электронов плазмы и пучка соответственно. Оценить инкремент неустойчивости (1.56) можно следующим образом. Функция распределения пучка нормирована так, что интеграл от нее по скоростям равен плотности пучка n_{0b} . Если функция заметно уменьшается при $v = u \pm \Delta v$, то $f_0 = n_{0b} / (2\Delta v)$, а $\partial f_0 / \partial v \Big|_{v=\omega/k=u} \approx n_{0b} / 2 (\Delta v)^2$. Инкремент $\gamma = \text{Im} \delta$ можно записать в виде

$$\gamma = \frac{\pi}{4} \frac{n_{0b}}{n_0} \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^2}{|k| k (\Delta v)^2} \Big|_{k=\omega_{pe}/u} = \frac{\pi}{4} \frac{n_{0b}}{n_0} \omega_{pe} \frac{u^2}{(\Delta v)^2}. \quad (1.57)$$

Теперь инкремент в отличие от случая моноэнергетического пучка пропорционален отношению плотностей пучка и плазмы. Формально при $\Delta v \rightarrow 0$, т. е. при $df_0/dv \rightarrow \infty$, инкремент неограниченно возрастает. При $\gamma > \omega_{pe}$ уже нельзя решать уравнение с использованием параметра $\delta/\omega_{pe} \ll 1$, поэтому выражение для инкремента (1.57) при достаточно малых Δv несправедливо.

Найдем выражение для инкремента, когда функция распределения пучка является максвелловской с температурой T_b и средней скоростью u , т. е.

$$f_0 = n_{0b} (m/2\pi T_b)^{1/2} \exp \{ -m (v - u)^2 / 2T_b \}.$$

Инкремент γ_k для такой функции распределения выражается формулой

$$\gamma_k = \sqrt{\pi} \frac{n_{0b}}{n_0} \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Tb}^2} \frac{(u - \omega_{pe}/k)}{v_{Tb}} \exp \{ - (u - \omega_{pe}/k)^2 / v_{Tb}^2 \}, \quad (1.58)$$

где $v_{Tb} = \sqrt{2T_b/m}$ — тепловая скорость частиц пучка, характеризующая его разброс в пространстве скоростей вблизи средней скорости u ($v_{Tb} \ll u$). Инкремент имеет максимум, соответствующий определенному значению k . Отметим, что определение тепловой скорости при кинетическом подходе с использованием максвелловской функции распределения отличается от соответствующего определения в гидродинамическом приближении (§ 1.7), где $v_{Te} = \sqrt{T_e/m}$. Это связано с тем, что при гидродинамическом подходе, как показано в § 1.8, функция распределения электронов фактически нематвелловская.

Приравняв $d\gamma/dv_\phi$ нулю, получим

$$2(u/v_\phi - 1) = (v_\phi/v_{Tb}) [1 - 2(v_\phi^2/v_{Tb}^2)(u/v_\phi - 1)^2].$$

Так как $u \sim v_\phi$, в первом приближении можно пренебречь левой частью уравнения по сравнению с правой. В результате получим при максимальном γ

$$k = [1 + (1/\sqrt{2})(v_{Tb}/u)] (\omega_{pe}/u).$$

Дальнейшее уточнение приведет к появлению членов порядка v_{Tb}^2/u^2 . Знак плюс выбран из тех соображений, что инкремент γ_k отличен от нуля лишь в том случае, если средняя скорость электронов пучка u превышает фазовую скорость волны ω_{pe}/k . Для максвелловского распределения разность между этими скоростями составляет $v_{Tb}/\sqrt{2} \ll u$.

§ 1.10. Границы гидродинамического и кинетического описаний

При вычислении инкрементов пучковой неустойчивости в гидродинамическом и кинетическом приближениях получены различные результаты. Как уже отмечалось, кинетический подход более по-

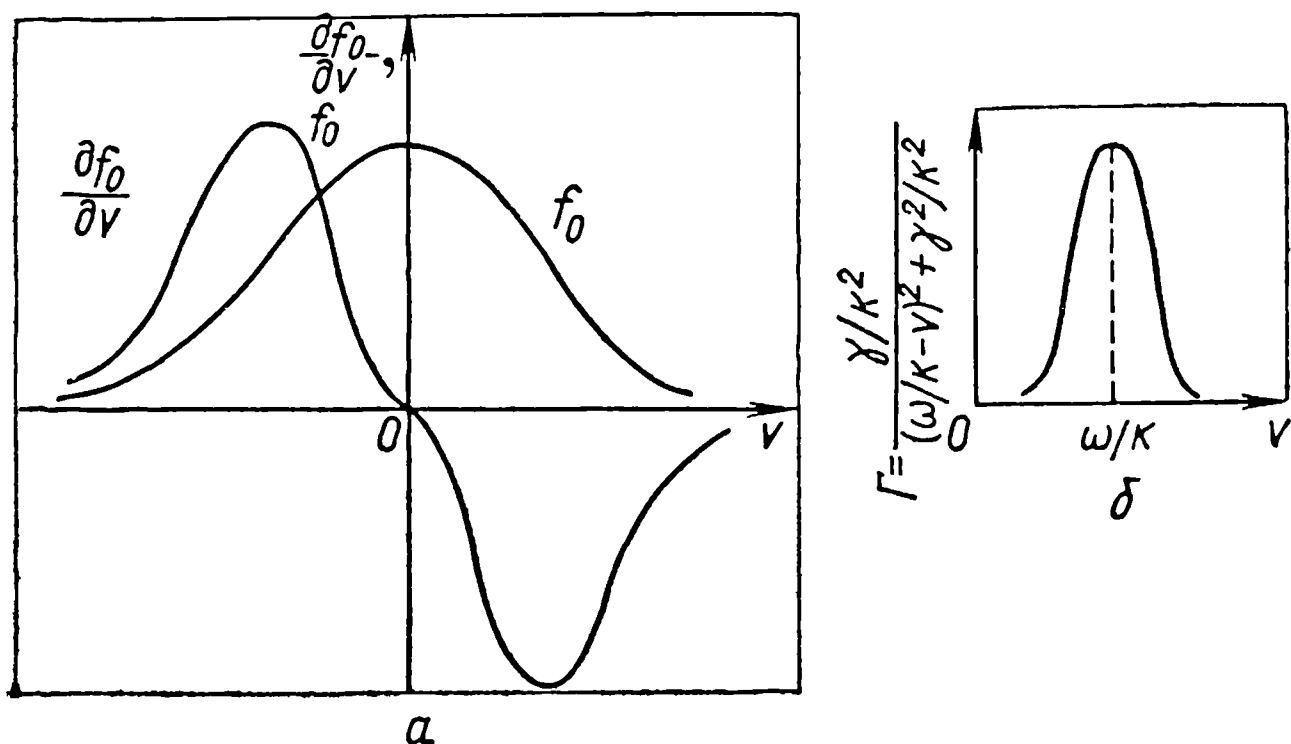


Рис. 4

следователен и, казалось бы, должен содержать как предельный случай гидродинамическое приближение. Тем не менее, устремляя в формуле (1.57) разброс скоростей в пучке Δv к нулю, получим бессмысленный результат.

Выясним, какие допущения, сделанные при выводе формулы (1.57), нужно переформулировать, чтобы получить инкремент пучковой неустойчивости для моноэнергетического пучка, пропорциональный $(n_{0b}/n_0)^{1/3}$. Прежде всего, при $\Delta v \rightarrow 0$ увеличивается значение производной функции распределения $(\partial f/\partial v)|_{v=\omega/k}$. При выводе соотношения (1.53) использовалось условие медленного изменения функции и ее производной в окрестности $v = \omega/k$, что позволило в формуле (1.52) устремить v к нулю. Когда пучок моноэнергетический, этого в принципе делать нельзя. Учтем теперь, что ω может иметь из-за неустойчивости конечную мнимую добавку $i\gamma$, где $\gamma > 0$. Тогда мнимая часть интеграла I примет вид $-\int (\partial f_0/\partial v) \gamma [(\omega - kv)^2 + \gamma^2]^{-1} dv$, где γ в отличие от v может оставаться конечной. Рассмотрим два предельных случая: когда ширина функции распределения в пространстве скоростей больше чем γ/k и когда $\gamma/k > \Delta v$. Иными словами, в подынтегральном выражении необходимо сравнить ширину функций $\partial f_0/\partial v$ и $\Gamma = \frac{\gamma/k^2}{(\omega/k - v)^2 + \gamma^2/k^2}$, изображенных на рис. 4. Ширина функции рас-

пределения определяется значением Δv , а для максвелловской функции распределения $\Delta v \sim v_{Tb}$. Ширина функции Γ определяет-

ся значением γ/k . В этом случае, если $\gamma/k \ll \Delta v$, $\partial f_0/\partial v$ оказывается более плавной функцией и может быть вынесена из-под знака интеграла, как это делалось при выводе формулы (1.53).

При $\gamma/k \gg \Delta v$ такое приближение нельзя использовать. Таким образом, условие применимости кинетического приближения можно получить, если взять максимальное значение инкремента, вычисленное в гидродинамическом приближении, $\gamma \sim \omega_{pe} \times \times (n_{0b}/n_0)^{1/3}$, т. е. при

$$\Delta v/u \gg (n_{0b}/n_0)^{1/3} \quad (1.59)$$

справедливо кинетическое приближение [13].

Получим из общего дисперсионного соотношения (1.51) гидродинамический инкремент для пучковой неустойчивости. Будем считать,

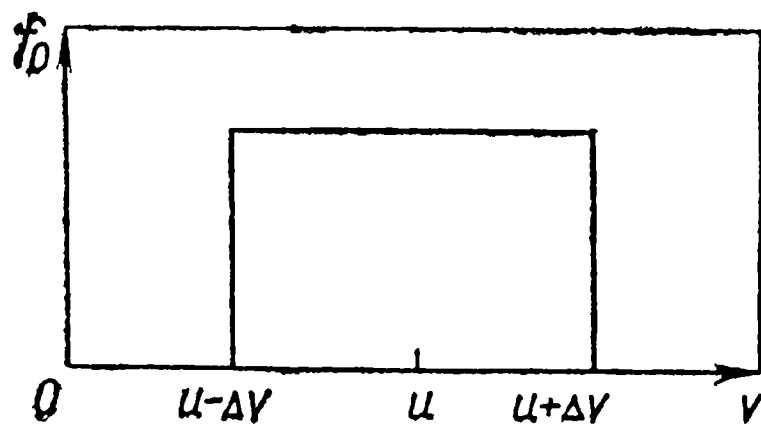


Рис. 5

что функция распределения пучка имеет вид, изображенный на рис. 5. Функция распределения нормирована так, что $\int f_0 dv = n_{0b}$, поэтому плато имеет высоту $n_{0b}/(2\Delta v)$. Производная $\partial f_0/\partial v = [n_{0b}/(2\Delta v)] \times \times [\delta(v - u + \Delta v) - \delta(v - u - \Delta v)]$. Подставляя это выражение в последнее слагаемое в правой части уравнения (1.51) и проводя интегрирование, получаем дисперсионное соотношение

$$1 = \omega_{pe}^2/\omega^2 + \omega_{pb}^2/[(\omega - ku)^2 - (k\Delta v)^2]. \quad (1.60)$$

Сравнивая уравнения (1.33) и (1.60), можно заключить, что они совпадают для одномерного случая, если $\Delta v = v_{Te}$. Отсюда следует, что гидродинамическое приближение получается, когда функции распределения имеют вид, изображенный на рис. 5. Максимальное значение инкремента достигается при $u \gg \Delta v$:

$$\gamma_{\max} \sim \omega_{pe} (n_{0b}/n_0)^{1/3}. \quad (1.61)$$

Аналогичная ситуация имеет место и для ионных пучков. Обратим внимание на характерную особенность так называемых кинетических неустойчивостей, т. е. неустойчивостей для достаточно плавных функций распределения. Инкремент неустойчивости определяется локальным значением производной функции распределения в данной точке пространства скоростей. Такой характер кинетических неустойчивостей позволяет довольно просто найти нелинейный режим неустойчивости, изменение вида функции распределения со временем и амплитуду установившихся шумов. Особенно большой интерес исследование нелинейного режима представляет для эксперимента, так как надежные измерения полей развившихся колебаний и определение вида функции распределения пучка можно провести

лишь на нелинейной стадии. Это связано с тем, что инкременты неустойчивости имеют довольно большие абсолютные значения (порядка $10^9 - 10^{10} \text{ с}^{-1}$), а заметные электрические поля возникают только на нелинейной стадии.

§ 1.11. Квазилинейное приближение

Рассмотрим задачу о неустойчивости электронного пучка малой плотности в плазме, когда инкремент определяется производной $\partial f_0 / \partial v$. При обсуждении равновесных шумов в плазме в § 1.3 было показано, что амплитуды их очень малы, причем малым параметром является не только отношение их плотностей энергии, но и обратная величина логарифма их отношения. Эти малые параметры, а также соотношение $n_{ob}/n_0 \ll 1$ позволяют полностью решить задачу о поведении функции распределения электронного пучка в плазме на так называемой квазилинейной стадии неустойчивости. Будем считать ось x направленной вдоль пучка и рассмотрим одномерный случай, что справедливо при наличии достаточно сильного магнитного поля, направленного вдоль оси x . Функцию распределения и напряженность электрического поля можно представить в виде суммы по собственным колебаниям плазмы:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= f_0^0 + \sum_{k, \omega} f_{k, \omega} \exp \{-i\omega_k t + ikx\}; \\ E &= \sum_{k, \omega} E_{k, \omega} \exp \{-i\omega_k t + ikx\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

При решении нелинейной задачи необходимо проводить суммирование по всем собственным гармоникам. Спектр собственных колебаний будем считать непрерывным и там, где это необходимо, будем переходить от суммирования по u к интегрированию. Слабая зависимость функции распределения от координаты x и времени t описывается слагаемым $f_0^0(x, t)$.

Получим уравнение для функции f_0^0 . Для этого подставим выражение для функции распределения в кинетическое уравнение (1.47) и проведем усреднение по быстрым осцилляциям, удержав нелинейный член:

$$\begin{aligned} & \overline{\partial f_0^0 / \partial t} + \overline{v \partial f_0^0 / \partial x} = \\ & = \overline{\sum_{\substack{k, k' \\ \omega, \omega'}} (eE_{k'\omega'} / m) (\partial / \partial v) f_{k\omega} \exp [i(k + k')x - i(\omega_k + \omega'_k)t]}, \end{aligned}$$

где черта означает усреднение по периоду времени, много большему чем $2\pi/\omega_k$, и по расстояниям, много большим длины волны $2\pi/k$. Члены, содержащие первые степени осциллирующих величин, при этом обратятся в нуль. Нелинейный член, стоящий в правой части уравнения, отличен от нуля лишь для $\omega' + \omega = 0$,

$k' + k = 0$ [19]. Выясним, как связана фурье-компонента поля $E_{-k, -\omega}$ с $E_{k, \omega}$. В силу действительности E из формулы (1.62) следует, что $E_{-k} = E_k^*$, так как

$$E = \sum_{k, \omega} E_{k, \omega} \exp \{-i\omega t + ikx\} - \\ = \sum_{k, \omega} E_{-k, -\omega} \exp \{i\omega t - ikx\} = E^* = \sum_{k, \omega} E_{k, \omega}^* \exp \{i\omega t - ikx\}.$$

Следовательно,

$$\partial f_0^0 / \partial t + v \partial f_0^0 / \partial x = (e/m) \sum_{k, \omega} E_{k, \omega}^* \partial f_{k, \omega} / \partial v.$$

Покажем теперь, как получить квазилинейные уравнения, когда с самого начала спектр считается непрерывным и возмущения электрического поля и функции распределения представляются не рядом, а интегралом Фурье. Хотя этот вывод приведет, в сущности, к тем же результатам, его необходимо привести, так как в различных книгах используется разный подход (см., например, [20]) и формально получаются различные результаты.

Выпишем полную систему уравнений, описывающих поведение электронного пучка в плазме. Как уже отмечалось, кинетическое описание более последовательно, поэтому можно описывать электроны плазмы и пучка с помощью одной функции распределения F . Система уравнений становится при этом более компактной:

$$\left. \begin{aligned} \partial F / \partial t + v \partial F / \partial x - (eE/m) \partial F / \partial v &= 0; \\ \partial E / \partial x &= 4\pi e \left(n_0 - \int F dv \right); \\ \int F dv &= n_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Последнее соотношение является обычным условием нормировки, а смысл первых двух уравнений уже подробно обсуждался. Линеаризуя эти уравнения обычным способом, получим для фурье-компонент

$$\left. \begin{aligned} F_k &= i(e/m) E_k (\partial F_0 / \partial v) (\omega - kv)^{-1}; \\ ikE_k &= 4\pi e \int F_k dv. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Здесь F_0 — функция распределения, описывающая электроны пучка и плазмы в равновесном состоянии; другими словами, это начальная функция распределения. Подставляя значения F_k из первого выражения (1.64) во второе, получаем дисперсионное соотношение для плазменных колебаний при кинетическом подходе:

$$k = (4\pi n_0 e^2 / m) \int (1/n_0) (\partial F_0 / \partial v) (\omega - kv)^{-1} dv. \quad (1.65)$$

Согласно правилу Ландау, дисперсионное соотношение можно записать в виде

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k} \mathcal{P} \int \frac{(1/n_0) (\partial f_0 / \partial v)}{\omega - kv} dv - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k} \int \frac{1}{n_0} \frac{\partial F_0}{\partial v} \delta(\omega - kv) dv.$$

Будем считать, как это принято, что функция распределения электронов плазмы по скоростям является максвелловской с температурой T . Тогда, пренебрегая вкладом от электронов пучка в интеграл, взятый в смысле главного значения, можно считать, что при $\omega \approx \omega_{pe} \gg kv$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int \frac{(1/n_0) (\partial F_0 / \partial v)}{\omega - kv} dv &= \int \frac{(1/n_0) (\partial F_0 / \partial v)}{\omega} dv + \\ &+ \int \frac{(1/n_0) (\partial F_0 / \partial v)}{\omega^2} kv dv + \dots \end{aligned}$$

Поскольку F_0 симметрична, первый интеграл обращается в нуль, значение же второго интеграла легко вычислить, если учесть, что при максвелловской функции распределения $\partial F_0 / \partial v = -(mv/T)F_0$. Если провести разложение по $kv/\omega \ll 1$, можно получить дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3T}{m} \frac{k^2}{\omega^2} + \dots \right) - \\ &- i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k} \int \frac{1}{n_0} \frac{\partial F_0}{\partial v} \delta(\omega - kv) dv. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Считая, что мнимые члены в уравнении (1.66) определяются пучком, получим выражения для частоты и инкремента:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 [1 + (3T/m) (k^2/\omega^2)]; \quad (1.67)$$

$$\gamma = (\pi/2) (\omega^3/k^2) \int (1/n_0) (\partial F_0 / \partial v) \delta(\omega - kv) dv. \quad (1.68)$$

Отметим, что выражение (1.67) для частоты ленгмюровских колебаний, полученное при последовательном кинетическом подходе, отличается от выражения (1.33), полученного в гидродинамическом приближении с учетом конечности температуры электронов плазмы. Этот факт является еще одной яркой иллюстрацией обсуждавшихся в § 1.9 различий между гидродинамическим и кинетическим подходами. Зависимость частоты от k , как это следует из формулы

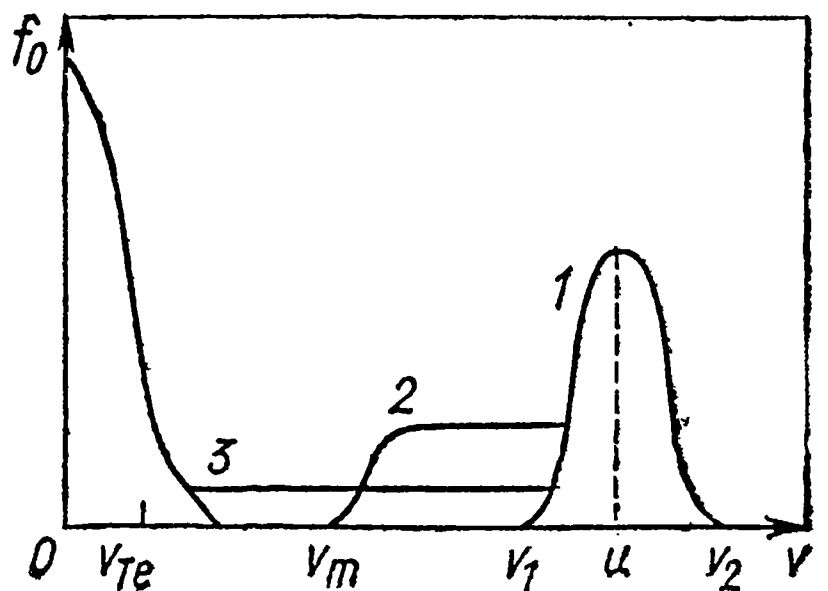


Рис. 6

(1.67), связана с макроскопическими параметрами плазмы. В то же время γ определяется детальной структурой функции распределения. В частности, если начальная функция имеет вид, изображенный на рис. 6 (кривая 1), то можно сказать, что частота определяется основной массой электронов, в то время как инкремент — формой второго максимума при $v = u$. Если считать, что в начальный момент в плазме имеются какие-то шумы (не обязательно тепловые) с амплитудой E_{0k} , то $E_k = E_{0k} \exp(\gamma_k t)$. Однако линейное приближение справедливо до тех пор, пока можно пренебрегать членами типа $F_k \partial F_k / \partial v$ в кинетическом уравнении. Учтем эти члены, разлагая возмущение в интеграл Фурье. Кинетическое уравнение [первое в (1.63)] при этом имеет вид

$$\begin{aligned} \partial f_0^0 / \partial t - i \int f_k \omega \exp(ikx - i\omega t) dk + v \int ikf_k \exp(ikx - i\omega t) dk = \\ = (e/m) \int E_{k'} (\partial f_{k'} / \partial v) \exp[i(k' + k'')x - i(\omega' + \omega'')t] dk' dk'' + \\ + (e/m) \int E_k (\partial f_0^0 / \partial v) \exp(ikx - i\omega t). \end{aligned}$$

Здесь введена функция распределения электронов пучка f согласно соотношению $F = F_p + f$, где F_p — функция распределения электронов плазмы.

Производной $\partial f_0^0 / \partial x$ пренебрегаем, так как рассматриваем пока временную задачу. Чтобы учесть влияние колебаний на функцию распределения, которая теперь уже зависит от t , усредним полученное уравнение по некоторой большой по сравнению с длиной волны величине l_x :

$$\begin{aligned} \overline{(\partial f_0^0 / \partial t)} = (e/m) \times \\ \times \overline{\int E_{k'} (\partial f_{k'} / \partial v) \exp[i(k' + k'')x - i(\omega' + \omega'')t] dk' dk''}. \end{aligned}$$

Проведем явно операцию усреднения. Для этого надо проинтегрировать усредняемое выражение по x и разделить затем полученный результат на l_x . С помощью формулы [21] $\int \exp(i\alpha x) dx = 2\pi \delta(x)$ получим окончательно $\overline{\partial f_0^0 / \partial t} = (e/m) (2\pi / l_x) \times \int E_{-k} (\partial f_k / \partial v) dk$; $E_{-k} = E_k^*$.

Подставляя выражение для f_k в линейном приближении, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \text{Re} \left\{ i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{2\pi}{l_x} |E_k|^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} \right) dk \right\} = \\ = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \pi \frac{\partial}{\partial v} \int |E_k|^2 \frac{2\pi}{l_x} \delta(\omega - kv) \frac{\partial f_0}{\partial v} dk. \end{aligned}$$

Здесь опущен знак усреднения над производной $\partial f_0 / \partial t$, поскольку для медленно меняющейся функции f_0 выполняется соотношение

$\overline{\partial f_0/\partial t} = \partial f_0/\partial t$. Таким образом, квазилинейные уравнения имеют следующий вид:

$$\partial f_0/\partial t = (\partial/\partial v) \int (e^2/m^2) \pi |E_k|^2 (2\pi/l_x) \delta(\omega - kv) dk \partial f_0/\partial v; \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} (1/|E_k|^2) (\partial |E_k|^2/\partial t) &= 2\gamma = \\ &= \pi (\omega^3/k) \int (1/n_0) (\partial f_0/\partial v) \delta(\omega - kv) dv. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Интересно, что при разложении в интеграл Фурье в уравнении появляется дополнительный множитель $2\pi/l_x$, где l_x — вообще говоря, произвольная величина. Если пользоваться определением спектральной плотности энергии ленгмюровских колебаний, эту величину из уравнения можно исключить. Действительно, плотность энергии, заключенной в электрическом поле, есть $E^2/(8\pi)$. Если провести разложение в ряд Фурье, то никаких нормировочных длин при этом не возникнет, так как размерность фурье-компоненты в этом случае совпадет с размерностью самой физической величины. При разложении в интеграл Фурье это уже не так, и для определения спектральной плотности потока энергии в этом случае можно использовать соотношение

$$\begin{aligned} \int (E^2/8\pi) dx &= (1/8\pi) \int E_{k'} \exp(ik'x - i\omega_{k'}t) E_{k''} \times \\ &\times \exp(ik''x - i\omega_{k''}t) dk' dk'' dx = (1/8\pi) \int 2\pi E_{k'} E_{k''} \delta(k' + k'') dk' dk'' = \\ &= \int (2\pi E_k E_{-k}/8\pi) dk. \end{aligned}$$

Таким образом, в однородном случае

$$(E^2/8\pi) l_x = 2\pi \int (|E_k|^2/8\pi) dk,$$

т. е. размерности E и E_k в этом случае не совпадают. Спектральной плотностью энергии в этом случае будет являться величина $W_k = (2\pi/l_x) (|E_k|^2/8\pi)$. Часто квазилинейные уравнения выводят при помощи усреднения по хаотическим фазам колебаний, а не усреднением по пространству. В основе метода усреднения по фазам лежит предположение теории слабой турбулентности в плазме, которое состоит в том, что развившиеся за счет неустойчивости надтепловые колебания имеют хаотически распределенные фазы. Формально это предположение записывается в виде $\langle E_{k''} E_{k'} \rangle = |E_{k'}|^2 (2\pi/l_x) \delta(k' + k'')$. Если усреднение по фазам производится для фурье-компонент поля, полученных при разложении в ряд Фурье, то $\langle E_{k'} E_{k''} \rangle = |E_{k'}|^2 \delta_{k'k''}$, где $\delta_{k'k''}$ — символ Кронекера, который, как нетрудно видеть, связан с δ -функцией Дирака соотношением $\delta_{k'k''} = (2\pi/l_x) \delta(k' - k'')$.

Учтем, что при ленгмюровских колебаниях плотность энергии складывается из двух слагаемых, а именно из плотности энергии

электрического поля $(2\pi/l_x) (|E_k|^2/8\pi)$ и плотности энергии (кинетической) движения электронов в колебаниях $(2\pi/l_x) n_0 m v_k^2/2$. Подставляя сюда значение частоты ленгмюровских колебаний $\omega = \omega_{pe}$ и учитывая, что амплитуда скорости $v_k = eE_k/m\omega$, получаем для спектральной плотности энергии волны

$$W_k = (2\pi/l_x) |E_k|^2/4\pi. \quad (1.71)$$

Обратим внимание на то, что в ленгмюровских колебаниях средняя кинетическая энергия электронов равна потенциальной энергии электрического поля, чего и следовало ожидать для гармонических колебаний. Проведем теперь интегрирование по v в правой части уравнения (1.70) и по k в правой части уравнения (1.69). Тогда окончательный вид квазилинейных уравнений будет:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{4\pi e^2}{m^2} \pi \frac{W_k}{|v|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right); \quad \frac{\partial W}{\partial t} = W \pi \omega_{pe} v^2 \frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (1.72)$$

Спектральная плотность энергии ленгмюровских колебаний W зависит в силу однозначности замены $k = \omega_{pe}/v$ от v , а не от k . Так как нас интересуют волны, распространяющиеся с фазовыми скоростями порядка $u \gg \sqrt{2T/m}$, мы положили в квазилинейных уравнениях $\omega = \omega_{pe}$. Квазилинейные уравнения подробно рассмотрены в работах [20, 22—24], в которых показано, что в стационарном состоянии $\partial f_0/\partial v = 0$. Это непосредственно следует из уравнений (1.72). Для неустойчивой функции распределения, изображенной на рис. 6, это состояние обозначено цифрой 3 и цифрой 2 обозначено промежуточное состояние. Стационарное состояние характеризуется тем, что шумы много больше тепловых, причем их энергию оценивают при помощи следующих простых рассуждений. Функция распределения пучка деформировалась в результате неустойчивости таким образом, что образовалось плато; однако полное число частиц в пучке, безусловно, осталось тем же, т. е. $\int f_0^0 dv = \int f_0 dv$.

Энергия же пучка уменьшилась, так как центр плато в пространстве скоростей находится теперь не в точке u , а в точке $u/2$. Поэтому можно считать, что заметная часть энергии пучка перешла в колебания и плотность энергии шумов в конечном состоянии $W \sim \sim n_0 v m u^2/2$. Если рассматривать время, большее времени столкновения электронов между собой и с другими частицами, то функция распределения перейдет в максвелловскую. Для термоядерных установок и установок с пучками инкремент неустойчивостей на много порядков превышает частоту столкновений. Поэтому не будем пока интересоваться влиянием столкновений на вид функции распределения пучка, т. е. будем считать состояние плато истинно стационарным. Плотности пучка и плазмы обычно различаются на несколько порядков, однако энергия частиц пучка много больше энергии частиц плазмы. Для того чтобы пучок можно было считать возмущением, необходимо все-таки потребовать, чтобы плотность энер-

гии в пучке была примерно на порядок меньше плотности энергии в плазме.

Сравнивая плотность энергии шумов в конечном состоянии $W \sim \sim n_{0b} m u^2 / 2 \sim \alpha n_0 T$ с плотностью энергии тепловых шумов $W_0 \sim \sim n T / N_D$, можно заключить, что при $\alpha \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ W/W_0 велико. Логарифм этого отношения примерно равен кулоновскому логарифму. Подставив $W \partial f_0 / \partial v$ из первого уравнения (1.72) во второе и проинтегрировав результат по времени, получим

$$f_0(t, v) - f_0(0, v) = (\partial / \partial v) \{ (\omega_{pe} / m |v|^3) [W(t, v) - W(0, v)] \}. \quad (1.73)$$

При помощи соотношения (1.73) можно точно найти все важные характеристики конечного состояния: высоту плато в стационарном состоянии и спектр энергии шумов в конечном состоянии $W(\infty, v)$. Вопрос о динамике перехода из состояния 1 в состояние 3 (см. рис. 6) также можно решить аналитически, и так как поведение функции f_0 во времени представляет большой интерес, проведем полное исследование этих уравнений.

§ 1.12. Автомоделные решения

В качестве исходной функции распределения электронов возьмем функцию, изображенную на рис. 6. Скорость пучка u много больше тепловой скорости электронов плазмы v_{Te} . Такая функция распределения скоростей неустойчива, и согласно линейной теории неустойчивость имеет различный характер в двух предельных случаях. Когда пучок плотный и почти моноэнергетический, в плазме нарастают колебания, частота и инкремент которых определяются параметрами всей системы. Если же разброс скоростей в пучке $v_{Tb} \sim |v_1 - v_2|/2$ не слишком мал, а плотность пучка n_{0b} не слишком велика по сравнению с плотностью плазмы n_0 , т. е. $v_{Tb}/u \geq (n_{0b}/n_0)^{1/3}$, то пучок возбуждает ленгмюровские колебания с инкрементом, который определяется поведением функции распределения пучка в окрестности точки $v = u$. Введем в уравнения (1.72) удобные безразмерные переменные и функции следующим образом:

$$f = \pi (n_0/n_{0b}) u f_0/n_{0b}; \quad \omega = \pi W \omega_{pe} / (n_{0b} m v^3);$$

$$\tau = \omega_{pe} (n_{0b}/n_0) t; \quad V = v/u.$$

Уравнения (1.72) и условие сохранения полного числа частиц пучка примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial f / \partial \tau &= (\partial / \partial V) (\omega V^2) \partial f / \partial V; \\ \partial \omega / \partial \tau &= \omega V^2 \partial f / \partial V; \quad (1/\pi) \int f dV = 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

откуда

$$f - f(0) = (\partial / \partial V) (\omega - \omega_0). \quad (1.75)$$

Здесь $f(0)$ и ω_0 — функция распределения и спектральная плотность энергии шумов ω в начальный момент, т. е. $f(0) = f(0, v)$, $\omega_0 = \omega(0, v)$. С помощью соотношения (1.75) можно исключить f из первого уравнения (1.74) и получить уравнение, содержащее только $\omega(v, \tau)$, $f(0)$ и ω_0 :

$$\partial\omega/\partial\tau = V^2\omega\partial^2(\omega - \omega_0)/\partial V^2 + V^2\omega\partial f_0/\partial V, \quad (1.76a)$$

или

$$\begin{aligned} \partial(\omega - \omega_0)/\partial\tau = & V^2(\omega - \omega_0)\partial^2(\omega - \omega_0)/\partial V^2 + \\ & + \omega_0 V^2\partial^2(\omega - \omega_0)/\partial V^2 + V^2\omega\partial f(0)/\partial V. \end{aligned} \quad (1.76b)$$

Уравнение (1.76б) в области $\partial f(0)/\partial V = 0$ (см. рис. 6, кривая 2), т. е. там, где в начальный момент электроны отсутствовали, отдаленно напоминает уравнение, описывающее распространение тепла, когда коэффициент теплопроводности есть степенная функция количества тепла. Как известно, в этом случае тепло распространяется в виде волны с крутым фронтом [25]. При некотором виде граничных и начальных условий для уравнения удастся получить автомодельные решения. Попытаемся найти автомодельное решение нашей задачи. Будем рассматривать моменты, в которые функция распределения пучка расширилась в сторону меньших значений V (вплоть до $V = V_m$), причем

$$v_{Tb}/u \ll 1 - V_m \ll 1. \quad (1.77)$$

Начальная стадия процесса квазилинейной релаксации, приводящая к сглаживанию функции распределения пучка, конечно, зависит от начального вида $f(0)$. Однако можно надеяться, что в следующей фазе процесса, когда выполняется левое неравенство (1.77), детальный вид начальной функции распределения электронов пучка уже не влияет на решение, аналогично тому как закон распространения тепловой волны при достаточном удалении от области взрыва определяется лишь количеством тепла, выделившимся при взрыве.

При выполнении правого неравенства (1.77) можно заменить в уравнении (1.76б) V^2 на единицу, а $\omega_0(V)$ на $\omega_0(1)$. В области $V_m < V < V_1$ [V_1 — точка, где $f(0)$ пренебрежимо мала] уравнения (1.75) и (1.76б) явно от $f(0)$ не зависят. При этом из условия сохранения числа частиц пучка следует, что

$$\int_{V_1}^{V_m} \omega(\tau, 1) - \omega_0(1) = - \int_{V_1}^{V_m} f dV = - \int_{V_1}^{V_1} f(0) dV = \pi. \quad (1.78)$$

Последнее равенство является приближенным. Оно справедливо с точностью до членов порядка $(1 - V_1)/(1 - V_m)$, и в основе его лежит предположение, что процесс квазилинейной релаксации приводит к сглаживанию функции распределения. Введем в уравнения (1.75), (1.76б) и в граничное условие (1.78) новые автомодельные переменные:

$$\xi = (1 - V)/\sqrt{\pi\tau}; \quad \varphi = (\omega - \omega_0)/\pi. \quad (1.79)$$

В этой замене отражена сущность автомодельности. С физической точки зрения автомодельное движение подобно самому себе, так как различные значения скорости и времени могут соответствовать одному и тому же значению автомодельной переменной ξ и, следовательно, одному и тому же значению φ . Уравнения (1.75) и (1.76б) при этом примут вид [27]

$$f = -\sqrt{\pi/\tau} \dot{\varphi}; \quad -(1/2)\xi\dot{\varphi} = (\varphi + \varphi_0)\ddot{\varphi}, \quad (1.80)$$

где точка обозначает дифференцирование по ξ , а $\varphi_0 = \omega_0(1)/\pi$. Так как функция распределения электронов пучка по скоростям f по определению положительна, то согласно первому уравнению (1.80) физический смысл имеют лишь те решения второго уравнения, для которых $\dot{\varphi}(\xi) \leq 0$ при всех значениях ξ . Граничное условие (1.78) при автомодельной замене записывается в виде $\varphi(0) = 1$, а граничное условие при $\xi = \infty$ — в виде $\varphi(\infty) = 0$, так как перед фронтом распространяющейся волны шумы те же, что начальные. Таким образом, для нахождения функции распределения в любой момент необходимо найти решение уравнения (1.80) с указанными граничными условиями, у которого $\dot{\varphi}(\xi) = 0$.

Уравнение $\ddot{\varphi} = g(\xi, \varphi, \dot{\varphi})$ имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условию $\varphi(0) = 1$ и существующее для всех значений $\xi \geq 0$, причем каждая интегральная кривая имеет горизонтальную асимптоту, если выполнены следующие граничные условия [26]: 1) при всех допустимых значениях $\xi, \varphi, \dot{\varphi}$ функция $g(\xi, \varphi, \dot{\varphi})$ непрерывна и неотрицательна; 2) $g(\xi, 0, 0) = 0$ ($\varphi = 0$ является, следовательно, решением уравнения); 3) $g(\xi, 0, \dot{\varphi})$ — монотонная функция ξ . Если, кроме того, g монотонно возрастает при увеличении ξ , то существует только одно решение. Наконец, если из существования интеграла $\int_0^{\infty} g[\xi, \varphi(\xi), \dot{\varphi}(\xi)]d\xi$ для каждой функции $\varphi(\xi)$, имеющей при $\xi \geq 0$ отрицательную производную, следует, что $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = 0$, то через точку $\xi = 0, \varphi = 1$ проходит единственная интегральная кривая, имеющая асимптоту $\varphi = 0$. Так как нас интересуют решения, у которых $\dot{\varphi} \leq 0$, а $g = -(1/2)\xi\dot{\varphi}/(\varphi + \varphi_0)$, то все условия, кроме последнего, выполняются автоматически. Для существования же интеграла необходимо, чтобы при $\xi \rightarrow \infty$ $g[\xi, \varphi(\xi), \dot{\varphi}(\xi)]$ стремилась к нулю, как $1/\xi^{1+\delta}$, где $\delta > 0$. Следовательно, при $\xi \rightarrow \infty$ $\dot{\varphi}/(\varphi + \varphi_0) \sim 1/\xi^{2+\delta}$, а $\varphi \sim 1/\xi^{1+\delta}$, т. е. последнее условие также выполняется.

Таким образом, $\varphi(\xi)$ должна быть монотонно невозрастающей функцией ξ , асимптотически обращающейся в нуль при $\xi \rightarrow \infty$. К сожалению, решение второго уравнения (1.80) не удастся записать в квадратурах, и его, вообще говоря, следует решать численно. Проще всего это сделать следующим образом. Пусть $\varphi = \varphi_0 = \chi$. Тогда вместо второго уравнения (1.80) получим

$$-(1/2) \xi \dot{\chi} = \chi \ddot{\chi} \quad (1.81)$$

с граничными условиями $\chi(0) = 1 + \varphi_0$, $\chi(\infty) = \varphi_0$ и дополнительным требованием $\chi \leq 0$. Полученное уравнение будем решать численно для $\varphi_0 \ll 1$, так как начальные шумы много меньше конечных.

Зададим приближенно $\dot{\chi}(0) = 1$ и некоторый, вообще говоря, произвольный наклон $\chi(0) < 0$.

Решим численно уравнение (1.81). Граничное значение $\dot{\chi}(0) < 0$ варьируется таким образом, чтобы при всех значениях $0 \leq \xi \leq \infty$ производная $\dot{\chi}$ была неположительная, а при $\xi \rightarrow \infty$ функция χ стремилась к $\varphi_0 \ll \ll 1$. Так как решение существует и оно единственно, такое граничное значение для $\dot{\chi}(0) < 0$ всегда можно подобрать. Вычитая из полученной функции найденную константу φ_0 ,

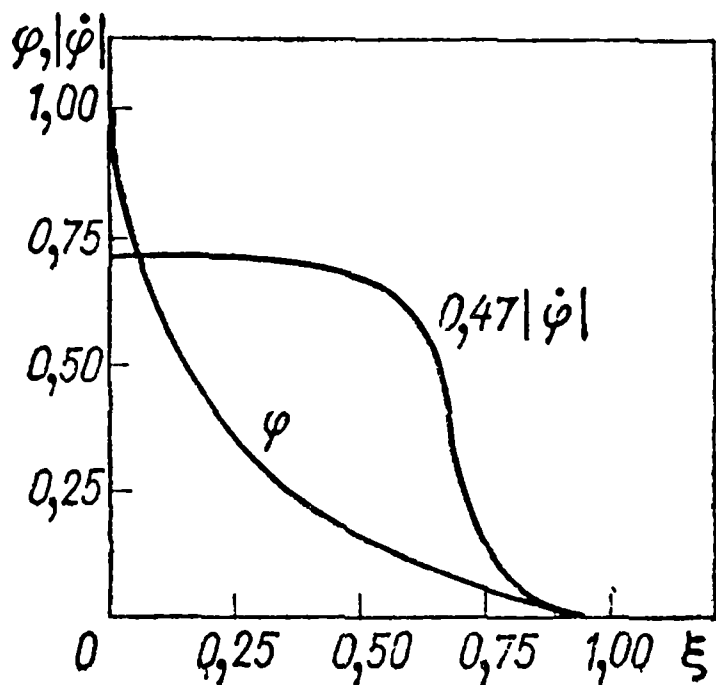


Рис. 7

получаем функцию $\varphi(\xi)$ — решение второго уравнения (1.80) для $\varphi_0 < 1$. Пусть требуется решить теперь второе уравнение (1.80) с заданным φ_0 . Тогда следует при некотором значении $\xi = \xi_1$ задать $\varphi(\xi_1) \approx \varphi_0$ и подобрать $\dot{\varphi}(\xi) < 0$ так, чтобы при заданных $\varphi(\xi_1)$ и $\dot{\varphi}(\xi_1)$ интегральная кривая попала в точку $\varphi(0) = 1$. Далее следует взять $\xi_2 > \xi_1$, $\varphi(\xi_2) < \varphi(\xi_1)$ и подобрать производную $\dot{\varphi}(\xi_2) < 0$ так, чтобы интегральная кривая опять попала в ту же точку $\varphi(0) = 1$ и т. д. На рис. 7 изображены функции φ и $|\dot{\varphi}|$; таким способом получено $\varphi_0 \approx 1/130$.

В этой области ξ , где $\ln(\varphi/\varphi_0) \gg 1$, можно написать приближенное аналитическое решение второго уравнения (1.80). Убедимся непосредственной проверкой, что решением будет функция

$$\varphi(\xi) = (1/2) \xi_0 (\xi_0 - \xi) \ln(\varphi/\varphi_0) + (1/2) (\xi_0 - \xi) - (1/2) (\xi_0 - \xi)^2. \quad (1.82)$$

Действительно, дифференцируя $\varphi(\xi)$, получим

$$\dot{\varphi}(\xi) = - (1/2) \xi_0 \ln(\varphi/\varphi_0) + (1/2) \xi_0 (\xi_0 - \xi) \dot{\varphi}/\varphi - 1/2 + (1/2) (\xi_0 - \xi).$$

Далее, деля $\dot{\varphi}$ на функцию φ_1 , определенную равенством (1.82), находим с точностью до малых величин порядка $[\ln(\varphi/\varphi_0)]^{-1}$, что $\varphi/\dot{\varphi} = 1/(\xi - \xi_0)$. Поэтому $\dot{\varphi} = - (1/2) \xi_0 \ln(\varphi/\varphi_0) - (1/2) (1 + \xi)$. Аналогично находим вторую производную: $\ddot{\varphi} \approx (1/2) \xi/(\xi - \xi_0)$.

При проверке решения (1.82) во второе уравнение (1.80) можно подставлять $\varphi(\xi)$ и $\dot{\varphi}(\xi)$ без малых членов. Наконец, так как при большом отношении φ/φ_0 , $\ln(\varphi/\varphi_0)$ есть слабо меняющаяся функция, с «логарифмической точностью» получим [27]

$$\varphi = (1/2) \xi_0 (\xi_0 - \xi) \ln(1/\varphi_0). \quad (1.83)$$

Константа ξ с логарифмической точностью определяет «координату» фронта волны. Ее можно найти из граничного условия $\varphi(0) = 1$:

$$\xi_0 = \sqrt{2} / \sqrt{\ln(1/\varphi_0)}. \quad (1.84)$$

Так как формула (1.84) справедлива при $\ln(\varphi/\varphi_0) \gg 1$, она не описывает передней части фронта, где $\varphi \approx \varphi_0$. Приближенную формулу передней части фронта можно найти, положив в левой части второго уравнения (1.80) $\xi = \xi_0$. Решение такого упрощенного уравнения справедливо при $(\xi - \xi_0) \ll 1$. Проинтегрировав получившееся уравнение по ξ , получим

$$\dot{\varphi} = - (1/2) \xi \ln(1 + \varphi/\varphi_0), \quad (1.85)$$

откуда

$$\xi = \xi_0 = - \frac{2}{\xi_0} \int_{q\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\ln(1 + \varphi/\varphi_0)} = \frac{2}{\xi_0} \varphi_0 \left[\text{li} \left(1 + \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) - \text{li} (1 + q) \right], \quad (1.86)$$

где li — интегральный логарифм. Предполагается, что при $\xi = \xi_0$ $\varphi = q\varphi_0 \ll \varphi$. Разлагая $\ln(1 + \varphi/\varphi_0)$ по $\varphi/\varphi_0 \ll 1$, получаем для передней части фронта

$$\varphi = q\varphi_0 \exp \left\{ - (\xi_0/2\varphi_0) (\xi - \xi_0) \right\}.$$

Найдем время, за которое происходит квазилинейная релаксация пучка в интервале скоростей Δv . Оно равно времени, за которое фронт волны пройдет в пространстве скоростей расстояние Δv . Из формулы (1.84) имеем [28] $\tau = (1/\pi)(\Delta v/v)^2(1/\xi_0)^2$, т. е.

$$t = (1/\gamma) \ln(1/\varphi_0)/2, \quad (1.87)$$

где $\gamma = \pi\omega_{pe} (n_{ob}/n_0) (u/\Delta v)^2$.

Реально для пучков отношение $1/\varphi_0$, примерно равное отношению спектральных плотностей энергии конечных и начальных шумов,

очень велико (порядка кулоновского логарифма Λ). Последний же в типичных для эксперимента условиях равен примерно 20. Полученные результаты можно просто и наглядно объяснить. За время $1/\gamma$ фронт волны проходит путь в пространстве скоростей, примерно равный $\Delta v/\ln(1/\varphi_0)$. За фронтом волны, где шумы уже почти такие же, как конечные, за то же время $1/\gamma$ происходит образование плато. Если бы уровень шумов перед фронтом был равен нулю, то «волна» стояла бы на месте и фронт ее был бы бесконечно крутым, т. е. функция имела бы вид ступеньки. В действительности крутизна фронта велика, но конечна из-за того, что волна движется довольно медленно в масштабе времени $1/\gamma$.

§ 1.13. Обобщение автомодельных решений

Пусть исходной функцией распределения будет функция, изображенная на рис. 8, т. е. в плазме по-прежнему имеется пучок,

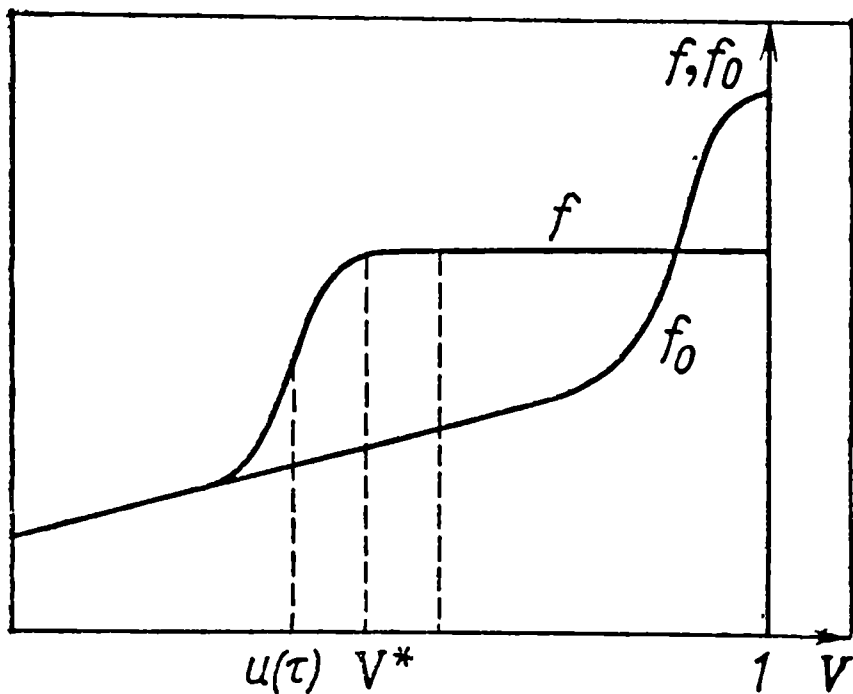


Рис. 8

движущийся со средней скоростью $V = 1$, однако теперь $\varphi(0) = 0$ во всем интервале скоростей.

Можно ожидать, что решение уравнений (1.74) должно описывать волну, фронт которой движется в пространстве скоростей с некоторой скоростью $u(\tau)$, где точка означает дифференцирование по времени. При этом f и ω зависят от независимых переменных V и τ следующим образом:

$$f(V, \tau) = f\{V - u(\tau), \tau\} \equiv f(\eta, \tau); \quad \omega(V, \tau) = \omega\{V - u(\tau), \tau\} \equiv \omega(\eta, \tau).$$

На основании результатов предыдущего параграфа можно заключить, что ширина фронта волны η_1 мала по сравнению с расстоянием, пройденным волной в пространстве скоростей $1 - u$. На расстоянии η_1 функция распределения f быстро увеличивается от начального значения $f(0)$ до $f(V^*, \tau)$ (см. рис. 8), которое определено ниже, а затем почти не меняется. По мере продвижения волны высота плато $f(V^*, \tau)$ и форма фронта волны меняются, но эти изменения происходят за время порядка τ . Поэтому можно считать, что на фронте волны выполняются условия

$$|\partial f/\partial \tau| \ll |u \partial f/\partial \eta| \quad \text{и} \quad |\partial \omega/\partial \tau| \ll |u \partial \omega/\partial \eta|.$$

Таким образом, в области фронта волны второе уравнение (1.74) можно упростить и записать в виде

$$-(\partial\omega/\partial\eta) \dot{u}(\tau) = \omega u^2(\tau) \partial f/\partial\eta. \quad (1.88)$$

Проинтегрировав его один раз, получим

$$f(\eta, \tau) - f(0, 0) = - \left[\dot{u}(\tau)/u^2(\tau) \right] \ln [\omega(\eta, \tau)/\omega(0, \tau)]. \quad (1.89)$$

Считается, что при $V = u(\tau)$, $\eta = 0$ функция распределения равна начальной, а $\omega(0, \tau)$ определяется уровнем шумов в точке u в момент прихода туда фронта волны. Следует подчеркнуть, что если линейный инкремент в этой точке отличен от нуля, то $\omega(0, \tau)$ нужно вычислять по формулам линейной теории, так как по определению $\omega(0, \tau)$ берется в точке, где функция распределения f равна начальной $f(0, 0)$ и квазилинейные эффекты еще не существенны. Уравнение (1.75) в переменных η записывается в виде

$$f(\eta, \tau) - f(\eta, 0) = \partial [\omega - \omega_0(\eta)]/\partial\eta. \quad (1.90)$$

В области фронта с принятой нами точностью можно заменить в этой формуле $f(0, \eta)$ на $f(0, 0)$ [см. уравнение (1.89)], так как $f(0, \eta) - f(0, 0) \sim \eta \partial f(\eta, 0)/\partial\eta$, и пренебречь $\partial\omega_0(\eta)/\partial\eta$ по сравнению с $\partial\omega(\eta)/\partial\eta$. Затем, подставляя выражение (1.89) для $f(\eta, \tau)$ в формулу (1.90), получаем

$$\partial\omega/\partial\eta = - \left[\dot{u}(\tau)/u^2(\tau) \right] \ln [\omega(\eta)/\omega(0)]. \quad (1.91)$$

Интеграл последнего уравнения имеет вид

$$\eta = \left[\dot{u}(\tau)/u^2(\tau) \right] \omega(0) [\text{li}(\omega(\eta)/\omega(0)) - \text{li}(1 + q)]. \quad (1.92)$$

Считается, что при $V = u$, $\omega(1 + q) \approx \omega(0) q \ll 1$. Закон, по которому $\omega(\eta)$ стремится к $\omega(0)$, можно легко установить, разлагая функцию $\ln[\omega(\eta)/\omega(0)]$ в ряд в предположении, что $[\omega(\eta) - \omega(0)]/\omega(0) \ll \ll 1$. После этого, интегрируя выражение (1.91), получаем

$$\omega(\eta) - \omega(0) = q\omega(0) \exp \left\{ - \eta \dot{u}(\tau)/u^2(\tau) \omega(0) \right\}.$$

Таким образом, $\omega(\eta)$ стремится к $\omega(0)$ очень быстро, так как $\omega(0)$ по условию мала.

В области значений η , где $\ln[\omega(\eta)/\omega(0)] \approx A \gg 1$, решение уравнения (1.91) с логарифмической точностью можно записать следующим образом:

$$\omega = - \left[\dot{u}(\tau)/u^2 \right] \eta \ln \left\{ - \eta \left[\dot{u}(\tau)/u^2(\tau) \right] A \right\}. \quad (1.93)$$

Закон изменения функции распределения на фронте волны с той же точностью имеет вид

$$f(\eta, \tau) = f(\eta, 0) - \left[\dot{u}(\tau)/u^2 \right] \ln \left[- \eta \left(\dot{u}/u^2 \right) A \right]. \quad (1.94)$$

Таким образом, функция $f(\eta, \tau) - f(\eta, 0)$ имеет вид почти сту-

пеньки — при больших значениях A она представляет собой плато, а в самой передней части фронта равна нулю.

Определим решения справа от точки сшивки $V = V^*$ (см. рис. 8). Здесь в первом приближении можно считать, что функция распределения электронов по скоростям представляет собой плато, высота которого зависит от времени, т.е. $f = c(\tau)$. Для следующего приближения воспользуемся первым уравнением (1.74). Подставив в него $f = c(\tau) + \delta f$, получим

$$\delta f = \dot{c} \int_{\dot{V}}^1 (1 - \dot{V}) d\dot{V} / \dot{V}^2 \omega(\dot{V}). \quad (1.95)$$

Если в подынтегральном выражении $\omega(\dot{V})$ заменить на $\omega(V^*)$, где V^* — точка, в которой сшиваются два решения, а V заменить на u , то δf только увеличится. Можно найти область значений V , в которой выполняется неравенство $|\delta f| \ll c(\tau)$:

$$c \gg \delta f \sim |\dot{c}| |1 - u(\tau)|^2 / [2u^2(\tau) \omega(V^*)].$$

Высоту плато $\dot{c}(\tau)$ можно связать с координатой фронта волны $u(\tau)$. Так как фронт волны по предположению узкий по сравнению с $1 - u(\tau)$, закон сохранения числа частиц можно записать в виде $|1 - u(\tau)| c(\tau) = \int_{u(\tau)}^1 f_0 dV$, откуда следует, что $\dot{c}/c \sim \dot{u}(\tau)/[1 - u(\tau)]$, так как $f(u, 0) \ll c$.

Выражая в условии $\delta f \ll c$ высоту плато через u и подставляя $\omega(V^*)$ из формулы (1.93), получаем

$$[1 - u(\tau)] / \ln [\omega(V^*) / \omega(u)] \ll \eta = V - u. \quad (1.96)$$

С логарифмической точностью в условии (1.96) можно заменить $\ln[\omega(V^*) / \omega(u)]$ на $\ln[\omega(1) / \omega(u)] \approx A \approx \Lambda$. Таким образом, $f = c(\tau)$ для всех значений $\eta = V - u$, удовлетворяющих условию (1.96). Так как $\Lambda \gg 1$, из выражения для функции распределения на фронте (1.94) следует, что существует область значений η , для которых условие (1.96) и условие узости фронта могут выполняться одновременно (см. рис. 8).

Сошьем функцию распределения в какой-либо точке $V = V^*$ этой области. Так как $\omega(V^*) \gg \omega(u)$, то

$$f(V^*, \tau) = f(V^*, 0) + \partial \omega / \partial \eta = [1 / (1 - u)] \int_u^1 f(0, 0) dV.$$

Это уравнение можно упростить, положив $f(V^*, 0) = f(u)$:

$$- [\dot{u}(\tau)/u^2(\tau)] \ln [\omega(1)/\omega(u)] + f(u, 0) = [1/(1-u)] \int_u^1 f(V, 0) dV. \quad (1.97)$$

Решим его, когда $f(V, 0) = \pi\delta(V-1)$. В этом случае

$$- [\dot{u}(\tau)/u^2(\tau)] \Lambda = \pi/(1-u). \quad (1.98a)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$1/u(\tau) + \ln u(\tau) - 1 = \pi\tau/\Lambda. \quad (1.98b)$$

Здесь отсчет времени ведется таким образом, что при $\tau = 0$ полученное решение является более общим по отношению к автомодельному, так как ограничение $1 - V \ll 1$ теперь отсутствует. Разложив выражение в левой части равенства по $1 - u \ll u$, получим уже известный нам закон движения [см. (1.87)] $(1 - u)/\sqrt{\tau} = \sqrt{2}/\Lambda$. В другом предельном случае ($u \ll 1$) получим

$$\tau u = \text{const}. \quad (1.99)$$

Вернемся к неравенствам, которые должны выполняться на фронте волны:

$$| \partial f / \partial \tau | \ll | \dot{u} \partial f / \partial \eta | \text{ и } | \partial \omega / \partial \tau | < | \dot{u} \partial \omega / \partial \eta |.$$

Так как $\dot{u} \sim [1 - u^2(\tau)] \dot{c}/c \sim (1 - u)/\tau$ [например, для $f_0 = \pi\delta(V - 1)$ $\dot{u} = -(1/2)(1 - u)/\tau$], эти неравенства сводятся к условию узости фронта $\eta \ll 1 - u$ и не накладывают дополнительных ограничений.

Результаты, полученные в этом параграфе, справедливы, лишь когда в каждый момент $\ln[\omega(1)/\omega(u)] \gg 1$, где $\omega(u) = \omega_0^0 \exp[\gamma_0(u)\tau]$. Здесь $\omega(1)$ и ω_0^0 определяются энергией шумов в конечном и начальном состояниях, а $\gamma_0(u)$ — инкремент, вычисленный по начальной функции распределения. Это условие заведомо не выполняется, если начальная функция распределения такова, что γ_0 во всей области одинаков. В этом случае релаксация произойдет за время $1/\gamma_0$ после того, как энергия шумов возрастет до уровня, близкого к конечному. Такой случай рассмотрен в работе [25].

Если исключить из рассмотрения этот частный случай, то энергия шумов прежде всего возрастет в окрестности точки $V = 1$ (рис. 9), где линейный инкремент максимален. Таким образом, возникнет ситуация, когда в неко-

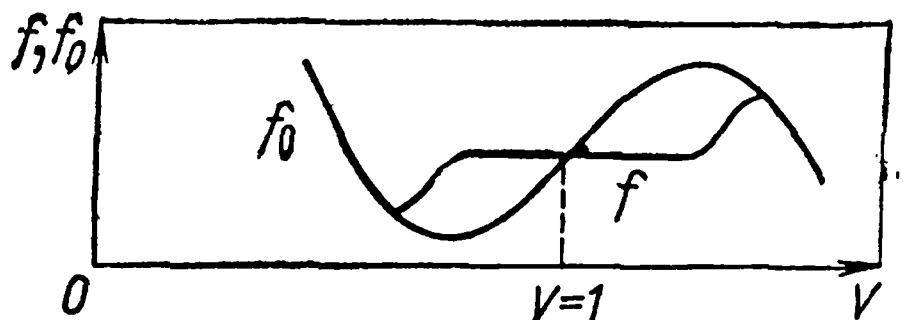


Рис. 9

торой области значений V шумы велики по сравнению с шумами в других областях.

§ 1.14. Пределы применимости одномерной автомодельной теории

Функция распределения при не очень малом n_{ob}/n_0 имеет на фронте очень большие производные $\partial f/\partial V$ и, следовательно, инкремент, определяемый формулой (1.72), велик и формально может стать даже больше ω_{pe} . В действительности, как показано ранее, это приводит к тому, что нарушается локальность взаимодействия в пространстве скоростей и пучок можно описывать в гидродинамическом приближении. Инкремент при этом, естественно, оказывается меньше плазменной частоты ω_{pe} , однако детальная структура функции распределения пучка влияет на характер нарастания колебаний во времени уже значительно слабее. Запишем дисперсионное соотношение для пучковой неустойчивости в виде

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\omega_{be}^2}{n_{ob}} \int \frac{\partial f/\partial v}{\omega - kv} dv. \quad (1.100a)$$

Полагая, как обычно, $\omega = \text{Re}\omega + i\gamma$, $\gamma \ll \omega$, получим следующее выражение для γ :

$$\frac{2\gamma}{\text{Re}\omega} = \gamma \frac{\omega_{be}^2}{kn_{ob}} \int \frac{\partial f/\partial v}{(\text{Re}\omega - kv)^2 + \gamma^2} dv. \quad (1.100б)$$

При достаточно плавной функции f в окрестности γ/k точки $v = (\text{Re}\omega)/k$ производную $\partial f/\partial v$ можно вынести за знак интеграла, оставшийся интеграл равен $n_{ob}\pi/\gamma |k|$. В этом случае локальность имеет место, и можно пользоваться выражением (1.72) для инкремента. Указанная аппроксимация интеграла, стоящего в правой части дисперсионного соотношения (1.100б), справедлива, если

$$(\partial^2 f/\partial v^2) (\gamma/k) \ll \partial f/\partial v. \quad (1.101)$$

Подставляя в это условие выражение для γ , использованное в формуле (1.72), получаем

$$V^3 (n_{ob}/n_0) \partial^2 f/\partial v^2 \ll 1, \quad \text{или} \quad (\partial^2 f/\partial v^2) n_{ob}/n_0 \ll 1, \quad (1.102)$$

так как $V \approx 1$. Здесь $V = v/u$, $f = (\pi u/n_{ob}) f_0$.

Эта локальная связь нарушается, если в окрестности точки $v_m = \text{Re}\omega/kv_0$ на длине γ/k в пространстве скоростей функция $\partial f_0/\partial v$ изменяется существенно на величину порядка этой функции. В этом случае в интеграл в уравнении (1.100а) дают вклад все частицы со скоростями $(v - v_m) < \gamma/kv_0$. Если функция распределения пучка представляет собой ступеньку, изображенную на рис. 6, то

$$\partial f_0 / \partial v = n_{0b} [\delta(v - v_m) - \delta(v - u)] / (u - v_m),$$

откуда

$$\frac{2\gamma}{\omega_{pe}} = \gamma \omega_{pe}^2 \frac{k(u + v_m) - 2\omega_{pe}}{[(\omega_{pe} - kv_m)^2 + \gamma^2][(\omega_{pe} - ku)^2 + \gamma^2]},$$

т. е. при $u - v_m \gg \gamma/k$ инкремент для $k = \omega_{pe}/v_m$ максимален и равен

$$\gamma = \sqrt{\frac{n_{0b}}{n_0} \frac{v_m}{2(u - v_m)}} \omega_{pe}. \quad (1.103)$$

Если же $v - v_m \ll \gamma/kv_0$, что, как нетрудно видеть, эквивалентно неравенству $(u - v_m)/v_m \ll (n_{0b}/n_0)^{1/3}$, то максимальный инкремент больше и по порядку равен $\omega_{pe} (n_{0b}/n_0)^{1/3}$.

Полученное для инкремента выражение (1.103) справедливо, если ширина переходной области ступеньки $\delta(v) < \gamma/k$, т. е. если

$$\frac{\delta v}{v_m} \ll \sqrt{\frac{n_{0b}}{n_0} \frac{v_m}{2(u - v_m)}}.$$

Неустойчивость с инкрементом (1.103) является гидродинамической. Применять результаты квазилинейной теории к гидродинамическим неустойчивостям вряд ли оправдано.

Вследствие обнаруженного эффекта «гидродинамическая» стадия возбуждения колебаний пучком может быть существенной на всех этапах релаксации. Процесс релаксации описывается квазилинейными уравнениями от начала до конца, строго говоря, лишь для пучков с малой плотностью, когда даже в области максимального инкремента справедлива локальная связь $k = \omega/v$. Подставляя в неравенство (1.102) $f = -\sqrt{\pi/\tau} \dot{\varphi}$ и учитывая, что производные на фронте волны связаны соотношением $-(1/2)\xi \dot{\varphi} = |\varphi + \varphi_0| \ddot{\varphi}$, получаем, что $|\ddot{\varphi}|$ имеет максимум при $\varphi \approx \varphi_0$, а условие применимости квазилинейного подхода, связывающее энергию частиц пучка и начальную плотность энергии шумов, имеет вид

$$\varphi_0 \left(\ln \frac{1}{\varphi_0} \right)^3 \geq \sqrt{\frac{n_{0b}}{n_0} \frac{1}{[1 - u(\tau)]^3}}. \quad (1.104)$$

Качественная картина процесса квазилинейной релаксации, по-видимому, существенно не меняется и в случае более плотных пучков. Максимальную скорость нарастания в случае достаточно плотных пучков можно оценить, приняв для инкремента максимальное значение (1.103), что соответствует функции распределения пучка в виде ступеньки. При этом, в отличие от случая локальной связи, энергия шумов с волновым вектором k начинает нарастать, когда фронт волны, движущейся со скоростью v_m , доходит до точки $v = \omega_{pe}/k + \gamma/k$,

и прекращает свой рост, когда волна смещается на расстояние $\delta v \approx 2\gamma/k$. Энергия шумов на этой длине увеличится в следующее число раз:

$$\exp\{-2\gamma\delta v/\dot{v}_m\} \approx \exp\{-4\gamma^2/k\dot{v}_m\} \approx \exp\{-2/[\dot{u}(\tau)[1-u(\tau)]]\}.$$

С другой стороны, если считать, что энергия шумов выросла в $\omega(1)/\omega[u(\tau)] \approx 1/\varphi_0$ раз, и воспользоваться только что полученным выражением, то скорость движения фронта волны в пространстве скоростей окажется примерно равной найденной раньше.

§ 1.15. Стационарная инжекция пучка электронов в плазму

Наблюдение временного процесса релаксации пучка электронов затруднено, поскольку время релаксации весьма мало. Как правило, оно меньше времени пролета электронами пучка длины установки [28]. Эксперименту больше соответствует другая постановка задачи, когда исследуются установившаяся функция распределения электронов и шумы, возникающие при стационарной нормальной к границе раздела инжекции пучка в занятое плазмой полупространство. Начальная стационарная фаза этого процесса рассмотрена в работе [29]. Нас интересует уже установившийся режим. Будем отсчитывать координату x от границы в глубь плазмы. При $x = 0$ функция распределения электронов по скоростям имеет вид, изображенный на рис. 6 ($x = 0$ соответствует $t = 0$ во временной задаче). Состояние системы плазма — пучок, возникающее при стационарной инжекции, описывается уравнениями, которые получаются из системы уравнений (1.72), если заменить в них производные по времени производными по координате x следующим образом: $\partial f/\partial t$ на $v\partial f/\partial x$, а $\partial W_k/\partial t$ на $(\partial\omega/\partial k)(\partial W_k/\partial x)$ [24]. В результате получим

$$v\partial f_0/\partial x = (\pi\omega_{pe}^2/n_0m) (\partial/\partial v) \left\{ \int W_k \delta(\omega - kv) dk \partial f_0/\partial v \right\}; \quad (1.105)$$

$$(\partial\omega/\partial k) (\partial W_k/\partial x) =$$

$$= \pi (\omega_{pe}^3/k) W_k \int (1/n_{0b}) (\partial f_0/\partial v) \delta(\omega - kv) dv; \quad \int f_0 dv = n_{0b}. \quad (1.106)$$

Левые части первых уравнений описывают вынос частиц и шумов со скоростями v и $v_{gr} = \partial\omega/\partial k$ вдоль оси x . Делая замену переменных, как в § 1.10, и вводя вместо времени безразмерную координату $\bar{x} = (x/u) \omega_{pe} n_{0b}/n_0$, получаем систему уравнений, аналогичную (1.74):

$$\left. \begin{aligned} V\partial f/\partial x &= (\partial/\partial V) (\omega V^2 \partial f/\partial V); \\ (v_{gr}/u) (\partial\omega/\partial \bar{x}) &= \omega V^2 \partial f/\partial V; \\ (1/\pi) \int f dV &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.107)$$

т. е.

$$[f(V, \bar{x}) - f(V, 0)] V = (\partial/\partial V) [(v_{\text{гр}}/u) \omega(V, x) - \omega(V, 0)]. \quad (1.108)$$

Групповая скорость вычисляется в точке $k = \omega/V$, поэтому сама является функцией V . Считается, что $v_{\text{гр}}$ определяется свойствами плазмы как целого и не зависит от координаты \bar{x} . Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{гр}}}{u} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} = V^2 \omega \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{v_{\text{гр}}}{u} (\omega - \omega(V, 0)) \right] \right\} + \\ + V^2 \omega \frac{\partial f_0}{\partial V}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Если же соотношение (1.108) проинтегрировать по скорости от $V = 0$ до $V = \infty$, получится закон сохранения частиц, пересекающих плоскость, которая перпендикулярна оси x :

$$\int f(V, 0) V dV = \int f(V, \bar{x}) V dV.$$

Так как $f(V, 0)$ — функция с резко выраженным максимумом вблизи $V = 1$ (почти δ -функция), то $\int f(V, 0) V dV = \pi$. С другой стороны, в области $V_m < V < V_1$ при $\bar{x} > 0$, $f(V, 0) = 0$ (см. рис. 6, с учетом того, что $V = v/u$). Поэтому соотношение (1.108) в этой области принимает вид

$$V f(V, \bar{x}) = (\partial/\partial V) \{ (v_{\text{гр}}/u) [\omega(V, \bar{x}) - \omega(V, 0)] \}. \quad (1.110)$$

Интегрируя его по скорости от $V = V_m$ до $V = V_1$, получаем вместо граничного условия (1.78) соотношение

$$\omega(1, \bar{x}) - \omega(1, 0) = \pi u / v_{\text{гр}}(1). \quad (1.111)$$

В области $1 - V_1 \ll 1 - V \ll 1$ можно ввести автомодельные переменные следующим образом:

$$\alpha = \frac{v_{\text{гр}}}{u} \frac{\omega(V, x) - \omega(V, 0)}{\pi}; \quad \alpha_0 = \frac{v_{\text{гр}}}{u} \frac{\omega(1, 0)}{\pi};$$

$$\xi = \frac{1 - V^2}{2 \sqrt{\bar{x} \pi \omega / v_{\text{гр}}(1)}}.$$

При этом вместо уравнения (1.109) получим уравнение (1.80) с теми же граничными условиями $\alpha(0) = 1; \alpha(\infty) = 0$, а первое соотношение (1.80) заменится следующим:

$$f = - \sqrt{(\pi/x) (v_{\text{гр}}(1)/u)} \dot{\alpha}. \quad (1.112)$$

Решение уравнения (1.80) при больших значениях $\ln(\varphi/\varphi_0)$ описывается формулой (1.82), а $\xi = \sqrt{2}/\Lambda$. Учитывая, что $1 - V \ll 1$,

$(1 - V^2)/2 \approx 1 - V$, определим расстояние x , на котором разброс скоростей электронов пучка становится равным Δv :

$$x = (1/\pi) (\Delta v/u)^2 (n_0/n_{0b}) (v_{гр}(1)/\omega_{pe}) (\Lambda/2). \quad (1.113)$$

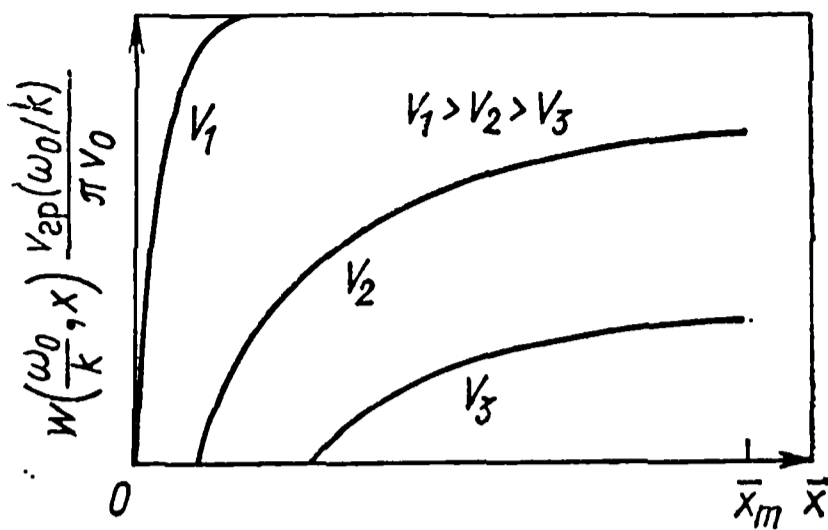


Рис. 10

Пользуясь аналогией между временной и пространственной задачами, можно найти решение, справедливое для всех Δv и u , однако тогда нужно ввести конкретное выражение для $v_{гр}$. На рис. 6 и 10 приведены графики функции распределения электронов пучка и спектральной плотности энергии ленгмюровских колебаний для $\Lambda \gg 1$. Функция распределения (см. рис. 6) изображена для трех

значений безразмерной координаты $\bar{x} = (x/u)(n_{0b}/n_0)\omega_{pe}$. Граница $u(x)$ функции распределения пучка в пространстве скоростей определяется из уравнения

$$\left. \begin{aligned} [1/u^2(x)] 2 \ln u(x) - 1 &= (4\pi\bar{x}/\Lambda) (2/3) (u^2/v_{Te}^2); \\ \Lambda &= \ln(1/\alpha_0), \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

так как $\partial\omega/\partial k = (3/2) (v_{Te}^2/u^2) (u/V)$, $\omega_{pe}/k = v$.

Аналитическое выражение для ω можно получить, считая, что $f(V)$ представляет собой почти ступеньку в пространстве скоростей. Тогда, проинтегрировав выражение (1.73) по скорости, получим

$$\omega = \begin{cases} [u/v_{гр}(V)] \pi [V^2 - u^2(x)]/[1 - u^2(x)], & V^2 \geq u^2(x); \\ 0, & V^2 < u^2(x). \end{cases} \quad (1.115)$$

За точкой $\bar{x} = x_m \sim \Lambda/2\pi$ нарастание колебаний прекращается, так как функция распределения становится устойчивой. Рис. 6 и 10 соответствуют результатам эксперимента в том случае, когда колебания поглощаются на противоположной от инжектора стенке. Здесь умышленно не приводится там, где это возможно, явное выражение для групповой скорости. Для $x > 0$ $v_{гр} = (3/2)(v_{Te}^2/\omega_{pe})k$. В условиях эксперимента, когда диаметр пучка сравним с длиной волны и плазма помещена в магнитное поле, групповая скорость под влиянием этих факторов может быть значительно больше. Так как $\alpha_0 = v_{гр}(1)/u$, условие (1.59) принимает вид

$$[v_{гр}(1)/u] \varphi_0 [\ln(u/v_{гр}(1) \varphi_0)]^3 \geq \sqrt{(n_{0b}/n_0) 1/(1-u)^3}. \quad (1.116)$$

Как и в § 1.12, можно показать, что функция распределения имеет вид ступеньки, и зависимость $u(\bar{x})$ остается прежней даже в случае нарушения формального условия (1.116).

Интересно оценить время установления стационарного режима на некоторой длине x . Это время порядка $t \approx x/v_{гр} \approx (1/\pi) (\Delta v/u)^2 \times \times (n_0/n_{ob})(1/\omega_{pe})(\Lambda/2) = \Lambda/2\gamma$, т. е. в $\Lambda/2$ раз больше обратного инкремента. В заключение следует отметить, что вид функций распределения f и ω слабо зависит от $v_{гр}$.

Однако прежде чем переходить к сопоставлению теоретических результатов с экспериментальными, необходимо выяснить, как происходит квазилинейный процесс (если он существует) для моноэнергетического пучка, когда $v_{Тб}/u \ll (n_{ob}/n_0)^{1/3}$.

§ 1.16. Взаимодействие моноэнергетического пучка электронов с плазмой

К сожалению, написать систему квазилинейных уравнений в случае монохроматического пучка без упрощающих предположений невозможно.

В последнее время в связи с развитием электронно-вычислительной техники появился новый подход к решению как этой проблемы, так и других, аналитическое решение которых затруднено из-за сложности уравнений. Этот метод называют методом численного моделирования или численного эксперимента. Первые попытки численного решения проблемы взаимодействия пучка с бесстолкновительной плазмой сделаны в работах [30, 31]. Метод численного моделирования сводится к решению уравнений движения отдельных частиц плазмы совместно с уравнением Пуассона. Получающееся при этом электрическое поле является самосогласованным, и такая система уравнений хорошо описывает плазму, если число рассматриваемых частиц достаточно велико. Число частиц должно быть настолько большим, чтобы $\ln N_D$ (N_D — эквивалентное число Дебая) был много больше единицы. Только при этих условиях можно рассчитывать на то, что уровень равновесных тепловых флуктуаций в такой системе будет достаточно мал и на его фоне будет заметно нарастание неустойчивой моды.

Пусть на отрезке длиной L равномерно расположено N плоских слоев, каждый из которых обладает зарядом $+e$, и такое же число слоев с зарядом $-e$. Это соответствует одномерному случаю. Если решать уравнения движения для всех этих слоев совместно с уравнением Пуассона при условии периодичности решения на концах отрезка L , то можно описать поведение плазмы дискретным набором частиц. Отношение $L/r_D = \sqrt{L4\pi Ne^2/(TS)}$, где N — полное число электронов на длине L ; S — площадь плоского слоя. Число частиц в дебаевской сфере $N_D = (4\pi/3)\sqrt{LST^3/N}$. Чтобы система таких слоев достаточно хорошо описывала плазму, необходимо выполнение условий $\ln N_D \gg 1$, $L/r_D \gg 1$.

Выполнения первого условия можно добиться, например, безгранично увеличивая нормировочную поверхность S . Однако при этом L/r_D станет порядка единицы, т. е. на отрезке длиной L смогут

укладываться лишь волны с длинами меньше или порядка r_D . Поэтому при слишком большом S нельзя получить большое значение L/r_D . Аналогичные рассуждения показывают, что S не может быть слишком мала.

Обычно в одномерном случае $L \approx (10^2 \div 10^3)r_D$ при $N \sim 10^4$. Начальная температура задается следующим образом. В данную точку пространства можно поместить некоторое количество частиц с различной тепловой скоростью, имитирующих, например, максвелловское распределение по скоростям. В работах [30—32] исследовалась пучковая неустойчивость методами численного моделирования и было показано, что при достаточно малом отношении n_{ob}/n_0 после быстрого нарастания наиболее неустойчивой волны пучок слегка замедляется и переходит в квазилинейный режим. Дальнейшая эволюция пучка происходит в хорошем согласии с результатами квазилинейной теории. Авторы работ [30—32] использовали метод, в котором моделировались как частицы пучка, так и частицы плазмы, — трудоемкий и дорогостоящий метод, а в отношении двумерных задач, по-видимому, и неэффективный. В основном это связано с относительно небольшими памятью и быстродействием применявшихся ЭВМ.

Когда в задаче имеется малый параметр, можно использовать еще один подход, который будем называть методом неполного численного моделирования. Применение этого метода для исследования взаимодействия пучка с плазмой состоит в том, что плазма описывается аналитически как сплошная среда с некоторой диэлектрической проницаемостью, в то время как пучок моделируется отдельными частицами. При этом исчезают трудности, связанные с заданием большого числа частиц плазмы. В работе [33] использован именно такой метод для исследования динамики релаксации первоначально моноэнергетического пучка в бесстолкновительной плазме. Пучок на линейной стадии взаимодействия возбуждает волну с максимальным инкрементом $\gamma \sim (n_{ob}/n_0)^{1/3} \omega_{pe}$, а нелинейная стадия развития неустойчивости заканчивается захватом частиц пучка полем волны. После этого устанавливается состояние, в котором частицы пучка разбиты на сгустки с периодом повторения этих сгустков в пространстве, равным длине волны. Амплитуда колебаний волны осциллирует с периодом $T \sim \gamma^{-1}$ около некоторой средней амплитуды E_0 . Эту среднюю амплитуду можно оценить следующим образом. Как уже показано, частицы пучка должны несколько опережать волну, так что относительная скорость $u - v_\phi \approx \gamma/k$. Когда волна сможет захватывать частицы, рост амплитуды во времени прекратится. При этом потенциальная энергия частицы в поле волны $e\phi_0 \sim eE_0/k$ будет по порядку равна кинетической энергии электрона $(m/2)(u - v_\phi)^2 \sim (m/2)(\gamma/k)^2$.

Найдем амплитуду электрического поля волны из соотношения $e\phi_0 \sim (m/2)(u - v_\phi)^2$:

$$E_0^2/8\pi \sim (mu^2/2)n_{ob} (n_{ob}/n_0)^{1/3}. \quad (1.117)$$

Здесь использован тот факт, что замедление пучка на гидродинамической стадии мало, поэтому $\omega_{pe}/k = u$. Замедление пучка мало, потому что плотность энергии электрического поля составляет небольшую часть плотности энергии пучка. В работе задавалась одна длина волны, соответствующая максимальному значению инкремента. Поэтому ни о какой хаотизации фаз не могло идти речи, и получившийся нелинейный режим соответствовал волне с фиксированной фазой. В работе [34] авторы рассматривали уже несколько волн, которые представляли собой пакет, движущийся со средней скоростью, совпадающей со скоростью пучка. При такой ширине пакета, когда разброс фазовых скоростей волн больше γ/k , функция распределения пучка расширяется до скоростей порядка γ/k , т. е. $v_{Tb} \geq u(n_{ob}/n_0)^{1/3}$, после чего фазы волн хаотизируются, а поведение пучка описывается квазилинейной теорией.

Следует отметить, что количество частиц, моделирующих пучок, составляет по порядку 10^2 , что на два порядка меньше необходимого числа частиц в методе полного численного моделирования. Таким образом, релаксация моноэнергетического пучка электронов малой плотности в плазме приводит к довольно быстрому расширению функции распределения в пространстве скоростей до значений v_{Tb} , достаточных для применения квазилинейного приближения, а фазы волн успевают хаотизироваться.

Существенно, что метод неполного численного моделирования позволяет в принципе решать двумерные задачи уже при современном уровне вычислительной техники.

§ 1.17. Взаимодействие моноэнергетического пучка электронов с плотной плазмой

Наиболее интересным примером, позволяющим проиллюстрировать различие между гидродинамической и кинетической стадиями неустойчивости, является взаимодействие моноэнергетического пучка с плазмой, плотность которой настолько велика, что частота столкновений электронов плазмы с ионами ν_{ei} сравнима с инкрементом пучковой неустойчивости $\gamma \sim (n_{ob}/n_0)^{1/3} \omega_{pe}$. Рассмотрим сначала линейную стадию этого процесса. Будем описывать плазму в гидродинамическом приближении, а пучок в зависимости от его теплового разброса в гидродинамическом или кинетическом приближении. Частицы пучка имеют энергию, много большую, чем электроны плазмы, поэтому в согласии с результатами § 1.2 частота столкновений электронов плазмы ν_{ei} с ионами в $(mu^2/2T_e)^{3/2}$ раз больше, чем частота столкновений электронов пучка с ионами плазмы [см. формулу (1.7)]. Температура электронов плазмы T_e для экспериментов с пучками составляет обычно 10—100 эВ, в то время как энергия электронов пучка $mu^2/2$ измеряется десятками килоэлектронвольт. Поэтому для электронов плазмы необходимо учитывать столкновения. В правой части исходного кинетического уравнения (1.8) необходимо поставить теперь величину $-\nu_{ei}f_e$, которая характеризует выбывание электронов плазмы из элемента

фазового объема из-за столкновения. При этом вместо уравнения (1.14) получим в одномерном случае $mdv_e/dt = -eE - v_{ei}v_e$.

При таком введении столкновительного члена в кинетическое уравнение необходимо потребовать еще, чтобы концентрация электронов в пространстве не менялась, так как рекомбинация отсутствует, т. е. $\int f_e dv = \int f_{e0} dv$. Это приводит к тому, что уравнение непрерывности для электронов плазмы имеет обычный вид [см. (1.13)]. Полная система уравнений, описывающая взаимодействие моноэнергетического пучка со столкновительной плазмой, таким образом, в линейном приближении имеет следующий вид:

$$m(\partial v_b/\partial t + u\partial v_b/\partial x) = -eE; \quad \partial n_b/\partial t + n_{b0}\partial v_b/\partial x + u_b\partial n_b/\partial x = 0; \quad (1.118)$$

$$m\partial v_e/\partial t = -eE - v_{ei}v_e; \quad \partial n_e/\partial t + n_{e0}\partial v_e/\partial x = 0; \\ \partial E/\partial x = -4\pi e(n_b + n_e). \quad (1.119)$$

Отсюда для дисперсионного соотношения имеем

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + iv_{ei})} + \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku)^2}. \quad (1.120)$$

Если $(n_{ob}/n_0)^{1/3}\omega_{pe} \gg v_{ei}$, неустойчивы, как и в § 1.5, будут волны с фазовыми скоростями, примерно равными скорости пучка, с частотами, равными ω_{pe} , $\gamma \sim \omega_{pe}(n_{ob}/n_0)^{1/3}$. Существенное отличие от этого результата получается, когда частота столкновений v_{ei} удовлетворяет условиям

$$\omega_{pe} > v_{ei} > (n_{ob}/n_0)^{1/3}\omega_{pe}. \quad (1.121)$$

На первый взгляд кажется, что плазма, пронизываемая моноэнергетическим электронным пучком, при этих условиях должна быть устойчивой, так как диссипация энергии, определяемая столкновениями, формально больше ее увеличения, определяемого инкрементом. Дисперсионное соотношение (1.120) содержит два малых параметра: v_{ei}/ω_{pe} и n_{ob}/n_0 . В нулевом приближении по этим параметрам дисперсионное соотношение имеет вид $1 = \omega_{pe}^2/\omega^2$, т. е. частота волн по-прежнему равна плазменной. Считая, что $\omega = \omega_{pe} + \delta$, получим в следующем приближении:

$$2\delta/\omega_{pe} + iv_{ei}/\omega_{pe} = (n_{ob}/n_0)(\omega_{pe}^2/\delta^2). \quad (1.122)$$

Здесь учтено, что фазовая скорость волн ω_{pe}/k близка к скорости частиц пучка, так как такие волны наиболее сильно взаимодействуют с пучком. Уравнение (1.122) является кубическим по δ , и его полное решение записывается в виде весьма громоздких формул. Предположив, что $v_{ei} \ll \delta$, получим для бесстолкновительного случая $\delta \approx (n_{ob}/n_0)^{1/3}\omega_{pe}$; следовательно, условие применимости формул, выведенных в § 1.5, есть $v_{ei} < (n_{ob}/n_0)^{1/3}\omega_{pe}$. В другом предельном случае положим $\delta < v_{ei}$. Тогда, пренебрегая первым членом в левой части уравнения (1.122), найдем

$$\delta = \pm i\gamma = \pm \omega_{pe} i \left(\frac{n_{ob}}{n_0} \frac{\omega_{pe}}{2v_{ei}} \right)^{1/2}. \quad (1.123)$$

Если подставить найденное значение δ в соотношение $\delta \ll v_{ei}$, то получим, что формула для инкремента пучковой неустойчивости в плотной плазме справедлива при $(n_{ob}/n_0)^{1/3} \omega_{pe} < v_{ei}$, и условиями применимости для инкремента (1.123) являются неравенства (1.121).

Полученное выражение для инкремента справедливо, если в пучке нет теплового разброса, т. е. когда $\gamma/k > v_{Tb}$. Рассмотрим случай, когда выполняется обратное неравенство. Дисперсионное соотношение при этом имеет вид

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + iv_{ei})} + \frac{\omega_{be}^2}{kn_{ob}} \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv. \quad (1.124)$$

Полагая $kv_{Tb} > \gamma$, вычислим мнимую добавку к частоте пучка и получим выражение для инкремента. В результате имеем

$$\delta = i\pi \left(\omega_{pe}^2 / k^2 n_0 \right) \left(\partial f_0 / \partial v \right) \Big|_{v=\omega_{pe}/k} - iv_{ei}. \quad (1.125)$$

Так как максимальное значение инкремента не превышает $\gamma = \omega_{pe} (n_{ob}/n_0)^{1/2} (\omega_{pe}/2v_{ei})^{1/2}$, что, в свою очередь, меньше v_{ei} , то мнимая часть δ всегда меньше нуля. Поэтому при тепловом разбросе скоростей пучка v_{Tb} , превышающем $\gamma/k = u(n_{ob}/n_0)^{1/2} (\omega_{pe}/2v_{ei})^{1/2}$, система плазма — пучок устойчива. Таким образом, нелинейный режим может осуществляться двумя способами: или пучок, оставаясь моноэнергетическим, теряет скорость, или неустойчивые вначале волны приводят к появлению достаточного теплового разброса в пучке, после чего неустойчивость прекращается, а волны из-за диссипации энергии затухают. Если реализуется второй случай, то при условии (1.121) пучки могут проходить через плазму, не возбуждая неустойчивости, т. е. не теряя энергии.

§ 1.18. Численное моделирование взаимодействия пучка с плотной плазмой

Рассмотрим одномерную модель. Пусть потенциал волны, возникающей в плазме в результате пучковой неустойчивости, задан в виде

$$\varphi(x, t) = \varphi(t) \exp \{ i k_0 x - i \omega_{pe} t + i \alpha(t) \}, \quad (1.126)$$

где α — фаза колебания. Отметим, что $\varphi(t)$ и $\alpha(t)$ — функции, слабо зависящие от времени. Характерное время изменения $\varphi(t)$ и $\alpha(t)$ порядка обратного инкремента: $t \sim 1/\gamma \gg 1/\omega_{pe}$. Наличие здесь двух характерных времен является типичной особенностью задачи и позволяет, пользуясь методом Боголюбова — Митропольского [35], выделить медленно изменяющиеся величины

усреднением по быстроменяющейся переменной $\xi = k_0 x - \omega_{pe} t$. Отметим, что производная $\partial/\partial t$ в линеаризованном первом уравнении (1.119), описывающем движение электронов плазмы, порядка ω_{pe} . Поэтому в нулевом приближении, пренебрегая членами порядка v_{ei}/ω_{pe} , имеем $\partial v_e/\partial t = -eE/m$.

Продифференцируем уравнение движения [первое из (1.119)] по времени и заменим в нем первую производную скорости электронов по времени на $-eE/m$. В результате получим, что

$$\partial^2 v_e/\partial t^2 = -(e/m) (\partial E/\partial t) + v_{ei} eE/m. \quad (1.127)$$

Продифференцируем уравнение непрерывности [второе из (1.119)] два раза по времени и подставим в него выражение (1.127):

$$\begin{aligned} \partial^3 n_e/\partial t^3 = n_0 (\partial/\partial x) (\partial^2 v_e/\partial t^2) = n_0 (-e/m) (\partial/\partial x) (\partial E/\partial t) + \\ + n_0 v_{ei} (e/m) \partial E/\partial x. \end{aligned}$$

Подставив теперь выражение для $\partial^3 n_e/\partial t^3$ в трижды продифференцированное по времени уравнение Пуассона [третье в (1.119)], получим

$$(\partial/\partial x) (\partial^3 E/\partial t^3 + \omega_{pe}^2 \partial E/\partial t - \omega_{pe}^2 v_{ei} E) = -4\pi e \partial^3 n_b/\partial t^3. \quad (1.128)$$

Введем новые переменные:

$$\xi = k_0 x - \omega_{pe} t; \quad t' = t; \quad E(x, t) = E(\xi, t'). \quad (1.129)$$

Тогда операторы $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial x$ следует заменить на $\partial/\partial t = \partial/\partial t' - \omega_{pe} \partial/\partial \xi$; $\partial/\partial x = k_0 \partial/\partial \xi$.

Уравнение (1.128) при этом примет вид

$$\begin{aligned} k_0 (\partial/\partial \xi) \{ (\partial/\partial t' - \omega_{pe} \partial/\partial \xi)^3 E + \omega_{pe}^2 (\partial/\partial t' - \\ - \omega_{pe} \partial/\partial \xi) E - \omega_{pe}^2 v_{ei} E \} = -4\pi e (\partial/\partial t' - \omega_{pe} \partial/\partial \xi)^3 n_b. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Оператор $(\partial/\partial t' - \omega_{pe} \partial/\partial \xi)^3$ можно разложить, например, следующим образом:

$$(\partial/\partial t' - \omega_{pe} \partial/\partial \xi)^3 \approx -\omega_{pe}^3 \partial^3/\partial \xi^3 - \omega_{pe}^2 (\partial/\partial t') (\partial^2/\partial \xi^2) + \dots,$$

так как $E(\xi, t) = E(t'') \sin[\xi + \alpha(t)]$. В системе координат, связанной с волной, выберем длину отрезка равной длине волны $2\pi/k_0$ и потребуем периодичности граничных условий. Интегрируя уравнение (1.130) по ξ с учетом разложения по малым $(1/\omega_{pe}) (\partial/\partial t)$, получаем

$$\begin{aligned} -\omega_{pe}^3 (\partial^3/\partial \xi^3) E(\xi, t') - 3\omega_{pe}^2 \partial^3 E(\xi, t')/\partial \xi^2 \partial t' + \\ + \omega_{pe}^2 \partial E(\xi, t')/\partial t' - \omega_{pe}^3 \partial E(\xi, t')/\partial \xi - \omega_{pe}^2 v_{ei} E(\xi, t') = \\ = -(4\pi e/k_0) \omega_{pe} \partial^2 n_b(\xi, t')/\partial \xi^2. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Считаем, что на концах отрезка уравнение удовлетворяется; в правой части опущен член $(4\pi e/k) \omega_{pe}^2 \partial^2 n_b(\xi, t')/\partial \xi \partial t$, малый по срав-

нению со всеми остальными, так как он содержит произведение двух членов первого порядка n_{0b}/n_0 и $(1/\omega_{pe})(\partial/\partial t)$. Частицы пучка моделируются плоскими слоями площади S , которые перпендикулярны оси x , и их координаты в системе, движущейся вместе с волной, являются функциями времени. Таким образом, $\xi_p = \xi_p(t')$, где p — номер частицы пучка или слоя. Поэтому плотность частиц пучка можно записать в виде

$$n_b = (k_0/2\pi S) \sum_{p=1}^N \delta[\xi - \xi_p(t')], \quad (1.132)$$

где N — полное число частиц, приходящихся на длину волны.

Подставляя выражение (1.132) в правую часть уравнения (1.131), умножая затем обе части на $\sin[\xi + \alpha(t')]$ и $\cos[\xi + \alpha(t')]$ и интегрируя по ξ от 0 до 2π , получаем

$$\partial E(t')/\partial t' - vE(t') = (2e\omega_{pe}/S) \sum_{p=1}^N \sin[\xi_p(t') + \alpha(t')]; \quad (1.133)$$

$$E(t') \partial \alpha/\partial t = (2e\omega_{pe}/S) \sum_{p=1}^N \cos[\xi_p(t') + \alpha(t')]. \quad (1.134)$$

Полученные уравнения описывают зависимость амплитуды волны $E(t')$ и ее фазы $\alpha(t')$ от времени. Уравнения движения электронов можно записать в виде:

$$v_p(t') = \omega_{pe}/k_0 - (e/m) \int_0^{t'} E(t'') \sin[\xi_p(t'') + \alpha(t'')] dt''; \quad (1.135)$$

$$\xi_p(t') = - (e/m) k_0 \int_0^{t'} dt'' \int_0^{t''} E(y) \sin[\xi_p(y) + \alpha(y)] dy. \quad (1.136)$$

Система уравнений (1.133) — (1.136) полностью описывает поведение рассматриваемых колебаний во времени. Эту систему удобно переписать в безразмерных переменных $\tau = \gamma t$, $\eta = (k_0 u - \omega_{pe})/\gamma$, $\varepsilon = E(t')/E_{\text{макс}}$, $E_{\text{макс}} = 8e\omega_{pe}N/v_{ei}S$, где γ — инкремент неустойчивости, определенный по линейной теории для пучка с плотностью $Nk_0/2\pi S$; η характеризует безразмерную скорость. Систему (1.133) — (1.136) теперь можно переписать в безразмерных переменных:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon/d\tau &= - (v_{ei}/2\gamma) \left[\varepsilon - (4/N) \sum_{p=1}^N \sin[\varepsilon_p(\tau) + \alpha(\tau)] \right]; \\ d\alpha/d\tau &= - (v_{ei}/2\gamma) (4/\varepsilon N) \sum_{p=1}^N \cos[\xi_p(\tau) + \alpha(\tau)]; \\ d\xi_p/d\tau &= \eta_p(\tau); \quad d\eta_p/d\tau = - \varepsilon \sin[\xi_p(\tau) + \alpha(\tau)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.137)$$

Наличие в первом из уравнений системы (1.137) большого параметра $\nu_{ei}/2\gamma$ позволяет определить максимальное значение амплитуды волны. Оно достигается, если все частицы, приходящиеся на определенную длину волны, собираются в одной точке, так что $\sum_{p=1}^N \sin(\xi_p + \alpha) = N$. Нетрудно видеть, что $\varepsilon_{\text{макс}} = 4$. В работе [36]

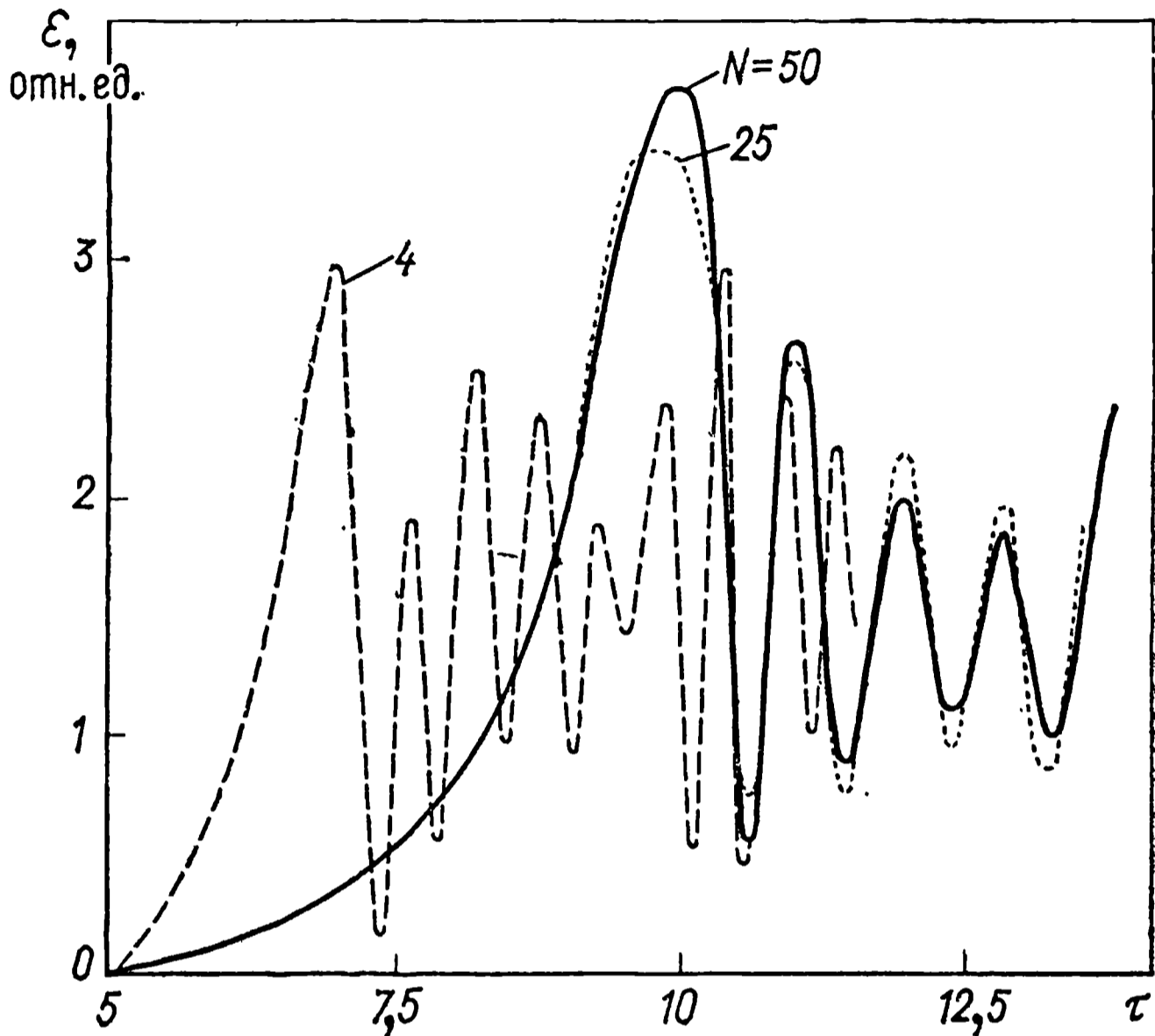


Рис. 11

система уравнений (1.137) интегрировалась численно на ЭВМ для $4 \leq N \leq 50$. Вначале частицы пучка располагались равномерно на отрезке $-\pi \leq \xi \leq \pi$ и задавалось некоторое начальное значение $\varepsilon_0 \ll 1$. Прежде всего было проверено влияние числа частиц, моделирующих пучок, на результат вычислений. На рис.11 представлена зависимость $\varepsilon(\tau)$ для $N = 4, 25, 50$.

Качественная картина осцилляций $\varepsilon(\tau)$ получается уже при $N = 4$. Однако инкремент колебаний не соответствует линейной теории. При $N = 25$ на начальном участке $\varepsilon(\tau) \sim e\kappa\tau$ в соответствии с линейной теорией. При дальнейшем увеличении N ($N > 50$) результат не меняется.

Интересно проследить еще зависимость $\varepsilon(\tau)$ при различных значениях $\nu_{ei}/2\gamma$ (рис. 12). Из рисунка видно, что при уменьшении частоты столкновений в плазме ν_{ei} по отношению к инкременту результаты становятся все более похожими на зависимости, полученные в работе [34], где исследовалась динамика релаксации моноэнергети-

ческого пучка в бесстолкновительной плазме. Максимальная амплитуда волны (см. рис. 11) составляет около 3,7; это свидетельствует о том, что примерно 90% частиц пучка захватывается волной. Об этом же говорят зависимости, представленные на рис. 13, где изображена фазовая плотность, т. е. зависимость скорости частиц пучка относительно скорости волны η от «координаты» ξ .

Время $\tau = 7$ соответствует линейной стадии нарастания колебаний, $\tau = 9$ — время, близкое к моменту достижения максимальной амплитуды. Зависимость $\eta(\xi)$ при $\tau = 20$ иллюстрирует образование сгустков частиц. Таким образом, предварительно промодулированный на частоте, близкой к ω_{pe} (отлична от нуля амплитуда волны лишь с одним значением k_0), моноэнергетический пучок ведет себя в столкновительной плазме почти так же, как в бесстолкновительной.

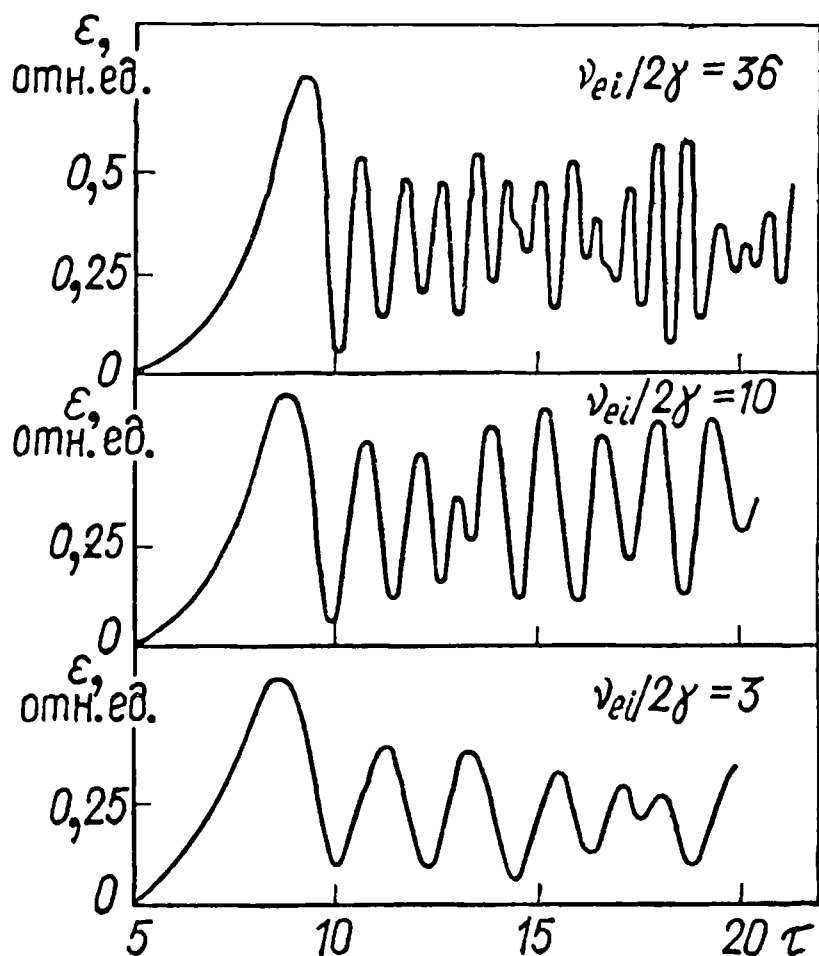


Рис. 12

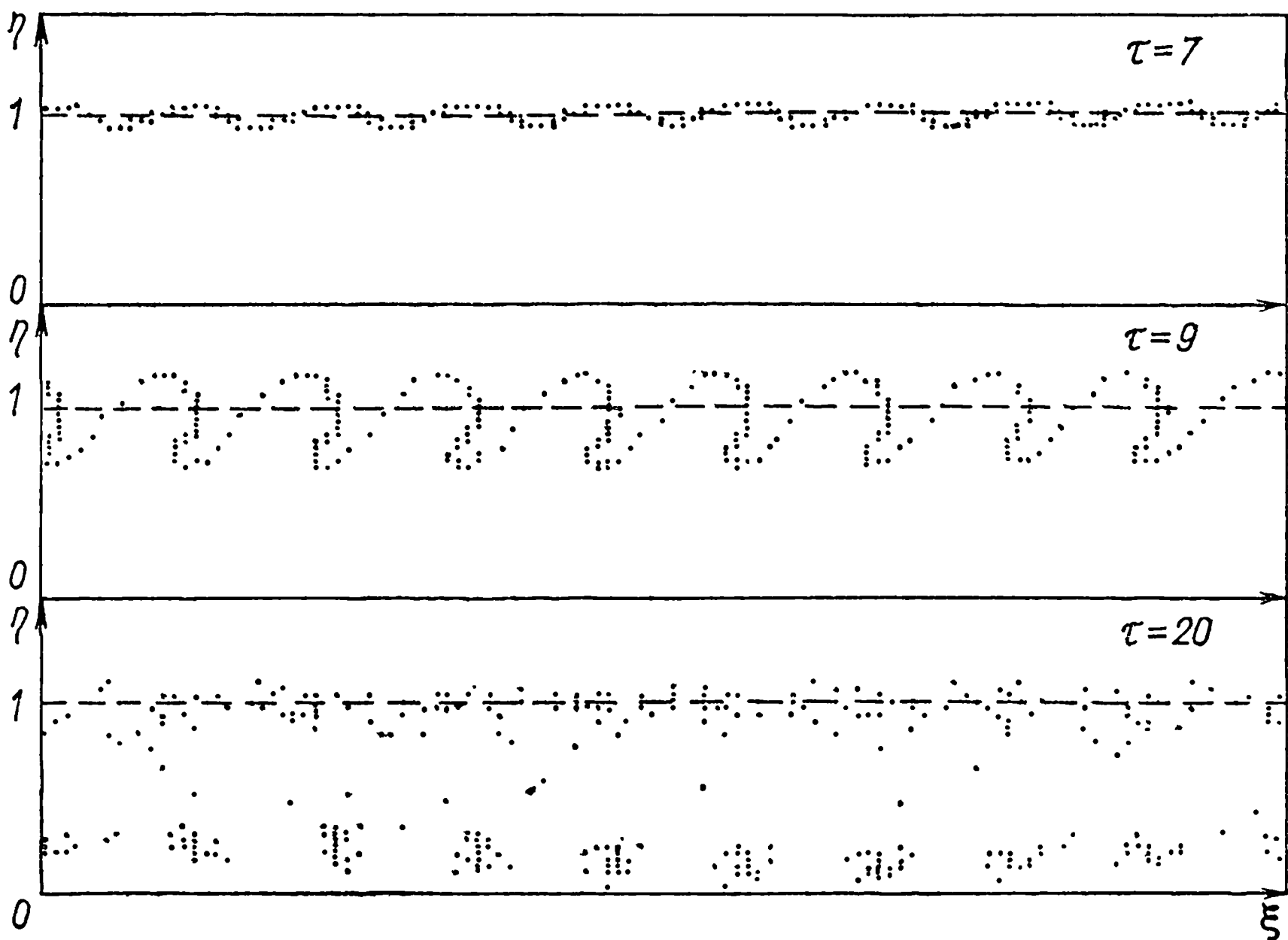


Рис. 13

Биения, наблюдаемые на графике зависимости $\varepsilon(\tau)$, связаны с наличием двух характерных времен — времени нарастания колебаний и времени осцилляций сгустков электронов в потенциальной яме волны.

Рассмотрим случай, когда гармоника нарастающих колебаний предварительно не выделена. Тогда, как и прежде, с максимальным инкрементом нарастает гармоника, для которой выполняется соотношение $\beta k u = \omega_{pe}$ (β — номер гармоники). Однако, поскольку зависимость инкремента от волнового числа является плавной функцией, в системе нарастают и другие гармоники. Согласно линейной теории зависимость инкремента γ от расстройки $\Delta = \frac{(\beta \pm i) k u - \omega_{pe}}{\nu} = \frac{\omega_{pe}}{\nu} \frac{\pm i}{\beta}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) имеет вид

$$\gamma = \gamma_0 (1 - 2\Delta^2), \text{ где } \gamma_0 = i\omega_{pe} [(n_{ob}/n_0) (\omega_{pe}/2\nu_{ei})]^{1/2}.$$

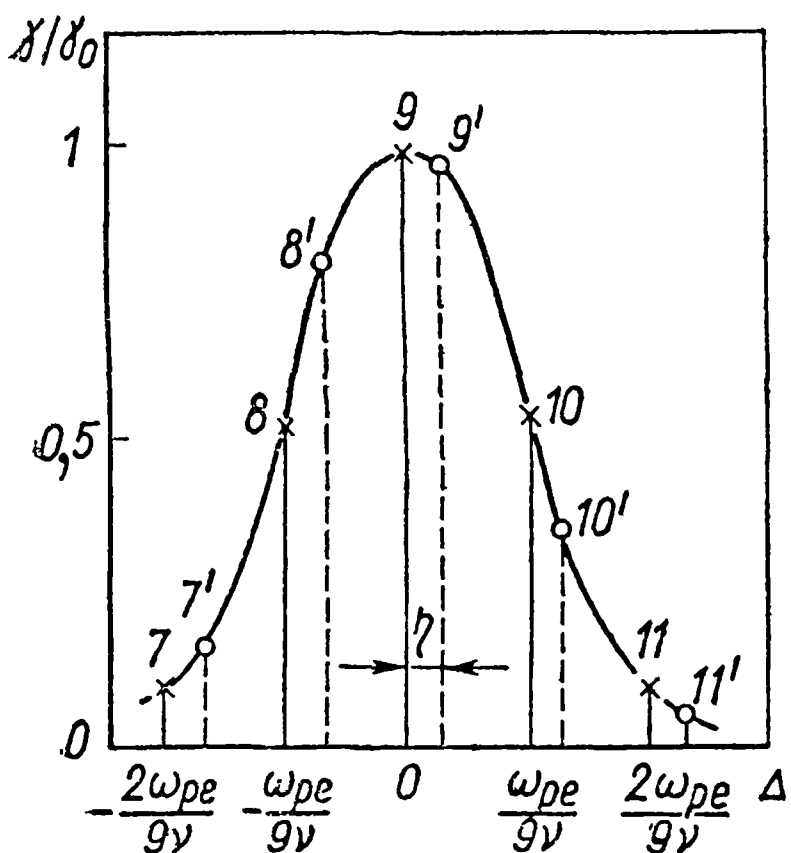


Рис. 14

Эта зависимость для случая $\beta = 9$ представлена графически на рис. 14. Цифрами отмечены относительные инкременты соответствующих гармоник колебаний. При задании начальных условий считали, что скорость всех частиц пучка относительно скорости резонансной волны $\eta = (\beta k u - \omega_{pe})/\gamma_0 = 1$, т. е. пучок немного (на γ_0/k_0) обгоняет волну и отдает ей энергию. Значения относительных инкрементов для этого случая отмечены на рис. 14 цифрами со штрихами.

Когда в системе нарастает m собственных гармоник,

$$E(\xi, t) = \sum_{i=0}^m E_{\beta \pm i} \sin \{(\beta \pm i) \xi + \alpha_{\beta \pm i}(t)\},$$

где $\xi = k_0 x - (\omega_{pe}/\beta)t$; $2m + 1$ — полное число гармоник. Дополнительное обстоятельство, которое следует учесть при выводе уравнений, связано с тем, что собственные гармоники, соответствующие различным значениям i , ортогональны на отрезке, длина которого L .

Система уравнений, описывающая волновой пакет, при этом принимает вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon_{\beta \pm i}}{d\tau} &= -\frac{\nu e i}{2\gamma_0} \left\{ \varepsilon_{\beta \pm i} - \frac{1}{N} \frac{(\beta \pm i)^2}{\beta} \sum_{p=1}^N \sin [(\beta \pm i) \xi + \alpha_{\beta \pm i}] \right\}; \\
 \frac{d\alpha_{\beta \pm i}}{d\tau} &= \frac{\omega_{pe}}{2\gamma_0} \frac{[(\beta \pm i)^2 - \beta^2] [\beta \pm i]}{\beta^2} + \frac{\nu}{2\gamma_0} \frac{1}{\varepsilon_{\beta \pm i} N}; \\
 \frac{d\xi_p}{d\tau} &= \eta_p; \quad \frac{d\eta_p}{d\tau} = -\frac{4}{\beta} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta \pm i} \sin [(\beta \pm i) \xi + \alpha_{\beta \pm i}].
 \end{aligned} \right\} (1.138)$$

Здесь $\varepsilon_{\beta \pm i}$ и $\alpha_{\beta \pm i}$ — амплитуда и фаза волны, соответствующей номеру гармоники $\beta \pm i$, причем амплитуда нормирована так же, как в случае одной волны. Все рассматриваемые волны должны иметь мало различающиеся фазовые скорости, а именно $\Delta v_{\phi} \approx \approx (\gamma_0/\omega_{pe})u$, причем фазовая скорость волны с максимальным инкрементом должна быть близка к u . Так как частоты всех волн в волновом пакете равны ω_{pe} , различия в фазовых скоростях можно добиться, задавая для волн различные значения волнового числа $k_n = 2\pi n/L$. Соответствующий разброс волновых чисел Δk должен при этом удовлетворять соотношению $\Delta k/k_{\beta} \sim \gamma/\omega_{pe} \sim (n_{ob}/n_0)^{1/3}$. Из этого соотношения следует, что β должно быть достаточно большим, во всяком случае $\beta > \omega_{pe}/\gamma$. В противном случае спектр собственных колебаний системы не будет сплошным и задача сведется к задаче об одной волне.

При численном моделировании взаимодействия электронного пучка с плотной плазмой были рассмотрены восьмая — двенадцатая собственные гармоники колебаний, причем начальные условия выбирали таким образом, что с максимальным инкрементом нарастала девятая гармоника. Исследование влияния числа частиц на результаты численного моделирования, проведенное для случая возбуждения одной гармоники колебаний, свидетельствует о том, что для достижения необходимой точности в одной волне должно находиться около 25 частиц. Таким образом, полное число частиц определится из условия $N = 25n_{\max}$, где n_{\max} — номер максимальной из рассматриваемых гармоник.

Результаты интегрирования системы уравнений (1.138) для 500 частиц при $\nu/2\gamma = 30$ приведены на рис. 15 (цифры — номера гармоник). Из рисунка видно, что начальная стадия неустойчивости развивается в соответствии с предсказаниями линейной теории. С максимальным инкрементом нарастает девятая гармоника. Экспериментальные значения инкрементов совпадают с расчетными. После линейной стадии темп роста амплитуды волны замедляется, и при $\tau \approx 10$ достигается максимальное значение амплитуды $\varepsilon \approx 0,5$, что в $\nu/2\gamma$ раз меньше уровня, которого достигает амплитуда волны в бесстолкновительном случае. Это происходит, по-видимому, потому, что в рассматриваемом случае значительная часть энергии теряется на нагрев плазмы за счет сильной диссипации $[(8\pi/\Delta E^2) \times \times (dW_{\text{пучка}}/dt) \sim (\nu/2\gamma)]$, и частицы пучка захватываются волной рань-

ше, чем она успеет набрать максимальную по бесстолкновительной теории энергию.

Как видно из рис. 15, дальнейший ход зависимости $\varepsilon(\tau)$ существенно отличается от хода в случае бесстолкновительной плазмы.

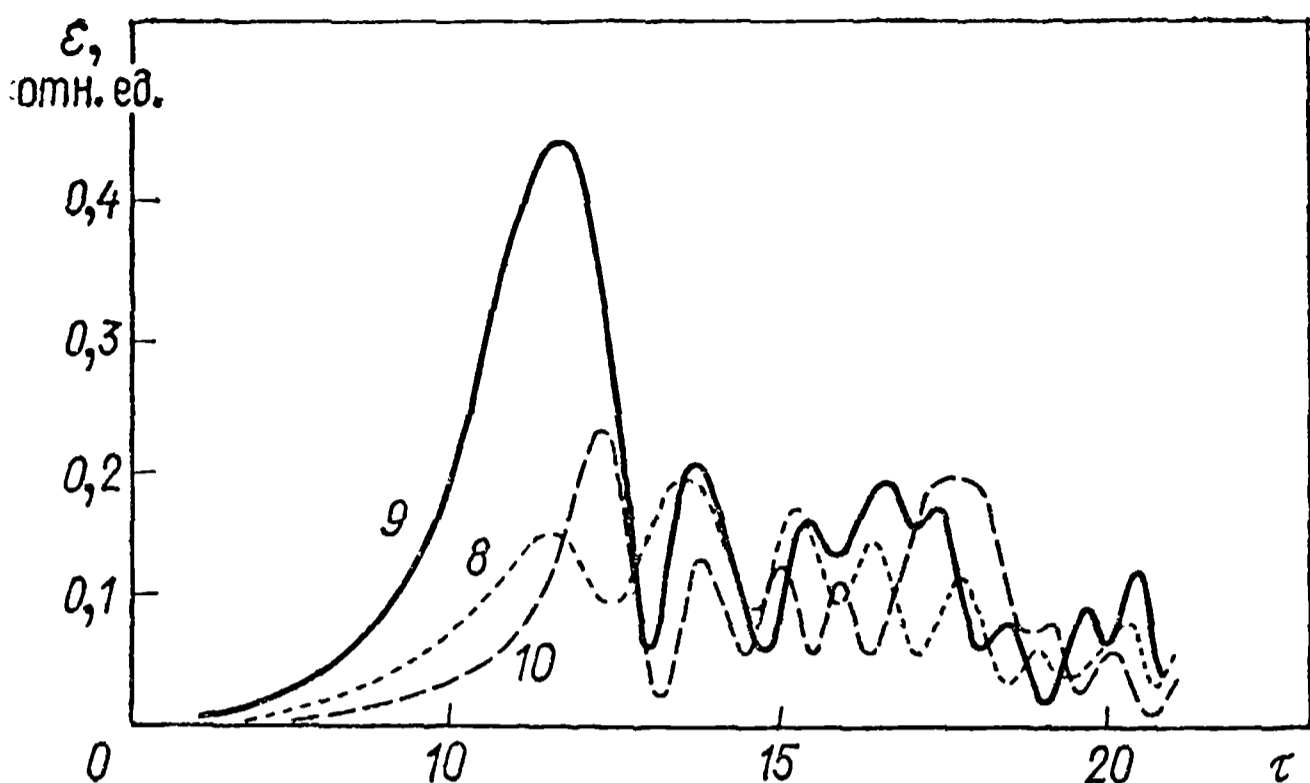


Рис. 15

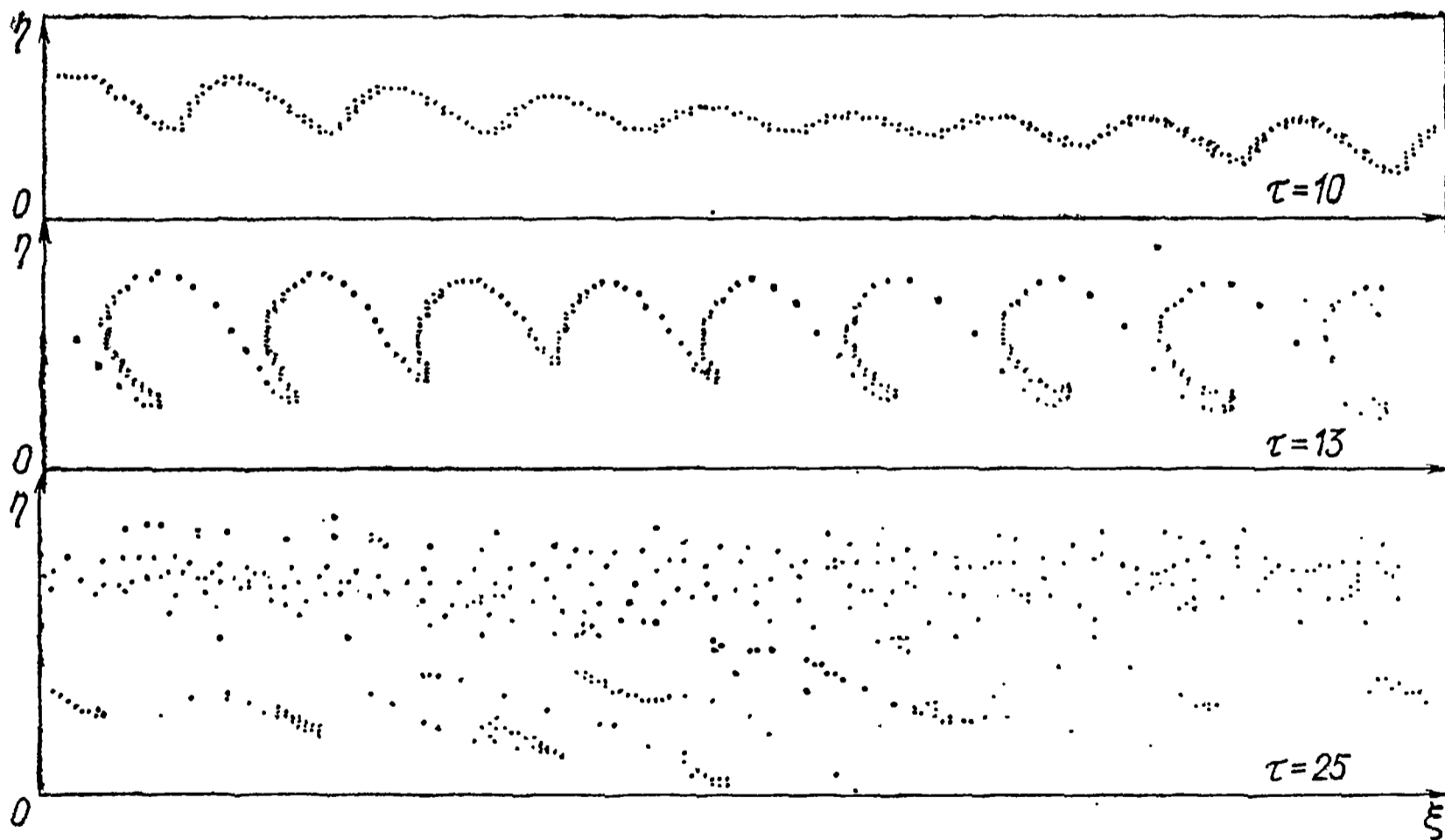


Рис. 16

При взаимодействии электронного пучка с бесстолкновительной плазмой все частицы пучка к моменту их захвата волной собираются в один сгусток, который осциллирует в потенциальной яме волны. В рассматриваемом случае колебания амплитуды хаотичны, степень неупорядоченности колебаний увеличивается со временем и постепенно колебания затухают. Объяснить такой характер зависимости амплитуды волны от времени можно следующим образом.

Поскольку бóльшая часть энергии пучка тратится на нагрев плазмы, к моменту захвата частицы пучка не успевают собраться в сгусток и обладают заметным разбросом по скоростям и координатам, и, естественно, что захват их волной не может привести к регулярным колебаниям амплитуды волны. После нарастания основных мод колебания затухают и хаотизируются. Причина этого явления заключается в том, что за время порядка $25\gamma^{-1}$ у частиц пучка появляется существенный разброс по скоростям (рис. 16) и пучок из моноэнергетического превращается в такой, который должен описываться при помощи кинетических уравнений, а в случае $\gamma < \nu < \omega_{pe}$ он устойчив [см. (1.125)]. Поэтому неустойчивость прекращается, и пучок свободно проходит через плазму.

§ 1.19. Экспериментальные исследования релаксации пучков в плазме

В § 1.15 решена задача по определению функции распределения пучка при стационарной инжекции его в плазму. Стационарность решения граничной задачи обеспечивалась тем, что генерация колебаний при пучковой неустойчивости компенсировалась их выносом с групповой скоростью в глубь плазмы. При этом, если считать, что групповая скорость колебаний есть групповая скорость ленгмюровских колебаний, плотность энергии шумов могла достичь очень большого значения. Поэтому установление стационарного состояния для пучка, возбуждающего кинетическую неустойчивость, согласно работе [30] должно происходить следующим образом. Первая группа частиц пучка, инжектируемых в плазму, возбуждает ленгмюровские колебания на самом входе в систему и, отдавая энергию колебаниям, релаксирует на довольно большой, но конечной длине. Энергия этой группы частиц, распределенная по большой длине, приводит к появлению в плазме на этой же длине надтепловых шумов, энергия которых много меньше той, которая устанавливается в стационарном режиме. Следующая группа электронов пучка взаимодействует с существующими колебаниями, поэтому отдает энергию уже на меньшем расстоянии от входа в систему. Таким образом, энергия шумов теперь больше и распределена на меньшей длине. В результате, как показано в работе [30], происходит «схлопывание» области существования шумов, т. е. стягивание ее почти в точку, до тех пор пока вынос шумов $(\partial W_n / \partial x) v_{gr}$ не сбалансирует их поступление за счет неустойчивости. Стационарное решение устанавливается при этом за время порядка $\Lambda(n_0/n_{0b})(1/\omega_{pe})$. Однако в экспериментальных условиях групповая скорость может определяться другими факторами: магнитным полем и конечностью размеров плазмы.

Необходимо различать два случая: когда $\omega_{pe} > \omega_{He} = eH_0/mc$, где H_0 — магнитное поле, удерживающее плазму, и когда $\omega_{pe} < \omega_{He}$. Если циклотронная частота ω_{He} не больше плазменной, то движение электронов можно считать одномерным при выполнении

еще одного условия — ларморовский радиус электрона $\rho_e = v_{\perp b} / \omega_{He}$, определенный по поперечной к движению электрона скорости пучка, много меньше поперечной длины волны $\lambda = 2\pi/k$. Пучок при этом следует инжектировать вдоль магнитного поля. Действительно, в этом случае электроны могут двигаться только вдоль силовых линий магнитного поля и движение их можно считать одномерным.

Экспериментально одномерную релаксацию электронного пучка в плазме исследовали С. М. Левитский и И. П. Шашурин [37]. Установка представляла собой стеклянную трубку длиной 30 см и диаметром 1 см. Магнитное поле было направлено вдоль оси трубки. Энергия частиц пучка была порядка нескольких десятков килоэлектронвольт, а концентрация $n_{ob} \sim 10^{-9} \text{ см}^{-3}$. Концентрация плазмы, созданной пучковым разрядом, вдоль магнитного поля примерно на порядок превышала n_{ob} . Электронная циклотронная частота $\omega_{He} = 1,7 \cdot 10^7 H_0 \text{ с}^{-1}$, где поле H_0 выражено в эрстедах, примерно на порядок превышала $\omega_{pe} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Поперечная скорость частиц пучка специально не измерялась, однако хорошо известно, что поперечная энергия частиц пучка по порядку величины равна работе выхода катода и не превышает десятков электронвольт. Поэтому $v_{\perp} \sim 10^8 \text{ см/с}$, а ларморовский радиус электрона $\rho_e \sim 10^{-3} \text{ см}$ много меньше радиуса плазмы 0,5 см. Функция распределения частиц пучка анализировалась методом задерживающего потенциала с противоположной стороны трубки. Меняя энергию пучка, можно было тем самым изменять скорость пучка и характерную длину, на которой происходит релаксация. Проще, однако, оказалось менять ток пучка при неизменной энергии, т. е. проводить измерения для разных значений n_{ob}/n_0 . Для больших значений тока пучка I_b на противоположном от инжектора конце установки функция распределения представляла собой плато, протянувшееся от начальной энергии пучка $mu^2/2$ практически до нуля (кривая 5 на рис. 17, $I_b = 22 \text{ мА}$). При меньших значениях тока длины системы не хватало для того, чтобы квазилинейная релаксация произошла полностью и функция распределения имела вид ступеньки (см. рис. 17, кривые 1 — $I_b = 7 \text{ мА}$; 2 — $I_b = 10 \text{ мА}$; 3 — $I_b = 12 \text{ мА}$; 4 — $I_b = 16,5 \text{ мА}$).

При начальной скорости пучка $u_0 \approx 3 \cdot 10^9 \text{ см/с}$ характерное значение $k^{-1} = (u_0 / \omega_{pe})$ было сравнимо с радиусом плазмы, так что ограниченность плазмы имела существенное значение для определения групповой скорости колебаний. Возбуждаются волны, у ко-

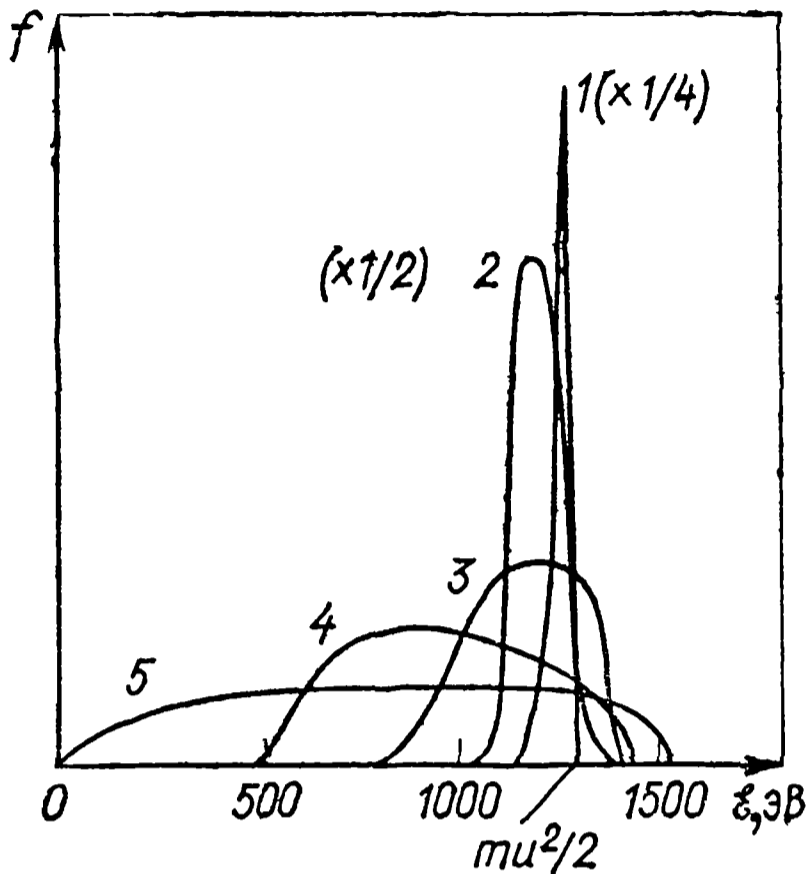


Рис. 17

гда $\omega_{He} = 1,7 \cdot 10^7 H_0 \text{ с}^{-1}$, где поле H_0 выражено в эрстедах, примерно на порядок превышала $\omega_{pe} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Поперечная скорость частиц пучка специально не измерялась, однако хорошо известно, что поперечная энергия частиц пучка по порядку величины равна работе выхода катода и не превышает десятков электронвольт. Поэтому $v_{\perp} \sim 10^8 \text{ см/с}$, а ларморовский радиус электрона $\rho_e \sim 10^{-3} \text{ см}$ много меньше радиуса плазмы 0,5 см. Функция распределения частиц пучка анализировалась методом задерживающего потенциала с противоположной стороны трубки. Меняя энергию пучка, можно было тем самым изменять скорость пучка и характерную длину, на которой происходит релаксация. Проще, однако, оказалось менять ток пучка при неизменной энергии, т. е. проводить измерения для разных значений n_{ob}/n_0 . Для больших значений тока пучка I_b на противоположном от инжектора конце установки функция распределения представляла собой плато, протянувшееся от начальной энергии пучка $mu^2/2$ практически до нуля (кривая 5 на рис. 17, $I_b = 22 \text{ мА}$). При меньших значениях тока длины системы не хватало для того, чтобы квазилинейная релаксация произошла полностью и функция распределения имела вид ступеньки (см. рис. 17, кривые 1 — $I_b = 7 \text{ мА}$; 2 — $I_b = 10 \text{ мА}$; 3 — $I_b = 12 \text{ мА}$; 4 — $I_b = 16,5 \text{ мА}$).

При начальной скорости пучка $u_0 \approx 3 \cdot 10^9 \text{ см/с}$ характерное значение $k^{-1} = (u_0 / \omega_{pe})$ было сравнимо с радиусом плазмы, так что ограниченность плазмы имела существенное значение для определения групповой скорости колебаний. Возбуждаются волны, у ко-

торых проекция волнового вектора на направление скорости пучка сравнима с поперечной проекцией k .

Рассмотрим ленгмюровские колебания плазмы, помещенной в такое магнитное поле, что $\omega_{He} > \omega_{pe}$. Вдоль магнитного поля (ось z) электроны осциллируют так же, как и прежде, а для поперечного движения существенно то, что частота колебаний ниже циклотронной. Тогда проекция скорости движения электрона в поле волны с частотой $\omega \approx \omega_{pe}$ на ось z определяется из уравнения

$$-i\omega v_{zk} = (e/m) i k_z \varphi_k, \quad (1.139)$$

т. е. $v_{zk} = -(e/m) k_z (1/\omega) \varphi_k$.

В перпендикулярном магнитному полю направлении для потенциальных колебаний уравнение движения электронов плазмы имеет вид

$$-i\omega \mathbf{v}_{\perp k} = (e/m) i \mathbf{k}_{\perp} \varphi_k - (e/c) [\mathbf{v}_{\perp k} \mathbf{H}_0]. \quad (1.140)$$

Используем малый параметр $\omega/\omega_{He} \ll 1$. Сравнив левую часть уравнения (1.140) с последним слагаемым в правой части, можно заключить, что они относятся как $\omega/\omega_{He} \ll 1$. Поэтому в первом приближении

$$\mathbf{v}_{\perp k} = -i (c/H_0^2) \varphi [\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{H}_0]. \quad (1.141)$$

В следующем приближении, подставляя в левую часть (1.140) выражение для скорости (1.141) и разрешая полученное уравнение относительно $v_{\perp k}$, получаем

$$\mathbf{v}_{\perp k} = i (c/H_0^2) [\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{H}_0] \varphi + (\omega/\omega_{He}) \mathbf{k}_{\perp} (c/H_0) \varphi. \quad (1.142)$$

Из уравнения непрерывности следует, что

$$n_e/n_0 = (\mathbf{k} \mathbf{v}_k)/\omega = -(ek_z^2/m\omega^2) \varphi_k + (ek_{\perp}^2/m\omega_{He}^2) \varphi_k. \quad (1.143)$$

Пренебрегая движением ионов и подставляя выражение (1.143) в линеаризованное уравнение Пуассона, получаем дисперсионное соотношение для плазмы в магнитном поле ($\omega \ll \omega_{He}$):

$$1 + (\omega_{pe}^2/\omega_{He}^2) (k_{\perp}^2/k^2) = (\omega_{pe}^2/\omega^2) (k_z^2/k^2). \quad (1.144)$$

При $k_z \sim k_{\perp}$, что соответствует результатам эксперимента [39],

$$\omega = \omega_{pe} k_z/k. \quad (1.145)$$

Найдем проекцию групповой скорости на ось z при $k_z = \omega_{pe}/u$ и $k_{\perp} \sim k_z$. Значение k определяется поперечным размером плазмы. Групповая скорость $\partial\omega/\partial k_{\perp} = \omega_{pe} k_{\perp}^2 / (k_{\perp}^2 + k_z^2)^{3/2} \sim \omega_{pe}/k_z \sim u$, т. е., действительно, она в экспериментальных условиях была порядка скорости частиц пучка. Поэтому длина, на которой происхо-

дит квазилинейная релаксация, определяется скоростью u , что удовлетворительно согласуется с экспериментом.

Другим очень интересным опытным фактом является измерение функции распределения пучка в столкновительной плазме [38]. Как было показано, при достаточно большой частоте столкновений электронов в плазме пучок, обладающий таким тепловым разбросом скоростей, что $\gamma/\omega_{pe} \ll \Delta v/u$, практически не возбуждает в плазме неустойчивости. Проведенные в работе [38] измерения в точности подтвердили теоретические предсказания. Если использовать для измерений моноэнергетический пучок ($\gamma/\omega_{pe} > \Delta v/u$), то функция распределения пучка расширится в пространстве скоростей до значения $\Delta v/u \sim \gamma/\omega_{pe} \sim \sqrt{(n_{ob}/n_0)(\nu_{ei}/\omega_{pe})}$. В принципе частоту столкновений в плазме ν_{ei} при достаточно большом количестве нейтральных частиц можно заменить величиной ν_{en} — частотой столкновений электронов с нейтральными частицами. Это связано с тем, что ионы и нейтральные частицы не принимают участия в колебаниях, а взаимодействие электронов с ними приводит к появлению дополнительной силы — силы трения $(\nu_{en} + \nu_{ei})m_e v_e$. Поэтому, зондируя электронным пучком плазму, можно, зная ее плотность, найти частоту столкновений $\nu_{ei} + \nu_{en}$ и, определив еще плотность нейтральных частиц, получить важные сведения о температуре электронов ($\nu_{ei} \sim n_0/T_e^{3/2}$) или сечении столкновения электронов с нейтральными частицами.

Трехмерная квазилинейная релаксация электронного пучка имеет место, когда электронная плазменная частота ω_{pe} много больше циклотронной ω_{He} . В экспериментах с мощными электронными пучками, током около 20 А и энергией электронов пучка до 30 кэВ, как правило, $\omega_{He}/\omega_{pe} \ll 1$ [15]. Плазма удерживалась в магнитной ловушке пробочной конфигурации с напряженностью магнитного поля 2 кЭ в центре. Такая ловушка позволяла довольно долго (примерно 10^{-3} с) удерживать плазму с плотностью примерно 10^{13} см $^{-3}$. Диаметр пучка равнялся 2 см и значительно превышал характерную длину волны ленгмюровских колебаний. Длина релаксации, которая измерялась в эксперименте, была много больше радиуса пучка, поэтому сопоставление предсказаний теории для безграничного в поперечном направлении пучка с результатами эксперимента могло быть только качественным. Функцию распределения элект-

ронов пучка по продольным скоростям $f_b(v_z) = 2\pi \int_0^\infty v_\perp \times$

$\times f_b(v_z, v_\perp) dv_\perp$ измеряли так же, как в работе [39], методом задерживающего потенциала. Одновременно измеряли полную потерю энергии пучка за время его инжекции в плазму при начальной энергии частиц пучка 20 кэВ. Если t — время инжекции пучка, S — площадь его сечения, то начальная энергия пучка $\mathcal{E} = tSmn_{ob}u^3/2$. Сопоставление потерь энергии пучка в продольном направлении $\Delta \mathcal{E}_z$ и полных потерь $\Delta \mathcal{E}$ с начальной энергией приведено ниже.

I, A	5	10	20
$\Delta \mathcal{E}_z / \mathcal{E}$	0,34	0,57	0,67
$\Delta \mathcal{E} / \mathcal{E}$	0,29	0,36	0,41

Здесь

$$\Delta \mathcal{E} = tS \left[\frac{mn_{ob}u^3}{2} - 2\pi \int_0^\infty v_z dv_z \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \frac{m}{2} (v_z^2 + v_\perp^2) f(v_z, v_\perp) \right];$$

$$\Delta \mathcal{E}_z = tS \left\{ \frac{mn_{ob}u^3}{2} - \int_0^\infty \frac{mv_z^3}{3} \left[2\pi \int f(v_\perp, v_z) v dv_\perp \right] dv_z \right\},$$

поэтому $\Delta \mathcal{E}_z / \mathcal{E}$ всегда больше или равно $\Delta \mathcal{E} / \mathcal{E}$. Видно, что при малом токе (n_{ob} мало) основная потеря энергии происходит в продольном направлении ($\Delta \mathcal{E}_z \approx \Delta \mathcal{E}$). Отсюда следует, что на начальной стадии релаксация одномерна. Однако при увеличении тока пучка появляется разница между $\Delta \mathcal{E}_z$ и $\Delta \mathcal{E}$.

§ 1.20. Трехмерная релаксация электронного пучка в плазме

Получим квазилинейные уравнения для плазмы в отсутствие магнитного поля в трехмерном случае. Эти соотношения, как было показано, применимы и для плазмы, удерживаемой магнитным полем, в том случае, когда магнитное поле слабо влияет на дисперсию колебаний. Это справедливо при $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$ и при $k(T_e/m_e\omega_{He}^2)^{1/2} \ll \ll 1$. Более точное рассмотрение (см. § 2.6) показывает, что для этого необходимо, чтобы либо инкремент γ был больше или сравним с циклотронной частотой, либо $k_z v_{Te}$ было больше ω_{He} .

При рассмотрении гидродинамической стадии неустойчивости пучка в § 1.6 и § 1.7 показано, что инкремент неустойчивости одинаков для колебаний, распространяющихся под различными углами к направлению движения пучка, за исключением небольшой области вблизи угла $\pi/2$. Эту область можно определить из следующих простых соображений: при выполнении условия $\omega_{pe} = (ku) = |k| u \cos \theta$ инкремент одинаков для всех θ и по порядку величины равен $(n_{ob}/n_0)^{1/3} \omega_{pe}$. Однако модуль вектора k при этом различен для разных углов θ : $|k| = \omega_{pe}/(u \cos \theta)$ и при $\theta \rightarrow \pi/2$ $|k| \rightarrow \infty$. Ленгмюровские колебания при приближении $|k| k \omega_{pe}/v_{Te} = r_{De}^{-1}$ сильно затухают из-за того, что фазовая скорость их приблизительно равна v_{Te} . Поэтому при $u \cos \theta \leq v_{Te}$ колебания возбуждаться не будут. Но так как u/v_{Te} — большая величина, колебания заполнят почти полностью полупространство $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, за исключением малой области $\Delta \theta \approx v_{Te}/u$ вблизи углов $\theta = \pm \pi/2$. Таким образом, моноэнергетический пучок будет, по-видимому, расширяться одновременно вдоль и поперек своего движения в пространстве скоростей до тех пор, пока неустойчи-

вость не перейдет в кинетическую стадию, когда разброс скоростей в пучке удовлетворяет условию

$$(\Delta v_b k) > \gamma. \quad (1.146)$$

Квазилинейные уравнения будут отличаться от уравнений (1.69) и (1.70) лишь тем, что интегрирование теперь будет производиться не по одной переменной, а по трем как в k -, так и в v -пространстве; нормировочная длина l заменится на нормировочный объем V , величина $2\pi/l$ соответственно заменится на $(2\pi)^3/V$. Коэффициент квазилинейной диффузии станет тензором, а величина kv , входившая в уравнения (1.69) и (1.70), заменится скалярным произведением (kv) . Для фурье-компоненты возмущенной функции распределения пучка имеем теперь

$$f_k = \frac{i(e/m) E_k \partial f_0 / \partial v}{\omega - (kv)} = \frac{e}{m} \frac{k \partial f_0^0 / \partial v}{\omega - (kv)} \varphi_k. \quad (1.147)$$

После усреднения по фазам получим

$$\overline{\partial f_0 / \partial t} = (e/m) [(2\pi)^3/V] \int ik (\partial f_k / \partial v) \varphi_{-k} d^3k. \quad (1.148)$$

Здесь $V \sim l^3$ — нормировочный объем. Отметим, что выражения типа $k_\alpha \partial f / \partial v_\alpha$ иногда удобнее записывать в тензорных обозначениях, где предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Учитывая, что спектральная плотность энергии шумов имеет в нашем случае вид

$$W_k = (k^2 | \varphi_k |^2 / 4\pi) (2\pi)^3 / V, \quad (1.149)$$

можно записать квазилинейные уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \partial f_0 / \partial t &= (\partial' \partial v_\alpha) D_{\alpha\beta} \partial f_0 / \partial v_\beta; \\ D_{\alpha\beta} &= \int (k_\alpha k_\beta / k^2) W_k \pi (4\pi e^2 / m^2) \delta [\omega - (kv)] d^3k; \\ \partial W_k / \partial t &= 2\gamma W_k; \\ \gamma &= (\pi/2) (\omega^3 / k^2 n_0) \int k (\partial f_0 / \partial v) \delta [\omega - (kv)] d^3v. \end{aligned} \right\} \quad (1.150)$$

Найдем выражение для инкремента неустойчивости γ в зависимости от угла между направлением распространения волны и направлением скорости u . В некоторых частных случаях зависимость инкремента от угла найти довольно просто, в общем же случае необходимо пользоваться цилиндрическими координатами.

Если считать, что функция распределения части пучка является максвелловской и средняя скорость $u = e_z u$, то выражение для γ можно получить следующим образом. Будем считать для упрощения выкладок, что волна распространяется в плоскости x, z . Тогда

$$\gamma = - (\pi/2) (\omega_{pe}^3 / k^2 n_0) \int (m/T_b) [k_x v_x + k_z (v_z - u)] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times f_0 \delta(\omega - k_x v_x - k_z v_z) dv_x dv_y dv_z - \pi (\omega_{pe}^3 / k^2 n_0) \times \\
& \times [(\omega - k_z u) / v_{Tb}^2 | k_z |] \int f_0 \delta(\omega - k_x v_x - k_z v_z) dv_x dv_y dv_z = \\
& - \pi (\omega_{pe}^2 / k^2) [(k_z u - \omega) / v_{Tb}^2 | k_z |] (m 2\pi T_b) (n_{0b} / n_0) \times \\
& \times \int \exp \left\{ - m v_x^2 / 2T_b - m [(\omega - k_x v_x) k_z - u]^2 (2T_b) \right\} dv_x = \\
& = \sqrt{\pi} (\omega_{pe}^4 / k^3 v_{Tb}^3) (n_{0b} / n_0) (k_z u \omega_{pe} - 1) \exp \left\{ - (\omega - k_z u)^2 / k^2 v_{Tb}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Если все три компоненты вектора \mathbf{k} отличны от нуля, то получается такой же ответ. Таким образом, при максвелловской функции распределения частиц пучка инкремент записывается в виде

$$\begin{aligned}
\gamma = \sqrt{\pi} (\omega_{pe}^4 / k^3 v_{Tb}^3) (n_{0b} / n_0) [(k\mathbf{u}) / \omega_{pe} - 1] \exp \left\{ - [\omega_{pe} - \right. \\
\left. - (k\mathbf{u})]^2 / k^2 v_{Tb}^2 \right\}. \quad (1.151)
\end{aligned}$$

Введя переменные $h = [(k\mathbf{u}) - \omega_{pe}] / kv_{Tb}$ и $S = \omega_{pe}^2 / k^2 v_{Tb}^2$, перепишем выражение (1.151) в виде

$$\gamma = \sqrt{\pi} \omega_{pe} (n_{0b} / n_0) h S \exp(-h^2).$$

Дифференцируя последнее уравнение для γ по h , найдем, что при $h = 1/\sqrt{2}$ для заданного значения S инкремент максимален и равен

$$\gamma = \sqrt{\pi/2e} \omega_{pe} (n_{0b} / n_0) (\omega_{pe}^2 / k^2 v_{Tb}^2).$$

Так как $k_z u - \omega_{pe} = kv_{Tb} / \sqrt{2}$, а $\omega_{pe} \gg kv_{Tb}$, то $k_z \approx \omega_{pe} / u$, и выражение для максимального инкремента можно окончательно записать в виде

$$\gamma = \sqrt{\pi/2e} \omega_{pe} (n_{0b} / n_0) (u^2 v_{Tb}^2) \cos^2 \theta; \quad \cos \theta = k_z / k. \quad (1.152)$$

Таким образом, максимум инкремента достигается для волн, распространяющихся вдоль пучка.

В силу аксиальной симметрии задачи удобно ввести цилиндрические системы координат в пространстве скоростей и волновых векторов (v_z, v_\perp, φ) и (k_z, k_\perp, φ') с осью z , направленной вдоль \mathbf{u} . Тогда скалярное произведение $(k\mathbf{v})$ можно записать в виде $(k\mathbf{v}) = k_z v_z + k_\perp v_\perp \cos(\varphi - \varphi')$, а произведение $(k \partial f_0 / \partial \mathbf{v}) = k_z \partial f_0 / \partial v_z + k_\perp \cos(\varphi - \varphi') \partial f_0 / \partial v_\perp$, так как f_0 в силу аксиальной симметрии не зависит от угла φ .

Итак, выражение для γ принимает вид

$$\begin{aligned}
\gamma = (\pi/2) (\omega_{pe}^3 / k^2 n_0) \int [k_z \partial f_0 / \partial v_z + k_\perp \cos(\varphi - \varphi') \partial f_0 / \partial v_\perp] \times \\
\times \delta[\omega_{pe} - k_z v_z - k_\perp v_\perp \cos(\varphi - \varphi')] v_\perp dv_\perp dv_z d\varphi.
\end{aligned}$$

Интегрируя по углу φ в пространстве скоростей от 0 до 2π , получим

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2 n_0} \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_{\frac{-k_\perp v_\perp + \omega_{pe}}{k_z}}^{\frac{\omega_{pe} + k_\perp v_\perp}{k_z}} \times$$

$$\times \frac{k_z \partial f_0 / \partial v_z + [(\omega_{pe} - k_z v_z) / v_\perp] \partial f_0 / \partial v}{\sqrt{1 - [(\omega_{pe} - k_z v_z) / k_\perp v_\perp]^2} k_\perp v_\perp} dv_z. \quad (1.153)$$

Напомним, что инкремент гидродинамической неустойчивости от угла не зависит, поэтому на гидродинамической стадии релаксации пучка функция распределения в окрестности точки $v_z = u$ меняется изотропно. При этом можно считать, что $\Delta v_z \sim \Delta v_\perp$. Оценим сначала числитель подынтегрального выражения. Величину $k_z \partial f_0 / \partial v_z$ можно записать как $-k_z f_0 / \Delta v$, $v_z = u + \Delta v$, а $\partial f_0 / \partial v_\perp \sim -f_0 / \Delta v$, $v_\perp \sim \Delta v$. Тогда $k_z \partial f_0 / \partial v_z + [(\omega_{pe} - k_z v_z) / v_\perp] \partial f_0 / \partial v_\perp \sim [f_0 / (\Delta v)^2] (k_z u - \omega_{pe})$. Если в качестве функции распределения взять максвелловскую функцию, смещенную вдоль оси z на u , с одинаковыми тепловыми скоростями v_{zT}^b и $v_{\perp T}^b$, то получится тот же ответ. Из условия положительности подкоренного выражения в формуле (1.153) следует, что

$$(\omega_{pe} - k_z u) < k_\perp v_\perp \sim k_\perp \Delta v; \quad (1.154)$$

$$\gamma \sim (\omega_{pe}^3 / k^2) (n_{0b} / n_0) [f_0 / (\Delta v)^2] |\omega_{pe} - k_z u| (\Delta v)^3 / k_\perp v_\perp. \quad (1.155)$$

Максимальное значение $|\omega_{pe} - k_z u|$ порядка $k_\perp \Delta v$, поэтому

$$\gamma \sim \omega_{pe} (n_{0b} / n_0) [u^2 / (\Delta v)^2] [1 + (k_\perp u / \omega_{pe})^2]^{-1}. \quad (1.156)$$

Первое и второе уравнения (1.150) можно объединить:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{k}}{k} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) W_{k\pi} \frac{4\pi e^2}{m^2} \delta[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] d^3 k.$$

Но, как уже показано, при вычислении инкремента производные типа $\mathbf{k} \partial f_0 / \partial \mathbf{v}$ довольно просто записываются в цилиндрической системе координат. Рассмотрим выражение

$$\operatorname{div}_v \left\{ \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) \right\} = \operatorname{div}_v \left\{ \mathbf{k} \left[k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + k_\perp \cos(\varphi - \varphi') \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right] \right\}.$$

Здесь, как и прежде, полагаем $\partial f_0 / \partial \varphi = 0$ в силу аксиальной симметрии системы. Операция $\operatorname{div}_v \mathbf{A}$ означает взятие дивергенции в пространстве скоростей от вектора \mathbf{A} . В цилиндрической системе координат имеем $\operatorname{div}_v \mathbf{A} = (1/v_\perp) (\partial / \partial v_\perp) v_\perp (\mathbf{e}_{\perp v} \mathbf{A}) + (\partial / \partial v_z) (\mathbf{e}_{zv} \mathbf{A})$. Производные по углу отсутствуют, так как \mathbf{A} не

зависит от φ ; единичные векторы $\mathbf{e}_{\perp v}$ и \mathbf{e}_{zv} направлены в пространстве скоростей по радиусу и оси z соответственно. Найдем теперь скалярные произведения $(\mathbf{e}_{\perp v} \mathbf{k})$ и $(\mathbf{e}_{zv} \mathbf{k})$. Они равны соответственно $(\mathbf{e}_{\perp v} \mathbf{k}) = (\mathbf{k} \mathbf{v}_{\perp}) / v_{\perp} = (k_x v_x + k_y v_y) / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k_{\perp} \cos(\varphi - \varphi')$; $(\mathbf{e}_{zv} \mathbf{k}) = k_z$.

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_v \{ \mathbf{k} (k \partial f_0 / \partial \mathbf{v}) \} = & (1/v_{\perp}) (\partial / \partial v_{\perp}) \{ v_{\perp} [k_{\perp}^2 \cos^2(\varphi - \varphi') \partial f_0 / \partial v_{\perp} + \\ & + k_{\perp} k_z \cos(\varphi - \varphi') \partial f_0 / \partial v_z] \} + (\partial / \partial v_z) [k_z^2 \partial f_0 / \partial v_z + \\ & + k_{\perp} k_z \cos(\varphi - \varphi') \partial f_0 / \partial v_{\perp}]. \end{aligned}$$

Квазилинейное уравнение для функции распределения [(1.150), первое уравнение] можно записать как

$$\begin{aligned} \partial f_0 / \partial t = & (\partial / \partial v_z) (D_{zz} \partial f_0 / \partial v_z + D_{z\perp} \partial f_0 / \partial v_{\perp}) + \\ & + (1/v_{\perp}) (\partial / \partial v_{\perp}) v_{\perp} (D_{z\perp} \partial f_0 / \partial v_z + D_{\perp\perp} \partial f_0 / \partial v_{\perp}), \end{aligned} \quad (1.157)$$

где $D_{\alpha\beta}$ [см. уравнение (1.150)] имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} D_{zz} \\ D_{z\perp} \\ D_{\perp\perp} \end{array} \right\} = \pi \frac{4\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \int_{\frac{v_{\perp} + \omega_{pe}}{v_z}}^{\frac{k_{\perp} v_{\perp} + \omega_{pe}}{v_z}} dk_z \frac{W(k_z, k_{\perp})}{\sqrt{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (\omega_{pe} - k_z v_z)^2}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} k_z^2 & \\ \frac{\omega_{pe} - k_z v_z}{v_{\perp}} & k_z \\ \frac{(\omega_{pe} - k_z v_z)^2}{v_{\perp}^2} & \end{pmatrix}. \quad (1.158)$$

Напомним, что в одномерном случае легко найти стационарное состояние функции распределения пучка $f_{\infty}(v_x) = \text{const}$. Не решая квазилинейных уравнений, можно найти и стационарный уровень энергии шумов интегрированием «квазилинейного интеграла». Попробуем провести аналогичные рассуждения для трехмерной задачи.

Из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии следует, что энергия шумов в конечном состоянии должна быть надтепловой. Действительно, в конечном состоянии в отсутствие шумов выполнялись бы соотношения $\int f_{\infty}^0 d^3 \mathbf{v} = n'$; $\int \mathbf{v} f_{\infty}^0 d^3 \mathbf{v} = n' \mathbf{u}$; $\int u^2 \times \times f_{\infty}^0 d^3 \mathbf{v} = n' u^2$ и, следовательно, $\int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f_{\infty}^0 d^3 \mathbf{v} = 0$. Таким образом, в отсутствие шумов надтепловой энергии в конечном состоянии функция распределения отличалась бы от нуля только при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$,

т. е. совпадала бы с функцией начального состояния, которое по определению неустойчиво. Чтобы получить дополнительную информацию о форме колебаний в конечном состоянии, воспользуемся следующим формальным приемом [39, 40]. Умножая уравнение (1.148) на f_0 и интегрируя по скоростям с учетом того, что на бесконечности f_0 обращается в нуль, получаем

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t) \int (f_0^2/2) d^3v &= - \int D_{\alpha\beta} (\partial f_0/\partial v_\alpha) (\partial f/\partial v_\beta) d^3v = \\ &= - \pi (4\pi e^2/m^2) \int d^3k d^3v W (k \partial f_0/\partial v)^2 \delta[\omega_{pe} - (k v)]. \end{aligned}$$

Если конечное состояние стационарно, то $\partial f_\infty^0/\partial t = 0$ и выполняется соотношение

$$\int d^3k d^3v W_\infty (k \partial f_\infty^0/\partial v)^2 \delta[\omega_{pe} - (k v)] = 0,$$

или в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^\infty k_\perp dk_\perp W_\infty(k_z, k_\perp) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int_{\frac{\omega_{pe}-k_\perp v_\perp}{k_z}}^{\frac{\omega_{pe}+k_\perp v_\perp}{k_z}} v_\perp dv_\perp \times \\ \times \frac{\{[(\omega_{pe} - k_z v_z)/v_\perp] \partial f_0/\partial v + k_z \partial f_0/\partial v_z\}^2}{\sqrt{k_\perp^2 v_\perp^2 - (\omega_{pe} - k_z v_z)^2}} = 0. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, она тождественно равна нулю. Из сказанного выше следует, что энергия шумов в конечном состоянии также не равна нулю, и, кроме того, известно, что $W_k > 0$. Тогда должно выполняться равенство

$$[(\omega_{pe} - k_z v_z)/v_\perp] \partial f_0/\partial v + k_z \partial f_0/\partial v_z = 0. \quad (1.160)$$

Будем считать сначала, что $W(k_z, k_\perp)$ отлична от нуля в точке k_\perp, k_z . Тогда уравнение (1.160) справедливо во всей области пространства скоростей, определяемой следующим образом: $\infty > v_z > > -\infty, v > |\omega_{pe} - k_z v_z|/k_\perp$ [в противном случае подкоренное выражение в формуле (1.159) становится мнимым]. Уравнение (1.160) можно решить и методом характеристик: $[dv/(\omega_{pe} - k_z v_z)] v_\perp = dv_z/k_z$, т. е. $v^2 + (v_z - \omega_{pe}/k_z)^2 = \text{const}$. Общее решение уравнения (1.160) есть любая произвольная функция константы, т. е.

$$f_\infty^0 = f_\infty^0 \{ v_\perp^2 + (v_z - \omega_{pe}/k_z)^2 \}. \quad (1.161)$$

Таким образом, функция распределения в конечном состоянии постоянна вдоль окружностей с центром в точке ω_{pe}/k_z (рис 18).

Здесь пунктирными линиями обозначены границы области $v_{\perp} > | \omega_{pe} - k_z v_z | / k_{\perp}$.

Если функция $W(k_z, k_{\perp})$ в конечном состоянии отлична от нуля в двух точках k -пространства, уровни постоянного значения функ-

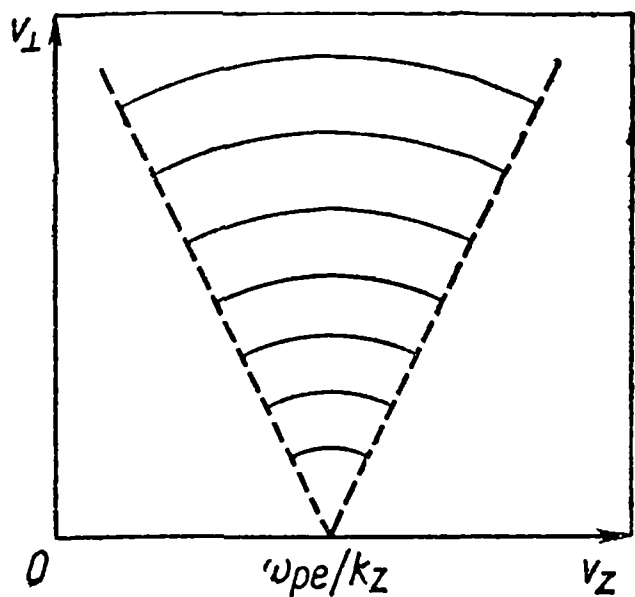


Рис. 18

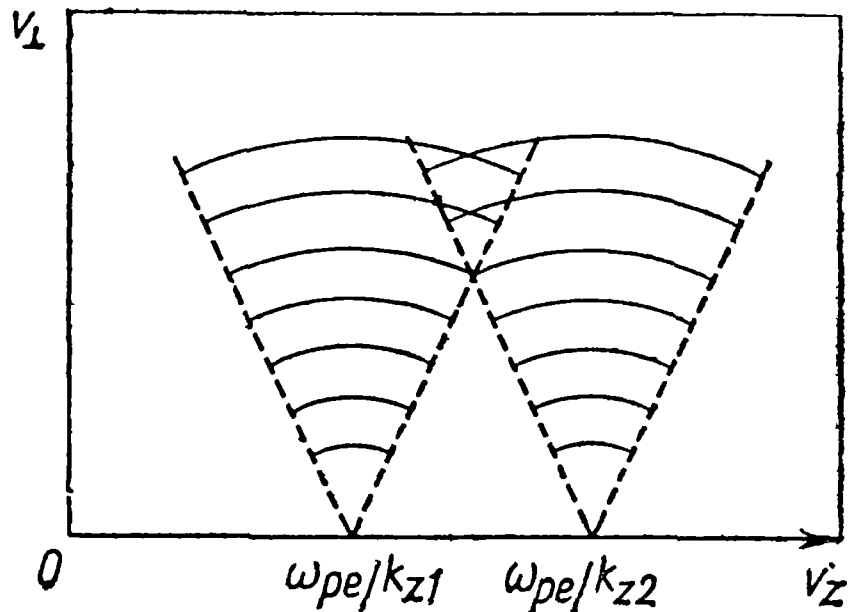


Рис. 19

ции распределения имеют вид, изображенный на рис. 19. Из рис. 19 видно, что происходит пересечение характеристик, и если бы функция $W(k_z, k_{\perp})$ была отлична от нуля в некотором интервале значений k_z , то функция распределения частиц пучка f_0 в конечном состоянии равнялась бы константе в области бесконечно больших скоростей, что, вообще говоря, несовместимо с законом сохранения энергии. Таким образом, можно считать, что спектр колебаний в конечном состоянии отличается от нуля в нескольких дискретных точках k -пространства [41].

Итак, квазилинейное приближение для трехмерной релаксации пучка в плазме дает только общие способы определения параметров системы в конечном состоянии, не позволяя определить ни конкретные значения k_z и k_{\perp} , ни точный вид функции распределения. Кроме того, может оказаться, что система уравнений (1.150) не имеет стационарного решения. Чтобы разобраться во всем этом, следует решить задачу о динамике релаксации функции распределения пучка [42].

Рассмотрим начальную стадию процесса, когда шумы еще невелики и функцию распределения можно считать стационарной. В этом случае колебания в плазме описываются линейным уравнением (1.151) с не зависящим от времени инкрементом, который в случае Максвелловской функции распределения частиц пучка

$$f = (1/\pi^{3/2} v_T^3) \exp \left[- (v_z - u)^2 / v_T^2 - v_{\perp}^2 / v_T^2 \right], \quad (1.162)$$

где $v_T = \sqrt{2T_b/m}$, описывается соотношением (1.152). Косые волны возбуждаются медленнее продольных, что может привести на начальной стадии к одномерной релаксации вдоль пучка.

Для определения зависимости энергии шумов от k_{\perp} обратимся к решению уравнения (1.150)

$$W = W_0 \exp(2\gamma t) \quad (1.163)$$

с инкрементом γ , определяемым формулой (1.152). Подставляя в (1.163) время выхода на нелинейный режим $\tau \sim (1/2\gamma_{\max}) \times \times \ln(W_\infty/W_0)$, оцененное по максимальному инкременту, получим спектр энергии шумов по k_\perp :

$$W(k_\perp) = W_0 \exp\{-k_\perp^2/\Delta k^2\}, \quad (1.164)$$

где $\Delta k = k_z/\sqrt{\Lambda}$. Угол раствора конуса определяется соотношением

$$\Delta\theta \sim 1/\sqrt{\Lambda} \ll 1. \quad (1.165)$$

Таким образом, на начальной стадии спектр энергии шумов, возбуждаемых пучком, близок к спектру в одномерном случае, поэтому можно воспользоваться результатами одномерной теории (§ 1.11). Представим трехмерную функцию распределения в виде

$$f = f_z(1/\pi v_{T\perp}^2) \exp(-v_\perp^2/v_{T\perp}^2) \quad (1.166)$$

и будем считать согласно одномерной теории, что в начальный момент релаксации на функции f_z образовались фронт и плато. Исследуем это распределение на устойчивость. В области плато инкремент колебаний, как и в одномерном случае, равен нулю. В зоне фронта заменим f_z модельной максвелловской функцией распределения с $v_{Tz} = \Delta u$ (Δu — ширина фронта) и рассмотрим инкремент колебаний. Зависимость максимального инкремента от угла в этом случае несколько отличается от (1.152) и имеет вид

$$\gamma = \sqrt{\pi/2e} \omega_{pe} (n_{b0}/n_0)(u_0^2/v_{Tz}^2) [v_{Tz}/(u_0 - u)](1 + \operatorname{tg}^2 \theta v_T^2/v_{Tz}^2)^{-1}, \quad (1.167)$$

где u — текущая координата фронта. Отличие от формулы (1.152) заключается в том, что в формуле (1.167) произведено обобщение на случай разных тепловых разбросов пучка в продольном и поперечном направлениях. Наличие множителя $v_{Tz}/(u_0 - u)$ отражает тот факт, что в возбуждении колебаний по мере вытягивания плато принимает участие все меньшая доля электронов пучка.

Спектр колебаний, возбуждаемых таким пучком, описывается, как и при равных разбросах, формулой (1.164), но с другой шириной по k :

$$\Delta k = (k_z/\sqrt{\Lambda})(v_{Tz}/v_{T\perp}). \quad (1.168)$$

Это приводит, как и раньше, к появлению шумов в узком диапазоне углов вдоль направления распространения пучка. Таким образом, оказывается, что не только на начальной стадии, но и в течение всего последующего процесса релаксации шумы развиваются в узком конусе с углом раствора

$$\Delta\theta \sim \Delta u/\sqrt{\Lambda} v_{T\perp} \ll 1. \quad (1.169)$$

Узость спектра энергии на всех этапах взаимодействия электронно-

го пучка с плазмой позволяет полностью применить выводы одномерной теории к трехмерной релаксации пучка.

Сразу оговоримся, что оценка ширины спектра энергии шумов по углу $\Delta\theta$, определяемая соотношением (1.169), не совсем точна. Дело в том, что на любой функции распределения существуют области, где зависимость инкремента от угла не только более слабая, чем в формуле (1.152), но даже обратная, т. е. в этих областях косые волны возбуждаются быстрее продольных. Исследуем это более подробно. Рассмотрим инкремент колебаний, возбуждаемых электронным пучком с функцией распределения вида (1.166). После интегрирования по $v_{T\perp}$ эта формула преобразуется к виду

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2 k_{\perp} v_{T\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(k_z \frac{\partial f_z}{\partial v_z} + \frac{2(\omega_{pe} - k_z v_z)}{v_{T\perp}^2} f_z \right) \exp \left\{ -\frac{(\omega_{pe} - k_z v_z)^2}{k^2 v_{T\perp}^2} \right\} dv_z. \quad (1.170)$$

В этом выражении можно провести интегрирование по частям:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2 k_{\perp} v_{T\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \exp \left\{ \frac{(\omega_{pe} - k_z v_z)^2}{k_{\perp}^2 v_{T\perp}^2} \right\} dv_z. \quad (1.171)$$

Для колебаний с достаточно малым разбросом по поперечным скоростям, таким, что выполняется неравенство

$$(\partial f_z / \partial v_z) / (\partial^3 f_z / \partial v_z^3) \gg k^2 v_{T\perp}^2 / k_z^2, \quad (1.172)$$

инкремент преобразуется к «одномерному» виду:

$$\gamma = (\pi/2)(n_{ob}/n_0)(\omega_{pe}^3/k_z^2)(\partial f_z / \partial v_z). \quad (1.173)$$

Для получения зависимости γ от k_{\perp} учтем члены разложения более высокого порядка. Тогда выражение (1.173) примет вид

$$\gamma = (\pi/2)(n_{ob}/n_0)(\omega_{pe}^3/k_z^2) \left[\partial f_z / \partial v_z + k_{\perp}^2 (v_{T\perp}^2 / 4k_z^2) \partial^3 f_z / \partial v_z^3 \right]. \quad (1.174)$$

Из этой формулы видно, что зависимость γ от k определяется знаком $\partial^3 f_z / \partial v_z^3$. Поскольку знак третьей производной меняется, на любой функции распределения существуют области, где инкремент косых колебаний выше инкремента продольных. В частности, для максвелловской функции распределения вида (1.162) знак $\partial^3 f_z / \partial v_z^3$ отрицателен в областях I ($v_z < u - v_{T\perp} \sqrt{3/2}$) и II ($u_0 < v_z < u_0 + v_{T\perp} \sqrt{3/2}$) и положителен в областях III ($u_0 - v_{T\perp} \sqrt{3/2} < v_z < u_0$) и IV ($u_0 + v_{T\perp} \sqrt{3/2} < v_z$). Поэтому в области I косые колебания возбуждаются медленнее, в области II — быстрее продольных. В области III косые колебания затухают быстрее, а в области IV — медленнее продольных.

Рассмотрим инкремент для функции распределения с достаточно большим разбросом по поперечным скоростям $v_{T\perp}$, для которых условие (1.172) нарушается. Так как в этом случае приближение локальной связи между γ и $\partial f_z / \partial v_z$ несправедливо, форма склонов функции f_z не существенна. Поэтому будем считать, что

$$f_z = \begin{cases} c \exp [-(v_z - u)^2 / v_{T_1}^2] & \text{при } v_z < u; \\ c & \text{при } u < v_z < u_0; \\ c \exp [-(v_z - u_0)^2 / v_{T_2}^2] & \text{при } u_0 < v_z. \end{cases}$$

После этого интегрирование в формуле (1.171) проводится легко, и инкремент преобразуется к виду

$$\gamma = (\sqrt{\pi}/2)(n_{0b}/n_0)(\omega_{pe}^3/k_z^3) k_{\perp} v_{T\perp} c [(1/v_{T_1}^2 \mu_1) \times \\ \times \exp(-\nu_1^2) \xi(\nu_1/\mu_1) - (1/v_{T_2}^2 \mu_2) \exp(-\nu_2^2) \xi(\nu_2/\mu_2)], \quad (1.175)$$

где $\mu_1 = \sqrt{1 + v_{T\perp}^2 k_{\perp}^2 / v_{T_1}^2 k_z^2}$; $\mu_2 = \sqrt{1 + v_{T\perp}^2 k_{\perp}^2 / v_{T_2}^2 k_z^2}$;

$$\nu_1 = (\omega_{pe} - k_z u) / k_{\perp} v_{T\perp}; \quad \nu_2 = (k_z u_0 - \omega_{pe}) / k_{\perp} v_{T\perp};$$

$\xi(x) = 1 - \sqrt{\pi} x \exp(-x^2)[1 - \Phi(x)]$; $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

При $x \ll 1$ функцию $\xi(x)$ можно представить в виде ряда $\xi(x) = 1 - \sqrt{\pi} x + 2x^2 - \dots$, а при $x \gg 1$ она имеет асимптотику $\xi(x) = 1/2x^4 - 3/4x^4 + \dots$. Из формулы (1.175) видно, что инкремент максимален в области значений $v_{\phi z} = \omega_{pe}/k_z \approx u_0 - v_{T_1}$ и минимален при $v_{\phi z} \approx u_0 + v_{T_2}$. Однако он не обращается в нуль и в диапазоне $u < v_{\phi z} < u_0$, совпадающем с плато на функции распределения, хотя в этой области γ значительно меньше. Основными множителями, уменьшающими абсолютное значение инкремента при удалении областей $k_z \sim \omega_{pe}/u$ и $k_z \sim \omega_{pe}/u_0$, являются $\exp(-\nu_1^2)$ и $\exp(-\nu_2^2)$. Поэтому для колебаний, попадающих по фазовой скорости в область плато и отстоящих от его краев на расстоянии $\Delta v_{\phi z} > v_{T\perp} k_{\perp}/k_z$, инкремент очень мал. Важно отметить, что диапазон $v_{\phi z}$, для которых инкремент значителен, растет с увеличением k . Поэтому косые волны с $k_{\perp} \sim k_z$ могут возбуждаться даже с фазовыми скоростями, значительно отличающимися от скорости фронта, и затухать при $v_{\phi z}$, значительно меньших u_0 . При $k_{\perp} v \ll k_z (u_0 - u)$ инкремент вообще обратится в нуль. Таким образом, колебания возбуждаются в более широком конусе, чем определено соотношением (1.169). Однако главный вывод об узости спектра ($\Delta\theta \ll 1$) остается справедливым.

Основываясь на проведенном выше анализе инкремента колебаний для функции вида (1.166), можно сделать вывод, что к моменту, когда $v_{T\perp}$ существенно возрастет, косые колебания с $k_z \leq \omega_{pe}/u_0$, появившиеся на ранних стадиях релаксации, будут затухать. При этом они будут отдавать энергию частицам пучка, несколько вытя-

гивая хвост функции распределения. Степень вытягивания хвоста зависит от энергии, запасенной в косых колебаниях с $k_z \sim \omega_{pe}/u_0$, т. е. на начальной стадии релаксации. Пучки с большим тепловым разбросом возбуждают на начальной стадии релаксации колебания в узком конусе вдоль направления своего распространения. Поэтому вытягивание хвоста будет заметно лишь для моноэнергетических пучков. В аналитическом рассмотрении трудно учесть вытягивание хвоста функции распределения, однако численные расчеты позволяют это сделать.

Нетрудно показать, что трехмерные квазилинейные уравнения с узким спектром энергии шумов по k_\perp [см. (1.164)] сводятся к одномерным уравнениям для функции $f_z(v_z) = \int f dv_x dv_y$ и $W_z = \int W dk_x dk_y$:

$$\frac{\partial f_z}{\partial t} - \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_z} \left(\frac{W_z}{v_z} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right) - \frac{\Delta k^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial}{\partial v_z} \left[f_z \frac{\partial}{\partial v_z} (W_z v_z) \right] \right\}; \quad (1.176)$$

$$\partial W_z / \partial t = \pi(n_{0b}/n_0) \omega_{pe}^2 v_z^2 W_z \partial f_z / \partial v_z. \quad (1.177)$$

При выводе этих уравнений использованы разложения функции распределения f_z в точке $v_z = \omega_{pe}/k_z$ и одномерного спектра энергии шумов W_k в точке $k_z = \omega_{pe}/v_z$, которыми можно пользоваться при выполнении неравенства

$$\Delta k v_{T\perp} \leq k_z \Delta u, \quad (1.178)$$

где Δu — ширина фронта.

Для решения системы (1.176), (1.177) в пределе малых, но конечных Δk поступим так же, как это было сделано в одномерном случае [28]. Найдем решение в области фронта, где резко возрастают энергия шумов и функция распределения, и на плато, где значение f_z почти не меняется. Фронт при этом предполагается движущимся медленно со скоростью $u = u(\tau)$. Полное решение получим в результате сшивки найденных решений в точке u^* .

В области фронта будем искать решение уравнений (1.176), (1.177) в виде

$$f_z(v_z, \tau) = f_z(\eta); \quad W_z(v_z, \tau) = W_z(\eta), \quad (1.179)$$

где $\eta = v_z - u(\tau)$. Тогда производные $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial v_z$ заменятся на $-u \dot{d}/d\eta$ и $d/d\eta$, а сами уравнения примут вид

$$(P/C_1) \partial f_z / \partial \eta = (d/d\eta)(G df_z/d\eta) - Q(d/d\eta)(f_z dG/d\eta); \quad (1.180)$$

$$(P/C_2) dG/d\eta - G df_z/d\eta. \quad (1.181)$$

Здесь введены обозначения $P = -u/\dot{u}^2$; $Q = \Delta k^2 u^2 / \omega_{pe}^2$;

$$G = W_z/v_z^2; \quad C_1 = 4\pi^2 e^2/m^2; \quad C_2 = \pi \omega_{pe} n_{0b}/n_0$$

и использовано предположение об узости фронта ($\eta \ll u_0 - u$). Проинтегрируем оба уравнения по η и подставим f_z , выраженное из уравнения (1.181), в формулу (1.180). После преобразований получим

$$dG/d\eta = (P/C_1) \ln(G/G_0) [1 - Q \ln(G/G_0)]; \quad (1.182)$$

$$f_z = (P/C_2) \ln(G/G_0). \quad (1.183)$$

Уравнение (1.182) с точностью до множителя $1 - Q \ln(G/G_0)$ совпадает с уравнением, описывающим фронт одномерной релаксации. Дополнительный множитель может только привести к «укручению» фронта при $\ln(G/G_0) \gg 1$. Однако при крутизне фронта, большей некоторой, исходные уравнения (1.176), (1.177) неприменимы из-за нарушения условия возбуждения колебаний ($\Delta v \sim \gamma/k$). Поэтому в области применимости уравнений (1.176), (1.177) уравнение (1.182) можно заменить соотношением, определяющим форму фронта в одномерной задаче:

$$dG/d\eta = (P/C_1) \ln(G/G_0). \quad (1.184)$$

Таким образом, до тех пор, пока фронт не станет слишком крутым и не нарушится локальная связь между df_z/dv_z и γ , форма фронта по оси z полностью совпадает с формой фронта в одномерном случае. При крутизне фронта, большей некоторой, локальная связь между df_z/dv_z и γ нарушается. Рассмотрим этот случай подробнее.

При $\Delta u \leq \gamma/k$ на фронте по оси z , получающемся в процессе релаксации электронного пучка, возбуждаются гидродинамические колебания с инкрементом

$$\gamma = \omega_{pe} \sqrt{n_{ob}/2n_0} \sqrt{u/(u_0 - u)} \cos \theta. \quad (1.185)$$

При этом шумы развиваются не только в области фронта, но и на расстоянии γ/k от него. Возрастание энергии шумов приведет к появлению значительного коэффициента диффузии перед фронтом и, следовательно, к увеличению ширины фронта до $\Delta u \sim \gamma/k$. Таким образом, из-за появления нелокальной связи между γ и df_z/dv_z минимальная ширина фронта ограничивается значением

$$\Delta u \sim u \sqrt{n_{ob}/n_0} \sqrt{u/(u_0 - u)}. \quad (1.186)$$

Это ограничение искажает форму фронта, но не влияет на скорость его движения, так как время, в течение которого фронт продвинется на расстояние порядка своей ширины Δu , равно времени нарастания энергии шумов от начального уровня до конечного. Поэтому скорость движения фронта \dot{u} можно оценить следующим образом:

$$\dot{u} \sim \Delta u / \tau \sim (\Delta u / \Lambda) \gamma. \quad (1.187)$$

Как следует из неравенства (1.186), фронт никогда не может стать слишком узким. Крутизна его поддерживается на границе возбуждения гидродинамических и кинетических колебаний ($\Delta u \sim \gamma/k$).

Поэтому в области фронта всегда можно пользоваться кинетическим инкрементом (1.167). Подставив его в соотношение (1.187), получим уравнение, определяющее скорость движения фронта:

$$\dot{u} \sim (n_{0b}/n_0) [u^2/(u_0 - u)] \omega_{pe}/\Lambda. \quad (1.188)$$

Отметим, что в это уравнение ширина фронта не входит.

Решение уравнений (1.176), (1.177) в области за фронтом будем искать в виде суммы значения на плато $C(\tau)$ и малой добавки δf_z :

$$f_z = C(\tau) + \delta f_z. \quad (1.189)$$

Значение функции распределения за фронтом определяется условием нормировки и равно

$$C(\tau) = 1/(u_0 - u). \quad (1.190)$$

Добавку δf_z найдем, подставив решение вида (1.189) в уравнение (1.176):

$$\delta f_z = - \int_{u^*}^{u_0} \frac{C(\tau)(u_0 - v_z)}{C_1 G(v_z) v_z^2} dv_z + \int_{u^*}^{u_0} \frac{\Delta k^2 v_z^2}{\omega_{pe}^2 (u_0 - u)} \frac{\partial}{\partial v_z} \ln(Gv_z^4) dv_z. \quad (1.191)$$

Оценим каждый из стоящих в правой части интегралов. В первый интеграл подставим $C(\tau)$ в виде (1.190), а произведение $v_z^2 G(v_z)$ заменим его минимальным значением, которое достигается в точке сшивки u^* :

$$\left| \int_{u^*}^u \frac{C(\tau)(u_0 - v_z)}{C_1 G(v_z) v_z^2} dv_z \right| \ll C(\tau) \frac{|\dot{u}|(u_0 - u)}{C_1 G(u^*) u^{*2}}. \quad (1.192)$$

Подставляя сюда найденное из уравнения (1.184) значение $G(u^*) = (P/C_1) \Lambda \eta^*$, получаем

$$\left| \int_{u^*}^{u_0} \frac{C(\tau)(u_0 - v_z)}{C_1 G(v_z) v_z^2} dv_z \right| \ll C(\tau) \frac{u_0 - u}{\Lambda \eta^*}.$$

Для оценки второго интеграла в формуле (1.191) заменим произведение $(\Delta k v_z)^2$ его максимальным значением $(\Delta k v_z)_{\text{макс}}^2$; в итоге получим

$$\left| \int_{u^*}^{u_0} \frac{\Delta k^2 v_z^2}{\omega_{pe}^2 (u_0 - u)} \frac{\partial}{\partial v_z} \ln(Gv_z^4) dv_z \right| < C(\tau) \left(\frac{\Delta k}{k} \right)_{\text{макс}}^2 \ln \left[\frac{u_0^4 G(u_0)}{u^{*4} G(u^*)} \right].$$

Из приведенных оценок видно, что при удалении от фронта, большем $(u_0 - u)/\Lambda$, оба интеграла малы по сравнению со значением

функции на плато, т. е. f_z в этой области практически не зависит от v_z . Таким образом, существует точка u^* , находящаяся на расстоянии $(u_0 - u)/\Lambda$ от фронта, в которой можно пользоваться как решением (1.189), справедливым на плато, так и, в силу того, что η мало [$\eta \ll u - u^* = (u_0 - u)/\Lambda < u_0 - u$], решением (1.183), (1.184), описывающим фронт.

Произведем сшивку решений в точке u^* . Слева от u^* воспользуемся формулой (1.183), справа возьмем значение функции распределения на плато. Приравняв их, найдем уравнение движения фронта:

$$-\dot{u}/u^2 (1/C^2) \ln [G(u^*)/G_0] = 1/(u_0 - u).$$

С большой точностью можно заменить $\ln[G(u^*)/G_0]$ величиной Λ . В итоге получим

$$-\dot{u} (u_0 - u)/u^2 = (\pi\omega_{pe}/\Lambda) n_{ob}/n_0. \quad (1.193)$$

Это уравнение совпадает с уравнением, описывающим движение фронта в одномерном случае. Решение его имеет вид

$$u/u_0 + \ln(u/u_0) = 1 + (\pi/\Lambda) (n_{ob}/n_0) \omega_{pe} \tau. \quad (1.194)$$

Точный анализ вводит небольшую поправку в ширину спектра Δk , выраженную формулой (1.168), а именно

$$\Delta k_{сТ} = 2k_z (u_0 - u) v_{T\perp} \Lambda, \quad (1.195)$$

т. е. $\Delta k_{сТ}$ несколько больше, чем это следует из качественных оценок.

Остановимся подробнее на определении зависимости $v_{T\perp}(t)$, поскольку именно увеличение разброса по поперечным скоростям существенно отличает трехмерную релаксацию от одномерной. Рост $v_{T\perp}$ происходит в области плато, где энергия шумов уже не меняется. Поэтому за фронтом можно решать задачу о «диффузии» функции распределения, т. е. следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial v_z} \left(D \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) + \frac{\partial}{\partial v_z} \left(\frac{v}{v_z} \frac{\alpha}{2} D \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{1}{v} \frac{d}{dv_{\perp}} \left(v \frac{v}{v_z} \frac{\alpha}{2} D_1 \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) + \frac{\alpha}{2v} \frac{\partial}{\partial v} \left(v D \frac{\partial f}{\partial v} \right), \end{aligned} \quad (1.196)$$

где $D = (8\pi^2 e^2/m^2) W_z/v_z$; $D_1 = (8\pi^2 e^2/m^2) (W_z/v_z + \partial W_z/\partial v_z)$; $\alpha = \Delta k^2 (v_z) v_z^2/\omega_{pe}^2 = \Delta k^2/k_z^2$ — малый параметр. В этом уравнении Δk рассматривается как функция v_z , так как это фактически ширина спектра энергии шумов, образовавшихся при прохождении фронта через точку v_z . Но поскольку коэффициенты диффузии D и D_1 имеют один порядок, а в три последних члена правой части уравне-

ния (1.196) входит малый параметр α , определяющим является первый член, описывающий продольную диффузию. Это приводит к значительной разнице градиентов функции распределения по продольному и поперечному направлениям: $\partial f/\partial v_z \ll \partial f/\partial v_\perp$. Учитывая, что отношение v_\perp/v_z мало, пренебрежем вторым и третьим членами в правой части уравнения (1.196). Тогда получим

$$\begin{aligned} \partial f/\partial t = (\alpha/2) D [(1/v_\perp) (\partial f/\partial v_\perp) + \partial^2 f/\partial v_\perp^2] + \\ + (\partial/\partial v_z) (D \partial f/\partial v_z). \end{aligned} \quad (1.197)$$

Это уравнение описывает область плато, т. е. $u(\tau) < v_z < u_0$, $0 < v_\perp < \infty$ с начальным распределением

$$f = \{1/[u_0 - u(\tau)]\} (1/v_{T_0}^2 \pi) \exp(-v_\perp^2/v_{T_0}^2) \quad (1.198)$$

и с движущейся границей, определяемой уравнением (1.194). Коэффициент диффузии D — известная функция v_z , а параметр α зависит от разброса по поперечным скоростям, который определяется лишь из решения уравнения. Движущаяся граница и зависящий от решения коэффициент αD значительно затрудняют поиски точного решения, но наличие малого параметра $\alpha(v_z)$ позволяет сделать важные оценки.

В области плато определяющим эффектом является продольная диффузия. Она приводит к сглаживанию различия разброса по поперечным скоростям, вызванного зависимостью коэффициента поперечной диффузии от v_z . Считая в нулевом приближении функцию распределения не зависящей от v_z , проинтегрируем уравнение (1.197) по v_z от $u(\tau)$ до u_0 и получим уравнение, описывающее среднюю поперечную диффузию:

$$\partial f/\partial t = \bar{D}_\perp(t) [(1/v_\perp) \partial f/\partial v_\perp + \partial^2 f/\partial v_\perp^2]. \quad (1.199)$$

Здесь введен средний коэффициент поперечной диффузии

$$\bar{D}_\perp(t) = [1/2(u_0 - u(\tau))] \int_{u(\tau)}^{u_0} \alpha(v_z) D(v_z) dv_z. \quad (1.200)$$

Решением уравнения (1.199) с начальным условием (1.198) является функция распределения

$$f = [1/(u_0 - u)] (1/\pi v_T^2) \exp(-v_\perp^2/v_T^2), \quad (1.201)$$

в которой поперечная температура следующим образом зависит от времени:

$$v_T^2 = v_{T_0}^2 + 4 \int_{\tau_0}^t \bar{D}_\perp(\tau) d\tau. \quad (1.202)$$

Подставив полученное решение в формулу (1.194), получим интегральное уравнение для $\alpha(u)$:

$$v_{T_0}^2 + 2 \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{(u_0 - u)} \int_{u(\tau)}^{u_0} \alpha v_z D(v_z, u) dv_z = \frac{4(u_0 - u)^2}{\Lambda^2 \alpha(u)}. \quad (1.203)$$

Это уравнение удается свести к дифференциальному уравнению третьего порядка

$$-\frac{\Lambda^3}{2} u^3 \alpha(u) = \frac{d}{du} \left\{ u^2 \frac{d}{du} \left[u(u_0 - u) \frac{d}{du} \frac{(u_0 - u)^2}{\alpha(u)} \right] \right\}, \quad (1.204)$$

которое решается численно.

Семейство интегральных кривых уравнения (1.204) для различных v_{T_0} приведено на рис. 20, а (1 — $v_{T_0}/u_0 = 0,05$; 2 — 0,02;

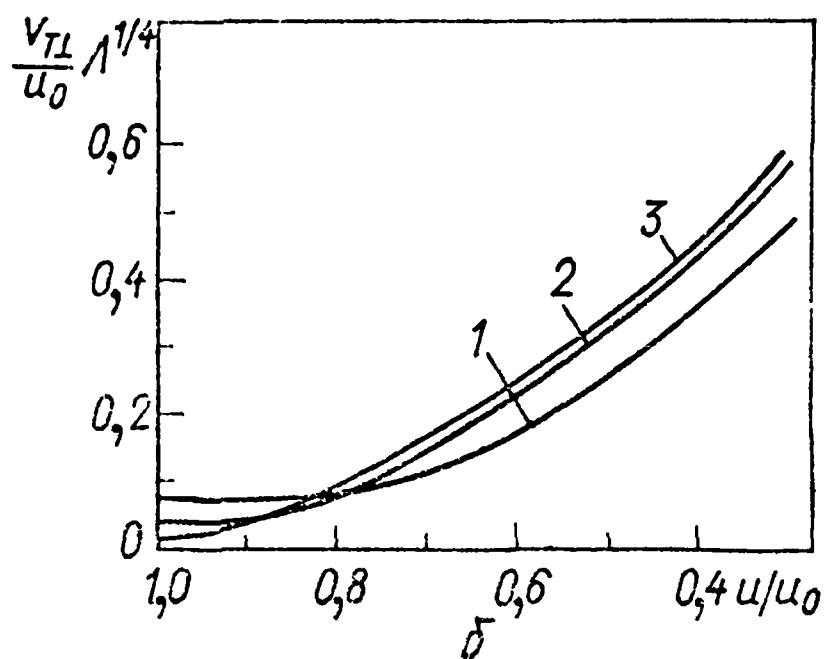
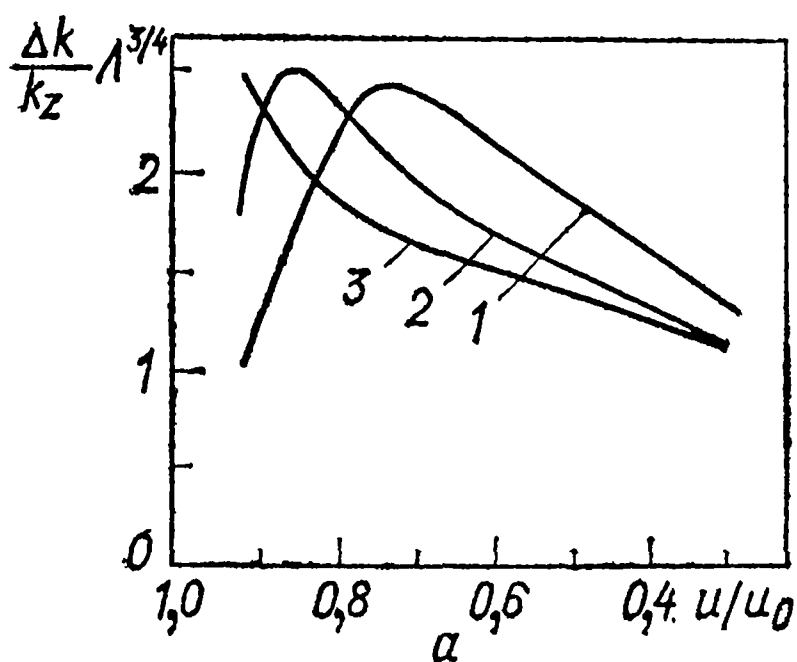


Рис. 20

3 — 0,01). Видно, что параметр $\alpha = (\Delta k/k_z)\Lambda^{3/4}$ остается малым в течение всего процесса релаксации, т. е. шумы всегда возбуждаются в узком конусе вдоль направления распространения пучка ($\Delta k \ll k_z$) в полном соответствии с качественными выводами.

Значительный интерес представляют кривые зависимости разброса по поперечным скоростям от положения фронта, изображенные на рис. 20, б (кривые 1—3 соответствуют тем же значениям v_{T_0}/u_0 , что и на рис. 20, а). Они иллюстрируют наиболее важный результат, который не мог быть получен в рамках одномерной теории: появление на конечной стадии релаксации пучка электронов с поперечной скоростью, сравнимой с начальной продольной скоростью [42].

§ 1.21. Релаксация ионного пучка малой плотности в плазме

Рассмотрим кинетическую стадию неустойчивости ионного пучка и исследуем релаксацию в квазилинейном приближении [43]. Пользуясь теми же соображениями, что и для электронных пучков,

получим, что при $\gamma < kv_{Tb}$ наступает кинетическая стадия релаксации. Здесь v_{Tb} — тепловой разброс скоростей ионов пучка. Так как максимальный инкремент — величина порядка $\omega_{pi}(n_{ob}/n_0)^{1/3}$, где n_0 — концентрация пучка, достигается при $k \gtrsim r_{De}^{-1}$, то кинетическое описание справедливо при

$$v_{Tb}/c_s > (n_{ob}/n_0)^{1/3}. \quad (1.205)$$

Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид

$$1 = -1/k^2 r_{De}^2 + \omega_{pi}^2/\omega^2 - (\omega_{pb}^2/n_{ob}k^2) \int k \partial f_0/\partial v [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})]^{-1} d^3v. \quad (1.206)$$

Здесь f_0 — функция распределения ионов пучка по скоростям.

Уравнение (1.163) в принципе можно применить как в гидродинамическом, так и в кинетическом случае. Если неравенство (1.205) не выполняется, то из (1.206) можно получить уравнение (1.37). При выполнении условия (1.205) дисперсионное соотношение принимает вид

$$1 = -1/k^2 r_{De}^2 + \omega_{pi}^2/\omega^2 - i\pi (\omega_{pb}^2/n_{ob}k^2) \times \\ \times \int k (\partial f_0/\partial v) \delta [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] d^3v. \quad (1.207)$$

Разложив уравнение (1.207) по $n_{ob}/n_0 \ll 1$, получим следующие выражения для частоты и инкремента неустойчивости:

$$\omega = \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + 1/k^2 r_{De}^2}}; \gamma = \frac{\pi}{2} \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{\omega^3}{k^2} \times \\ \times \int \frac{k}{n_{ob}} \frac{\partial f_0}{\partial v} \delta [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] d^3v. \quad (1.208)$$

Рассмотрим случай, когда скорость ионного пучка u значительно превышает скорость ионно-звуковых колебаний c_s . Приведем рассуждения, позволяющие понять, как происходит взаимодействие частиц пучка с волнами. Для этого перейдем к корпускулярному описанию частиц и волн, в котором ионно-звуковую волну с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} можно рассматривать как частицу, обладающую энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Здесь \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π . Законы сохранения при испускании частицей волны можно записать в виде $Mu^2/2 = Mu_1^2/2 + \hbar\omega$; $M\mathbf{u} = M\mathbf{u}_1 + \hbar\mathbf{k}$. Перепишав последнее уравнение в виде $\mathbf{u} - \hbar\mathbf{k}/M = \mathbf{u}_1$ и возведя обе части его в квадрат, получим $u^2 + 2(\hbar/M)(\mathbf{k}\mathbf{u}) + \hbar^2 k^2/M^2 = u_1^2$. Подставляя это соотношение в выражение для закона сохранения энергии и пренебрегая малым $\hbar^2 k^2/M^2$, получаем

$$\omega = (\mathbf{k}\mathbf{u}). \quad (1.209)$$

Так как $\omega \approx kc_s$, а $u \gg c_s$, с частицами пучка взаимодействуют волны, распространяющиеся почти перпендикулярно век-

тору u . При этом в каждом акте испускания частицей пучка волны с импульсом $\hbar k$ изменение импульса частицы равно $M(\Delta v) = \hbar k$, а изменение энергии частицы пучка $M(v\Delta v) = \hbar(kv) \approx 0$, т. е. взаимодействие частиц с колебаниями приводит к упругому рассеянию частиц. В действительности изменение энергии частиц хотя и мало, но конечно, поэтому наиболее удобной для данной задачи является сферическая система координат.

Когда рассматривается плазма в сильном магнитном поле, таком, что $\omega_{Hi} > \omega_{pi}$ и $kr_i \ll 1$, движение частиц, участвующих в колебаниях, можно считать одномерным. Гидродинамическая неустойчивость при этом имеет место лишь в том случае, когда $u < c_s$ (см. § 1.7). В одномерном случае можно получить простую систему квазилинейных уравнений для ионного пучка и решить ее. Пользуясь выражением для γ , получим в одномерном случае при максвелловском распределении частиц пучка по скоростям

$$\gamma = \left. \begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^4}{k_z^3 v_{Tb}^3} \frac{n_{0b}}{n_0} \left(\frac{k_z u}{\omega} - 1 \right) \times \\ & \times \exp \left\{ - \left(\frac{\omega - k_z u}{k_z v_{Tb}} \right)^2 \right\}; k_{\perp} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.210)$$

Таким образом, инкремент отличен от нуля при $k_z u \geq \omega$, так что k_z можно определить из уравнения

$$k_z u = \omega_{pi} / \sqrt{1 + 1/k_z^2 r_{De}^2}. \quad (1.211)$$

Инкремент положителен и при $u > c_s$, а это, казалось бы, противоречит тому, что говорилось выше. Однако в этом случае инкремент мал из-за того, что u больше максимальной фазовой скорости ионно-звуковых колебаний c_s , а $u - \omega/k_z \leq u - c_s$, в свою очередь, много больше v_{Tb} .

Так как в рассматриваемой системе всегда имеет место затухание ионно-звуковых волн на электронах с декрементом порядка $\omega^2/k_z v_{Te}$, малый инкремент, возникающий из-за ионного пучка, всегда меньше декремента $\omega^2/k_z v_{Te}$.

Таким образом, остается лишь область $u < c_s$. Равенство (1.211) выполнимо лишь для $k_z r_{De} > 1$, так как при этом $\omega \approx \omega_{pi}$, а фазовая скорость может быть меньше c_s (рис. 21) и при $k_z = r_{Di}^{-1} = \omega_{pi}/v_{Ti}$ достигает значения v_{Ti} . При $\omega/k_z \sim v_{Ti}$ колебания сильно затухают, взаимодействуя с ионами плазмы, поэтому можно считать, что фазовая скорость меняется от c_s до v_{Ti} , т. е. $k_z^2 r_{De}^2 = (\omega_{pi}^2/u^2) (c_s^2/\omega_{pi}^2) = c_s^2/u^2 \gg 1$. Задача при этом оказывается полностью аналогичной задаче о квазилинейной релаксации электронного пучка малой плотности в одномерном приближении (см. § 1.10—1.14). Поскольку колебания с волновым числом $k > r_{De}^{-1}$ происходят с разделением заряда, как и ленгмюровские

электронные колебания, выражение для плотности энергии (1.71) справедливо и в данном случае.

Вводя вместо m массу иона M и понимая под f_0 в системе уравнений (1.72) функцию распределения ионов пучка, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= (\partial/\partial v) [(4\pi e^2/M^2) \pi (W_k/|v|) \frac{\partial f_0}{\partial v}]; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= W \pi \omega_{pi} v^2 (1/n_0) \frac{\partial f_0}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (1.212)$$

Закон сохранения числа частиц пучка имеет вид $\int f_0 dv = n_{0b}$.

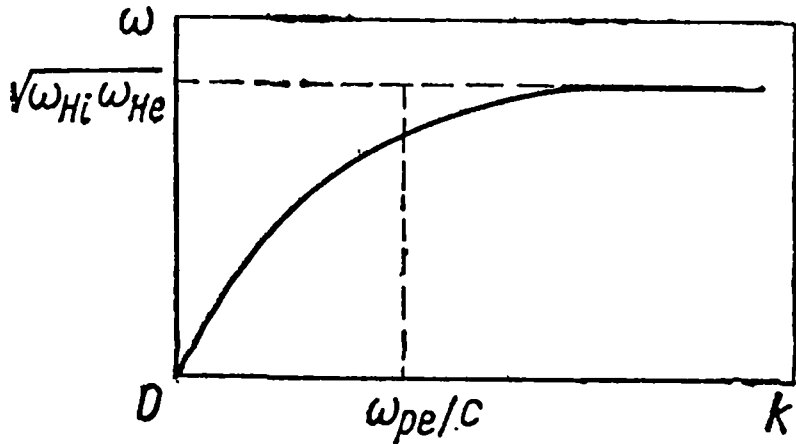


Рис. 21

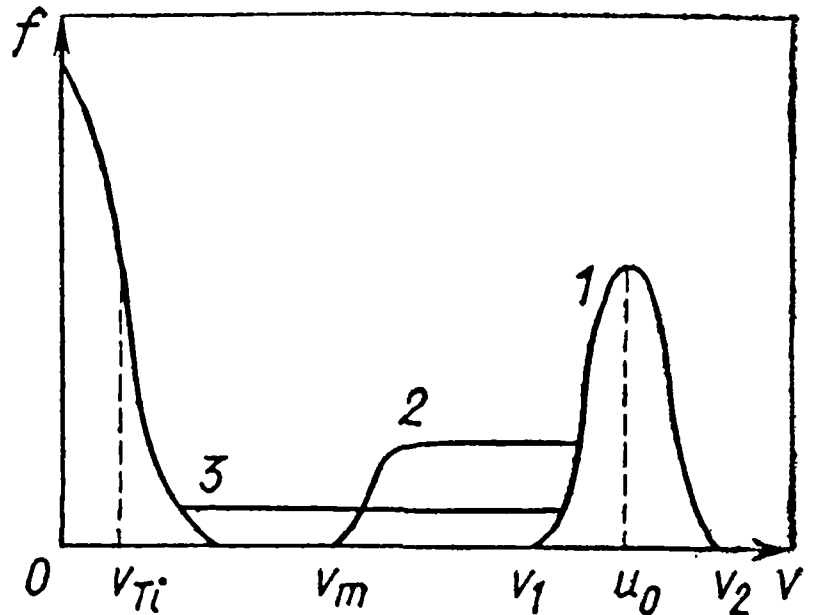


Рис. 22

Функция распределения ионного пучка изображена на рис. 22 (ср. с рис. 6), где кривые 1—3 соответствуют разным моментам времени $t_1 < t_2 < t_3$. Время, за которое происходит релаксация ионного пучка в интервале скоростей Δv , можно определить из формулы (1.87):

$$t = (1/2\pi) \omega_{pi}^{-1} (n_0 n_{0b}) (\Delta v/u)^2 \Lambda. \quad (1.213)$$

Длина, на которой пучок релаксирует в пространстве скоростей) в интервале Δv , равна

$$x = (1/2\pi) (\Delta v/u)^2 (n_0/n_{0b}) (1/\omega_{pi}) (\partial \omega/\partial k)_{k=\omega_{pi}/u} \Lambda. \quad (1.214)$$

Учитывая, что при $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ $\omega = \omega_{pi} (1 - 1/2 k^2 r_{De}^2)$, найдем групповую скорость при $k = \omega_{pi}/u$: $v_{гр} = (\partial \omega/\partial k)_{k=\frac{\omega_{pi}}{u}} = u (u/c_s)^2$.

Подставляя $\partial \omega/\partial k$ в формулу (1.214), получаем окончательно

$$x = (1/2\pi) (\Delta v u)^2 (u_0/n_{0b}) (u \omega_{pi}) (u/c_s)^2 \Lambda. \quad (1.215)$$

В случае незамагниченных колебаний ($\omega_{pi} \gg \omega_{Hi}$) неустойчивость может иметь место и при $u > c_s$. Найдем сначала зависимость инкремента от угла, когда функция распределения ионов пучка является максвелловской со средней скоростью, направленной вдоль оси z . Тогда в формуле (1.208) можно провести интегрирование по скоростям так, как это проделано в § 1.19 [см. формулу (1.151)]. В результате получим

$$\gamma = \sqrt{\pi} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Tb}^3} \frac{n_{ob}}{n_0} \left(\frac{(ku)}{\omega} - 1 \right) \exp \left\{ - \frac{[\omega - (ku)]^2}{k^2 v_{Tb}^2} \right\}, \quad (1.216)$$

где ω — частота ионно-звуковых колебаний. При $(-\omega + k_z u) / k^2 v_{Tb}^2 = 1 / \sqrt{2}$ γ максимален:

$$\gamma = \sqrt{\pi/2e} \omega (\omega^2 / k^2 v_{Tb}^2) n_{ob} / n_0, \quad (1.217)$$

так как $\omega \gg k v_{Tb}$, $\omega \approx k_z u$ и

$$k_z u = \omega_{pi} / \sqrt{1 + 1/k^2 r_{De}^2}. \quad (1.218)$$

В выражение (1.217) подставим значение частоты. Получим

$$\gamma = \sqrt{\pi/2e} [\omega_{pi}^3 k / \sqrt{k^2 + r_{De}^2} v_{Tb}^2] n_{ob} / n_0$$

и найдем, при каких значениях k γ максимален. Дифференцируя γ по k и приравнявая производную к нулю, получаем $k = (1/\sqrt{2}) r_{De}$. Величину k_z можно теперь определить из формулы (1.176):

$$k_z = \omega_{pi} / u \sqrt{3}. \quad (1.219)$$

Таким образом, найдены значения k_z и k , при которых инкремент максимален и равен

$$\gamma = \sqrt{2\pi/27e} \omega_{pi} (n_{ob}/n_0) c_s^2 / v_{Tb}^2. \quad (1.220)$$

Возбуждающиеся с инкрементом (1.220) волны распространяются почти перпендикулярно пучку, так что

$$\cos \theta = k_z / k = (c_s / u) \sqrt{2/3} \ll 1. \quad (1.221)$$

Квазилинейные уравнения для релаксации ионного пучка при $u \gg c_s$ можно получить из системы уравнений (1.150) заменой t на M , а под функцией f_0 следует понимать функцию распределения ионов пучка по скоростям. Что касается величины W_k , стоящей в выражении для квазилинейного коэффициента диффузии, то согласно определению $W_k = [(2\pi)^3 / V] E_k^2 / 4\pi$, где V — нормировочный объем. Эта величина характеризует полную спектральную плотность энергии волн, заключенную в полях и в движении частиц, и ее связь с $E_k^2 / 8\pi$ различна для волн разного типа. Поэтому при непосредственном использовании уравнений (1.150) необходимо помнить, что для ионно-звуковых колебаний W_k не является характеристикой полной энергии волн, а равна $[(2\pi)^3 / V] E_k^2 / 4\pi$.

Чтобы выразить квазилинейный коэффициент диффузии через полную спектральную плотность энергии ионно-звуковых волн, необходимо найти соотношение, связывающее W_k и $E_k^2 / 8\pi$. В этом случае, если частота ионно-звуковых колебаний близка к ω_{pi} , длины волн меньше или порядка дебаевского радиуса r_{De} и квази-

нейтральность колебаний не имеет места. Ионно-звуковые колебания при таких частотах представляют собой колебания ионов относительно электронов, которые могут считаться равномерно распределенными. Поэтому при $kr_{De} \gg 1$ должно выполняться равенство $W_k = [(2\pi)^3/V] E_k^2/4\pi$. В общем случае

$$W_k = [(2\pi)^3/V] [E_k^2/8\pi + n_0 m v_{ke}^2/2 + n_0 M v_{ki}^2/2].$$

Для ионно-звуковых колебаний энергия $m v_{ke}^2/2$ много меньше $M v_{ki}^2/2$, так как ионы и электроны движутся с примерно равными скоростями. Величину $n_0 M v_{ki}^2/2$ можно выразить через амплитуду электрического поля волны E_k , так как $\text{Re} v_{ki} = (e/M\omega) \text{Re} E_k$:

$$n_0 M v_{ki}^2/2 = (E_k^2/8\pi) (\omega_{pi}^2/\omega^2) = (E_k^2/8\pi) (1 + 1/k^2 r_{De}^2), \text{ т. е.}$$

$$W_k = [(2\pi)^3/V] (E_k^2/4\pi) (1 + 1/k^2 r_{De}^2). \quad (1.222)$$

Таким образом, в выражение для квазилинейного коэффициента диффузии [см. второе уравнение (1.150)] необходимо подставить вместо W_k величину $W_k/(1 + 1/k^2 r_{De}^2)$. Тогда квазилинейные уравнения примут вид:

$$\partial f_0/\partial t = (\partial/\partial v_\alpha) D_{\alpha\beta} \partial f_0/\partial v_\beta; \quad (1.223)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int (k_\alpha k_\beta / k^2) \pi (4\pi e^2/M^2) \times \\ \times [W_k/(1 + 1/k^2 r_{De}^2)] \delta[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] d^3\mathbf{k}; \quad (1.224)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial W_k/\partial t = 2\gamma_k W_k; \\ \gamma = (\pi/2) (\omega^3/k^2 n_0) \int k_\alpha (\partial f_0/\partial v_\alpha) \delta[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] d^3\mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (1.225)$$

Введем в пространстве скоростей и волновых векторов координаты v, θ, φ и k, θ', φ' соответственно. Углы θ и θ' отсчитываются от направления скорости ионного пучка \mathbf{u} , а азимутальные углы φ и φ' — в плоскости, перпендикулярной \mathbf{u} . В силу аксиальной симметрии задачи функция распределения частиц пучка f_0 не зависит от азимутального угла в любой момент. Поскольку $(\partial/\partial v_\alpha) D_{\alpha\beta} \partial f_0/\partial v_\beta = \text{div}_{\mathbf{v}} D_{\alpha\beta} \partial f_0/\partial v_\beta$ в сферической системе координат, из уравнений (1.223) и (1.226) можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^\infty dk \pi \frac{4\pi e^2}{M^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{W_k}{(1 + 1/k^2 r_{De}^2)} k_v \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{\infty} dk \frac{4\pi e^2}{M^2} \times \right. \\
& \quad \times \frac{W_k}{(1 + 1/2 k^2 r_{De}^2)} k_{\theta} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] \Big\} + \\
& + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{\infty} dk \frac{4\pi e^2}{M^2} \frac{W_k}{(1 + 1/k^2 r_{De}^2)} \times \right. \\
& \quad \times k_{\varphi} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] \Big\}. \tag{1.226}
\end{aligned}$$

Здесь $k_v = (\mathbf{k}\mathbf{e}_v)$; $k_{\theta} = (\mathbf{k}\mathbf{e}_{\theta})$; $k_{\varphi} = (\mathbf{k}\mathbf{e}_{\varphi})$ — проекции вектора \mathbf{k} на направления ортов \mathbf{e}_v , \mathbf{e}_{θ} и \mathbf{e}_{φ} в пространстве скоростей. Скалярное произведение $(\mathbf{k}\mathbf{v})$ можно вычислить очень просто, если записать его в декартовой системе координат в виде $(\mathbf{k}\mathbf{v}) = k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z$ и учесть, что по определению $k_x = k \sin \theta' \cos \varphi'$; $v_x = v \sin \theta \cos \varphi$; $k_y = k \sin \theta' \sin \varphi'$; $v_y = v \sin \theta \sin \varphi$; $k_z = k \cos \theta'$; $v_z = v \cos \theta$. Отсюда следует

$$(\mathbf{k}\mathbf{v}) = kv [\sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta']. \tag{1.227}$$

Найдем скалярное произведение $(\mathbf{k}\partial f_0/\partial \mathbf{v})$ в сферической системе координат с учетом того, что в силу аксиальной симметрии $\partial f_0/\partial \varphi = 0$:

$$(\mathbf{k}\partial f_0/\partial \mathbf{v}) = k_x \partial f_0/\partial v_x + k_y \partial f_0/\partial v_y + k_z \partial f_0/\partial v_z.$$

Производная $\partial f_0/\partial v_x = (\partial f_0/\partial v) \partial v/\partial v_x + (\partial f_0/\partial \theta) \partial \theta/\partial v_x$, но так как

$$\theta = \text{arctg} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} / v_z \right), \text{ а } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \text{ то}$$

$$\partial f_0/\partial v_x = (\partial f_0/\partial v) \sin \theta \cos \varphi + (1/v) \partial f/\partial \theta \cos \theta \cos \varphi.$$

Вычисляя аналогично $\partial f_0/\partial v_y$ и $\partial f_0/\partial v_z$ и выражая k_x , k_y , k_z через k , θ' и φ' , получаем

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}\partial f_0/\partial \mathbf{v}) & = k (\partial f/\partial v) [\sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'] + \\
& + (k/v) (\partial f_0/\partial \theta) [\sin \theta' \cos \theta \cos (\varphi - \varphi') - \cos \theta' \sin \theta]. \tag{1.228}
\end{aligned}$$

Нам осталось найти k_v , k_{θ} и k_{φ} . Для этого определим составляющие векторов \mathbf{e}_v , \mathbf{e}_{θ} и \mathbf{e}_{φ} в декартовой системе координат. Каждый из этих векторов нормирован и направлен по нормали к поверхностям $v = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ соответственно.

Найдем, например, \mathbf{e}_{θ} . По определению он имеет следующие компоненты в декартовой системе координат:

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\{\partial \theta / \partial v_x, \partial \theta / \partial v_y, \partial \theta / \partial v_z\}}{\sqrt{(\partial \theta / \partial v_x)^2 + (\partial \theta / \partial v_y)^2 + (\partial \theta / \partial v_z)^2}}.$$

Пользуясь выражением $\theta = \arctg \sqrt{v_x^2 + v_y^2} / v_z$, получим

$$\mathbf{e}_\theta = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta\}; \quad (1.229)$$

аналогично

$$\mathbf{e}_\nu = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}; \quad (1.230)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}. \quad (1.231)$$

Используя то обстоятельство, что $\mathbf{k} = \{k \sin \theta' \cos \varphi', k \sin \theta' \sin \varphi', k \cos \theta'\}$, находим окончательно

$$\left. \begin{aligned} k_\nu &= k[\sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta']; \\ k_\theta &= k[\sin \theta' \cos \theta \cos(\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta']; \\ k_\varphi &= -k[\sin \theta' \sin(\varphi - \varphi')]. \end{aligned} \right\} \quad (1.232)$$

В правой части уравнения (1.226) можно взять интеграл по φ' , при этом во всех выражениях, в которые входит $\cos(\varphi - \varphi')$, его следует заменить на $(\omega - kv \cos \theta \cos \theta') / (kv \sin \theta' \sin \theta) \approx \approx \cos \theta \cos \theta' / (\sin \theta \sin \theta')$, так как $\omega \ll kv(v \approx u)$, а все подынтегральное выражение в правой части разделить на

$$|\sin(\varphi - \varphi') kv \sin \theta \sin \theta'| \approx kv(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta')^{1/2}.$$

Подставив выражения для $(k \partial f_0 / \partial \mathbf{v})$, k_ν , k_θ и k_φ и учтя, что $\partial f_0 / \partial \varphi = 0$, получим [44]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= \frac{1}{v^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \left(A \frac{\partial f}{\partial \theta} - B \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{v} \left(D \frac{\partial f}{\partial v} - B \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.233)$$

где

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \end{Bmatrix} = \frac{4\pi e^2}{M^2} \int \frac{dk}{k} \int_0^1 \frac{W_k dx}{(1 + 1/k^2 r_{De}^2)(1 - x^2)^{1/2}} \begin{Bmatrix} k^2 x^2 \\ k \omega x \\ \omega^2 \end{Bmatrix}; \quad x = \frac{\cos \theta'}{\sin \theta}.$$

Формулу (1.225) нужно также переписать для сферической системы координат. Подставляя значения $(k \partial f_0 / \partial \mathbf{v})$ и (kv) в (1.225), получаем

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{2} \frac{n_{0b}}{n_0} \frac{\omega_0^3}{k^2} \int_0^\infty dv \int_{\pi/2 - \theta'}^\pi \sin \theta d\theta \times \\ &\times \frac{\frac{\omega}{kn_{0b}} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{1}{n_{0b}} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \frac{\cos \theta'}{\sin \theta} + \frac{\omega}{kv} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f_0}{\partial \theta}}{\left[\sin^2 \theta' \sin^2 \theta - \frac{(\omega - kv \cos \theta \cos \theta')^2}{(kv)^2} \right]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Знаменатель подынтегрального выражения является действительной величиной при $v > |\omega/k \cos(\theta \mp \theta')|$. С точностью до членов порядка $(\omega/kv) \ll 1$ волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен \mathbf{v} ; следовательно, $\theta - \theta' \approx \pi/2$. Опуская малые члены порядка $(\omega/kv)^2$, получаем окончательно

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{n_{0b}}{n_0} \frac{\omega_0^3}{k^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/2-\theta'}^{\pi/2+\theta'} \frac{(\omega/n_{0b}k)f_0(\omega/k, \theta) + \cos \theta' (\partial/\partial \theta) \int_{\omega/k}^{\infty} (f_0/n_{0b}) dv}{[\sin^2 \theta - \cos^2 \theta']^{1/2}} \sin \theta d\theta. \quad (1.234)$$

Аналогичный вид имеют уравнения для турбулентного нагрева током, для квазилинейной релаксации релятивистских пучков и

т. д. Поэтому результаты этого параграфа будут широко использоваться в дальнейшем при описании соответствующих систем.

Для нашего случая уравнения можно существенно упростить. Рассмотрим пучок с небольшим начальным угловым разбросом $\Delta\theta$. Тогда в уравнениях (1.233), (1.234) можно заменить $\sin \theta$ на θ , а поскольку на начальной стадии потеря энергии частицами пучка мала ($\omega/kv \ll 1$), можно считать, что скорость пучка не меняется по абсолютному значению, т. е. $(ku) \approx$

≈ 0 и $\cos \theta' \approx \psi \ll 1$, где $\psi = \pi/2 - \theta'$ (рис. 23).

В уравнении для функции распределения (1.233) наибольшим будет член, содержащий A и описывающий упругое рассеяние частиц пучка. Введя функции углового распределения частиц пучка и плотности энергии шумов

$$F(\theta) = (2\pi/n_{0b}) \int_0^{\infty} v^2 f_0 dv; \quad W(\psi, t) = \int (1/2) k^2 E_k^2 (1 + 1/k^2 r_{De}^2) dk,$$

получим из уравнений (1.233) и (1.234)

$$\frac{\partial F(\theta)}{\partial t} = \frac{\omega_{pi}^2}{(1 + 1/k^2 r_{De}^2) n_0 M k_0 v_0^3} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\theta} \frac{\psi^2 d\psi}{(\theta^2 - \psi^2)^{1/2}} W(\psi) \right\} \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta}; \quad (1.235)$$

$$\frac{\partial W(\psi)}{\partial t} = - \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{\omega_0^3}{k_0^2 v_0^2} W(\psi) \psi \int_{\psi}^{\infty} \frac{d\theta}{(\theta^2 - \psi^2)^{1/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad (1.236)$$

Здесь $k_0 = 1/\sqrt{2}r_{De}$, так как при этом значении инкремент максимален. Функция распределения ионов пучка нормирована на еди-

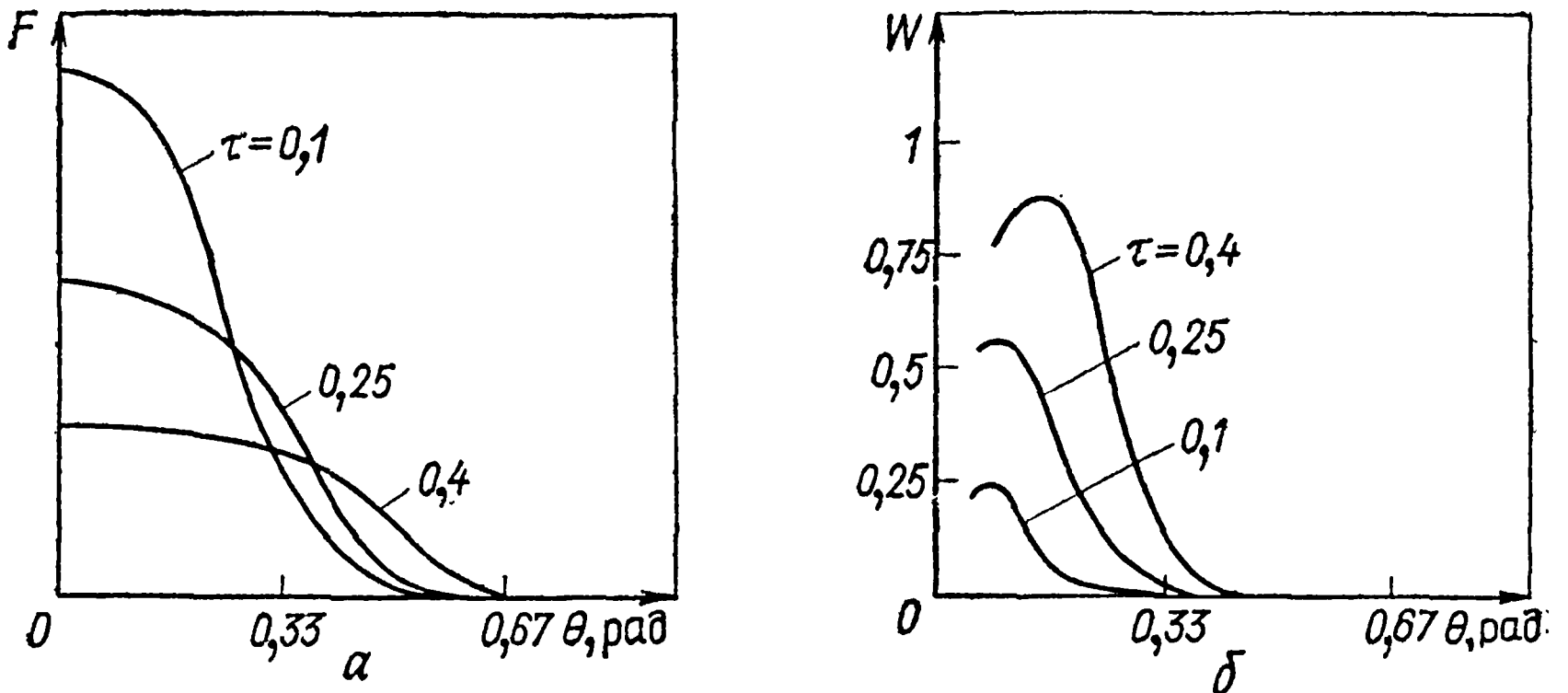


Рис. 24

ницу, и предполагается, что в начале и в процессе торможения разброс абсолютных значений скоростей мал. Уравнения (1.235) и (1.236) справедливы для θ и ψ , много меньших единицы. Систему полученных уравнений следует дополнить еще законом сохранения числа ионов пучка $\int_0^{\pi} F(\theta) \sin \theta d\theta = 1$, или для малых θ при достаточно узкой функции распределения по углу

$$\int_0^{\infty} F(\theta) \theta d\theta = 1. \quad (1.237)$$

Решение этих уравнений можно найти лишь численным методом. Функция распределения по углу и спектр энергии шумов, образующихся в процессе рассеяния пучка, представлены на рис. 24, а, б [$\tau = t\omega_{pi}(n_{ob}/n_p)(c_s/u_0)^2(2/3)^{1/5}$; $W = (8/3)^{1/2}n_{ob}U(c_s/u_0)\bar{\theta}^2$]. Уравнения (1.235) и (1.236) имеют интеграл. В этом нетрудно убедиться, если проинтегрировать уравнение (1.235) по переменной ψ от 0 до ∞ с весом θ^3 , а уравнение (1.236) просто проинтегрировать по ψ и сравнить правые части полученных выражений. Из этого интеграла можно найти связь между полной плотностью энергии ионно-звуковых шумов и функцией распределения

$$W = \int_0^{\infty} W(\psi) d\psi = \sqrt{2/3} n_{0b} M v_0^2 (c_s/v_0) \times \\ \times \int_0^{\bar{\theta}} \theta^3 F d\theta \sim n_{0b} M v_0^2 (c_s/v_0) \bar{\theta}^2, \quad (1.238)$$

где $\bar{\theta}$ — угол рассеяния пучка. Плотность энергии шумов оказывается в $\bar{\theta}^2 c_s/v_0$ раз меньше плотности энергии пучка.

При больших временах, когда начальный вид функции распределения несуществен, решение уравнений (1.235), (1.236) приближается к автомодельному. В автомодельных переменных $\xi = \psi^2/2t$ и $\eta = \theta^2/2t$ уравнения для функций $\tilde{F}(\eta) = tF(\theta, t)$ и $\tilde{W}(\xi) = W(\psi, t)$ имеют вид:

$$d\tilde{W}/d\xi = (n_{0b}/n_0)(\omega_0^3/k_0^2 v_0^2) \int_{\xi}^{\infty} (d\tilde{F}/d\eta) (d\eta/\sqrt{\eta-\xi}) \tilde{W}/\sqrt{\xi}; \quad (1.239)$$

$$\tilde{F} = -(\omega_{pi}^2/3Mn_0v_0^3 k_0) \int_0^{\eta} (\tilde{W}\sqrt{\xi} d\xi/\sqrt{\eta-\xi})(1/\eta)d\tilde{F}/d\eta. \quad (1.240)$$

Функции \tilde{F} и \tilde{W} представляют собой асимптотические значения решений уравнений (1.235), (1.236) при больших t . Они показаны на рис. 24, а, б.

Уравнение (1.239) позволяет найти характерное время рассеяния по углам. Для этого его нужно разделить на \tilde{W} и проинтегрировать по ξ от 0 до ∞ . В результате получим

$$-\ln \left[\tilde{W}(0)/\tilde{W}(\infty) \right] = \pi(n_{0b}/n_0)(\omega_0^3/k_0^2 v_0^2) \left[\tilde{F}(\infty) - \tilde{F}(0) \right]. \quad (1.241)$$

В этом уравнении можно с большой точностью заменить $\ln \left[\tilde{W}(0)/\tilde{W}(\infty) \right]$ на Λ , а $\tilde{F}(\infty)$ и $\tilde{F}(0)$ определить из условия нормировки, т. е. $\tilde{F}(\infty) = 0$, $\tilde{F}(0) = 1/\eta_0$, где $\eta_0 = \bar{\theta}^2/2t$ — характерная ширина функции распределения в автомодельных переменных. В результате уравнение (1.237) приведет к уравнению, описывающему рассеяние пучка:

$$\bar{\theta} = (c_s/v_0) \sqrt{(5/\Lambda)(n_{0b}/n_0)\omega_{pi}t}. \quad (1.242)$$

Даже при больших v_0/c_s рассеяние сопровождается торможением. Сравнением коэффициентов диффузии можно качественно оценить отношение изменения продольной скорости Δv_z к изменению поперечной $\Delta v_z/\Delta v_{\perp} \sim (c_s/v_0)\sqrt{\Lambda}$. Наличие в этой оценке $\sqrt{\Lambda}$ отражает тот факт, что Λ не зависит от v . Коэффициент диффузии s существенно зависит от θ ; он должен сначала вырасти в e^{Λ} раз, и лишь затем в этой точке начнется угловая диффузия. Качественная оценка

отношения уширения распределения по продольным и поперечным скоростям подтверждается результатами численного моделирования (см. § 1.23).

§ 1.22. Двумерное численное моделирование взаимодействия пучка электронов с бесстолкновительной плазмой

Приведем результаты двумерного численного моделирования процесса взаимодействия пучков заряженных частиц с бесстолкновительной плазмой, которое было проведено для проверки выводов трехмерной теории квазилинейной релаксации. Полученные результаты очень наглядны и помогут лучше усвоить материал § 1.14. Здесь будет также использован метод неполного численного моделирования, поскольку он не требует увеличения числа частиц при переходе к двумерной и трехмерной задачам в отличие от метода полного численного моделирования, при котором для моделирования одномерной задачи требуется N частиц, двумерной — N^2 , трехмерной — N^3 . В двумерной задаче плотность пучка и потенциал электрического поля задавались следующим образом:

$$n_{ob} = \sum_p \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)];$$

$$\varphi = \sum_k \varphi_k(t) \exp \{-i\omega_k t + i(\mathbf{k}\mathbf{r}) + i\alpha_k(t)\},$$

где $\mathbf{r}_p(t)$ — координата p -й частицы; $\varphi_k(t)$ и $\alpha_k(t)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза k -й гармоники. Система уравнений, описывающих поведение системы пучок — плазма, в двумерном случае имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi_k/d\tau &= -(1/2)(1/A_k^2)(n_{ob}/Nn_0) \sum_p \sin [\nu_k + (A_k \rho_p)]; \\ d\nu_k/d\tau &= A_{kz} - 1 - (1/2A_k^2)(n_{ob}/n_0)(1/\Phi_k N) \sum_p \cos [\nu_k + (A_k \rho_p)]; \\ d\rho_p/d\tau &= V_p; \quad dV_p/d\tau = \sum_k A_k \Phi_k \sin [\nu_k + (A_k \rho_p)], \end{aligned} \right\} (1.243)$$

где $\Phi_k = e\varphi_k/mu_0^2$; $\tau = \omega_{pe}t$; $A_k = (u_0/\omega_{pe})k$; $\nu_k = [(k\mathbf{u}_0) - \omega_{pe}]t + \alpha_k$; $\rho_p = [(\mathbf{r} - \mathbf{u}_0 t)/u]\omega_{pe}$; $V = (\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)/u$; $\mathbf{k} = \{n2\pi/L_x, m2\pi/L_y\}$.

Начальными условиями для уравнений являются значения всех переменных при $\tau = 0$. Начальная амплитуда волн задается от 10^{-3} до 10^{-6} максимального значения, фазы произвольны, скорости частиц в системе координат, движущейся со скоростью u , равны нулю, координаты частиц распределены по прямоугольнику со сторонами L_x, L_y . Чтобы избежать больших шумов, связанных с тем, что

число частиц, моделирующих пучок, невелико, координаты частиц пучка задают согласованно с начальной амплитудой волн. Уравнения решаются методом Рунге — Кутта. Численное моделирование проводили с числом частиц до 500 и числом волн до 200 [40].

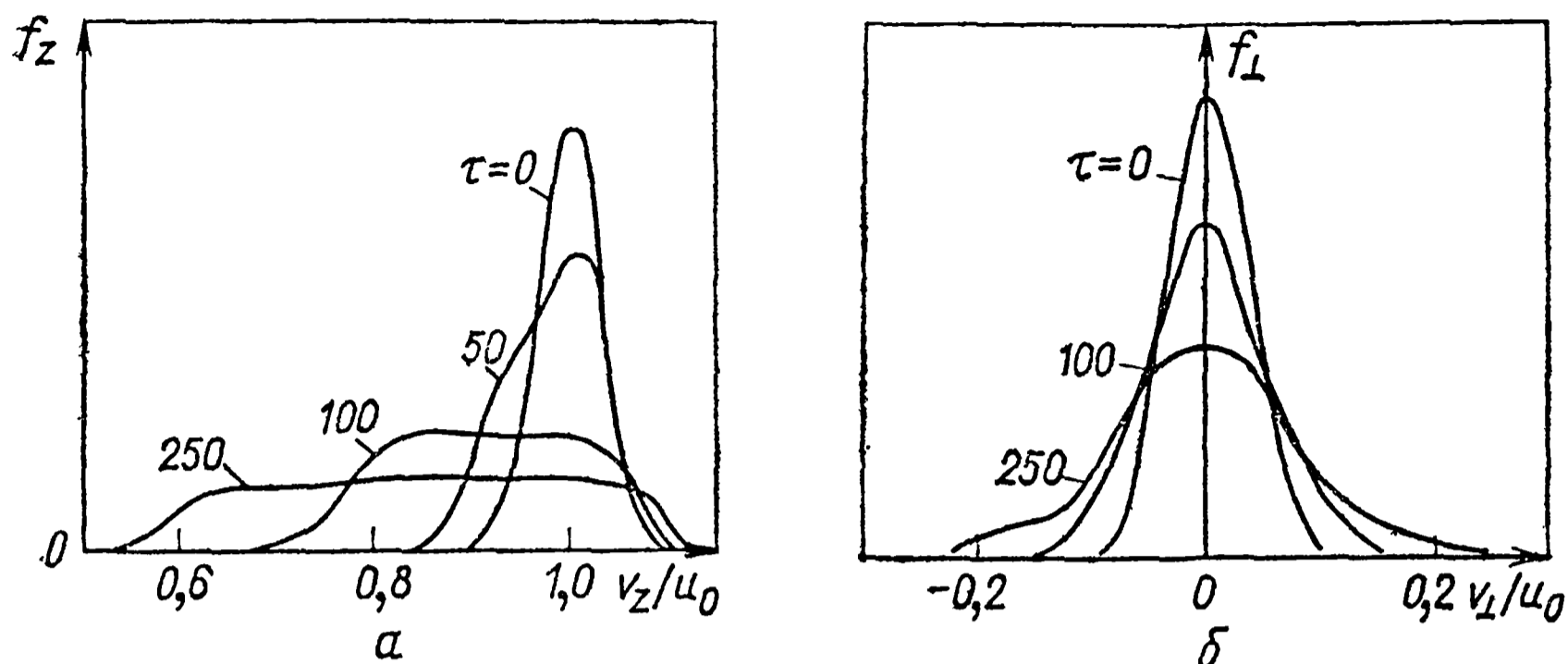


Рис. 25

Расстояние между волнами в k -пространстве, не нарушающее непрерывности, определяется шириной зоны взаимодействия волны с частицами $\Delta v \sim \gamma/k_z$. Отсюда следует, что $\Delta k_z/k_z \approx \gamma/\omega_{pe}$. Чтобы определить расстояние между волнами в поперечном направлении, обратимся к третьему уравнению (1.150). Кроме ширины зоны взаимодействия, определяемой шириной δ -функции (порядка γ), в это уравнение входит еще множитель $W_k \cos^2 \xi$, где ξ — угол между $\partial f/\partial v$ и k .

Хорошую модель непрерывного спектра можно получить только тогда, когда с каждой точкой пространства скоростей, интересной для данной задачи, будут взаимодействовать несколько волн с различными направлениями k , расположенных по углу настолько часто, что удастся разрешить структуру $\cos^2 \xi W_k$. Для разрешения структуры $\cos^2 \xi$ достаточно располагать одну волну на 20 — 30° . Угол, необходимый для разрешения W_k , можно определить лишь по ходу решения. Практически задавался интервал по углам для скорости волн $v \sim u_0$ около 20° , а для скорости, меньшей v , — до 10° .

Протяженность спектра, задаваемого по k_z , зависит от зоны релаксации в пространстве скоростей, представляющей интерес, и может быть оценена по времени τ , до которого ведется счет, с помощью уравнения

$$k_z/k_{z0} + \ln(k_{z0}/k) = 1 + (\pi/\Lambda)(n_{0b}/n_0)\tau.$$

Результаты численного моделирования полностью подтверждают выводы трехмерной квазилинейной теории. Продольная функция распределения f_z в различные моменты показана на рис. 25, а, а распределение по поперечным скоростям в те же моменты представле-

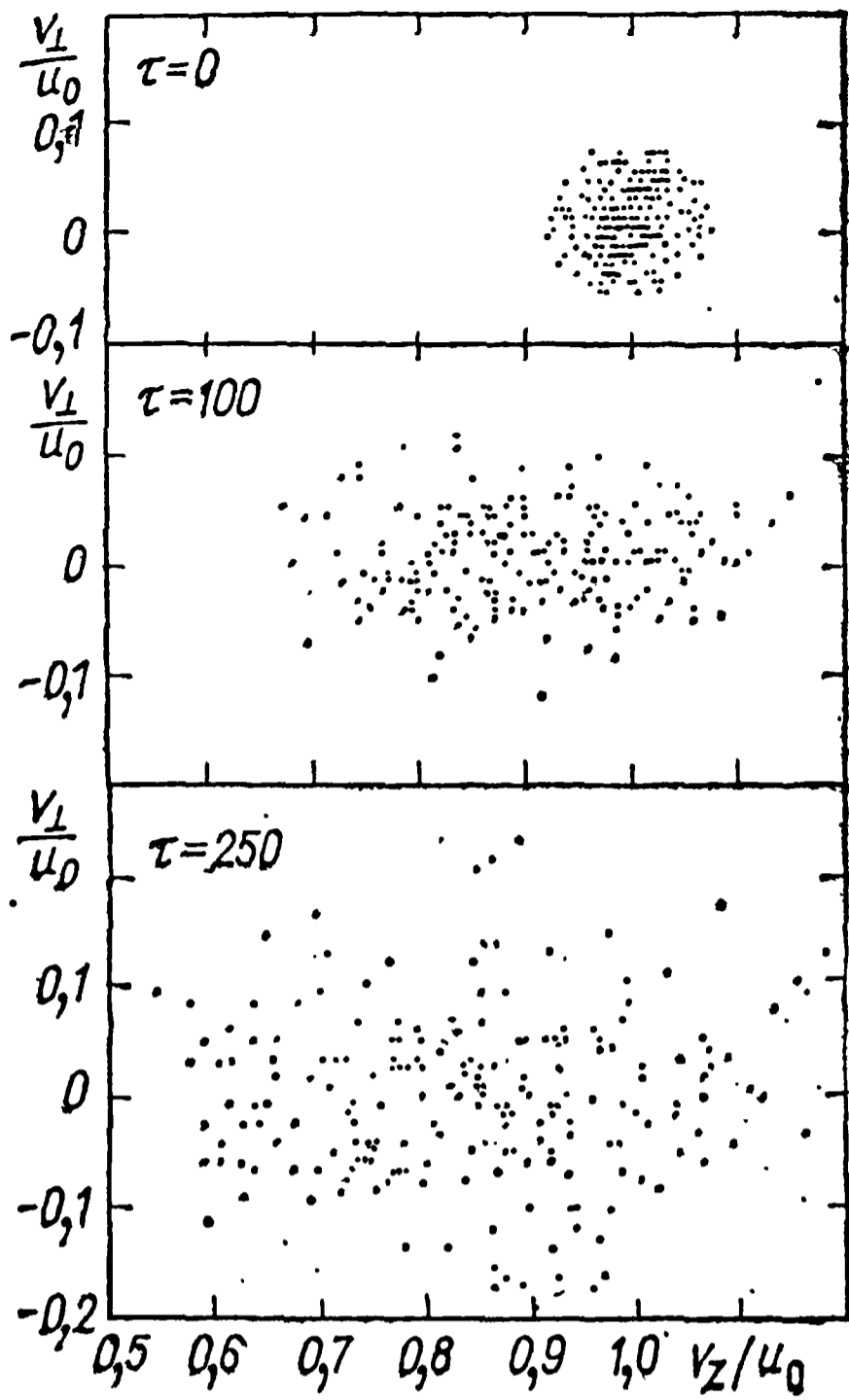


Рис. 26

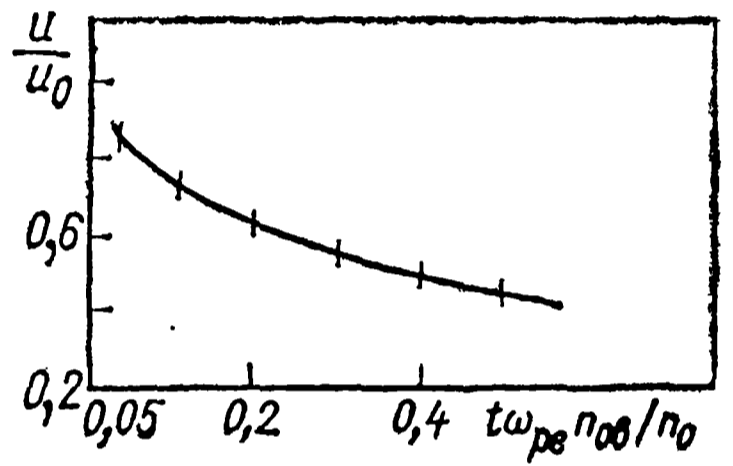


Рис. 27

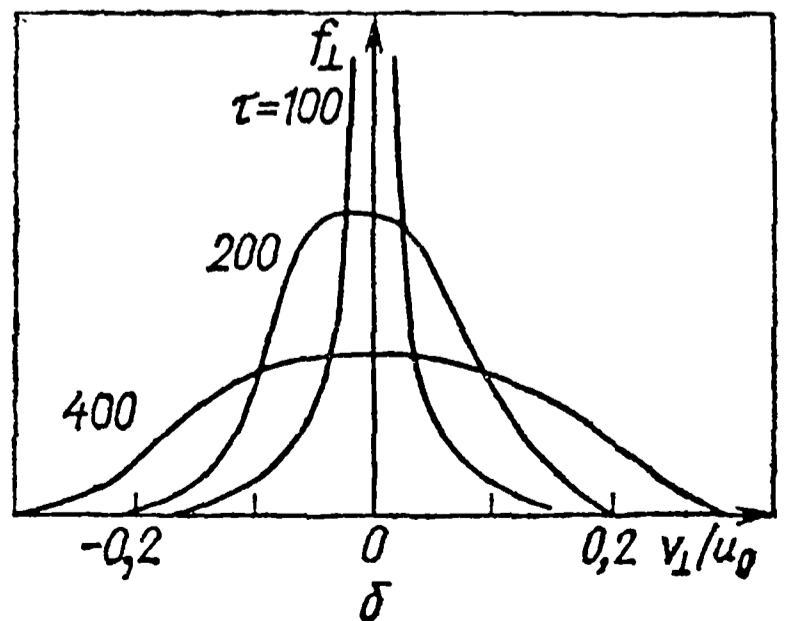
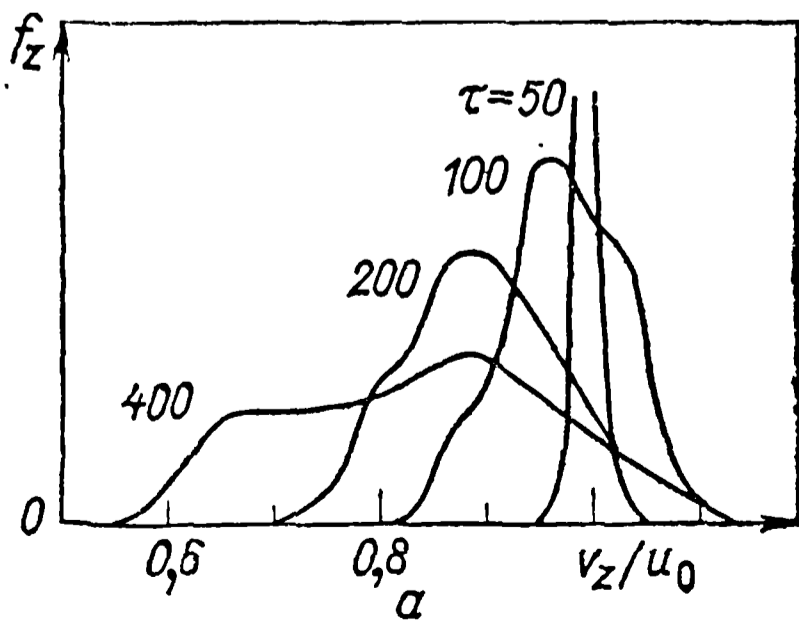


Рис. 28

но на рис. 25, б. Полная функция распределения, изображенная на рис. 26, наглядно иллюстрирует двумерную релаксацию электронного пучка.

Из рис. 25, а видно, что на функции распределения по продольным скоростям образуется крутой фронт. Скорость движения фронта совпадает с полученной аналитическим решением [см. третье уравнение (1.119)] (рис. 27, сплошной линией изображены результаты аналитического решения, а черточками отмечены результаты численного моделирования).

Релаксация первоначально моноэнергетического пучка отличается от релаксации кинетического, поскольку на начальной стадии шумы возбуждаются в широком интервале углов. Результаты численного моделирования подтверждают качественные выводы, приведенные в § 1.14. На рис. 28, а показано распределение по продольным скоростям, а на рис. 28, б — по поперечным скоростям в различные моменты. Полный вид функции распределения представлен на рис. 29. Видно, что и в этом случае образуется крутой фронт, однако из-за различия начальной стадии релаксации уширение функции распределения по поперечным скоростям происходит несколько быстрее, чем в случае кинетического пучка.

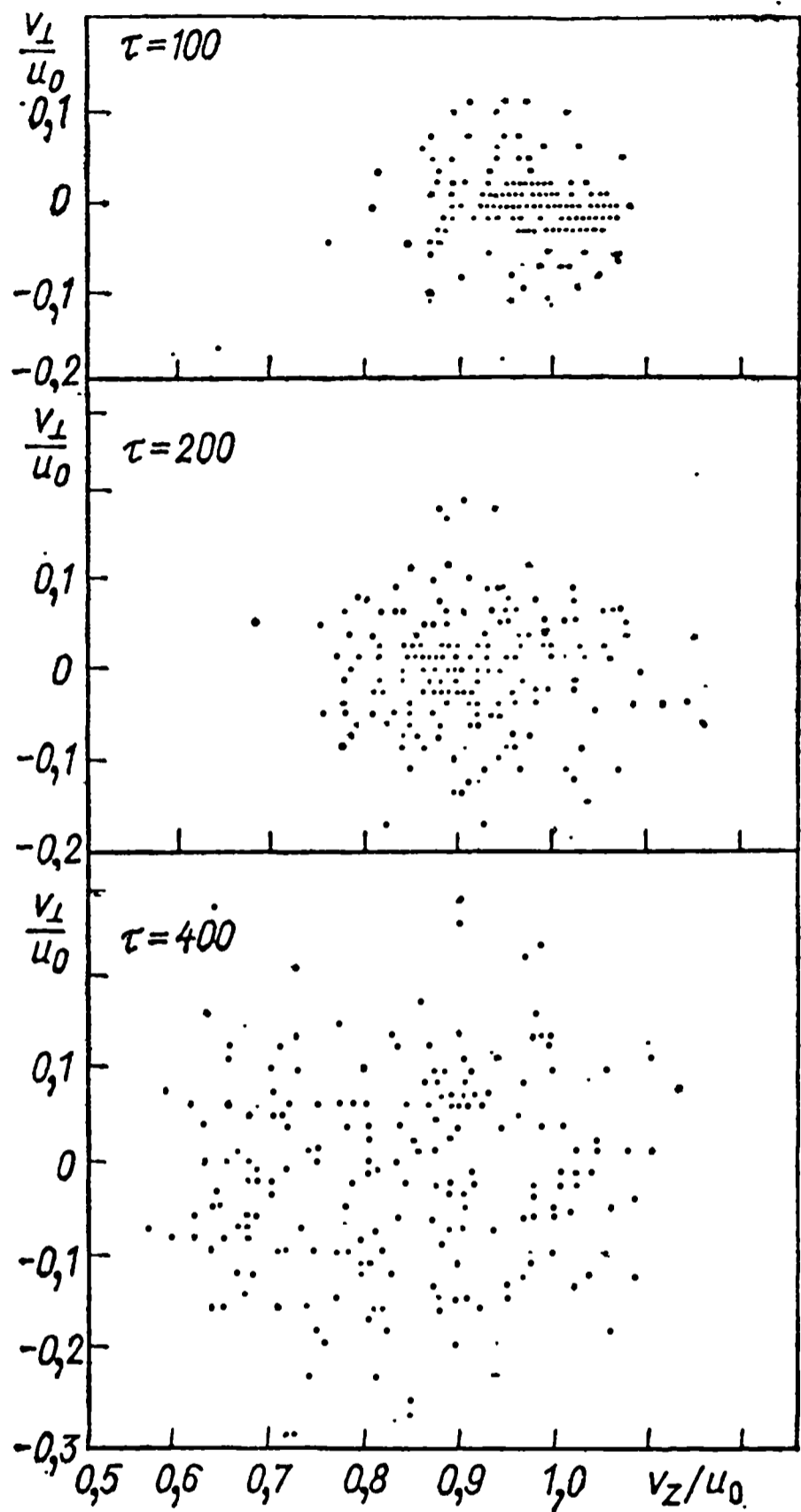


Рис. 29

§ 1.23. Двумерное численное моделирование взаимодействия ионного пучка с бесстолкновительной плазмой

Как показано в § 1.21, квазилинейные уравнения позволяют провести исследование взаимодействия ионного пучка с плазмой только в случаях $v_0 < c_s$ и $v_0 > c_s$. Аналитическое исследование промежуточной области затруднительно. Кроме того, квазилинейные уравнения не позволяют, как уже указывалось, исследовать началь-

ную стадию релаксации моноэнергетических пучков $\Delta v/v_0 < (n_{ob}/n_0)^{1/3}$.

Постановка задачи и вывод уравнений, описывающих поведение во времени амплитуды колебаний и их фазы, а также скоростей и координат частиц пучка, проводится так же, как в случае электронного пучка (§ 1.22). В результате можно получить следующую систему уравнений для указанных величин:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi_k/d\tau &= - (1/2) [A_k/(1 + A_k^2)^{3/2}] (n_{ob}/n_0) \times \\ &\quad \times (1/N) \sum_p \sin(\nu_k + A_k \rho_p); \\ d\nu_k/d\tau &= \beta_k - (1/2) [A_k/(1 + A_k^2)^{3/2}] \times \\ &\quad \times (n_{ob}/n_0) (1/N \Phi_k) \sum_p \cos(\nu_k + A_k \rho_p); \\ d\rho_p/d\tau &= W_p; \quad dW_p/d\tau = \sum_k A_k \Phi_k \sin(\nu_k + A_k \rho_p). \end{aligned} \right\} (1.244)$$

Здесь k и p — номера рассматриваемых гармоник колебаний;

$$\Phi_k = e\varphi_k/T_e; \quad \tau = \omega_{pi}t; \quad A_k = kr_{De};$$

$$\nu_k = [(k v_0) - \omega_k]t + \alpha_k; \quad \beta_k = [(k v_0) - \omega_k]/\omega_{pi};$$

$$\rho_p = (r_p - v_0 t)/r_{De}; \quad W_p = (v - v_0)/S_s;$$

$$k = \{n2\pi/L_x, m2\pi/L_y\}.$$

Начальными условиями для уравнений являются значения всех переменных при $\tau = 0$. Начальная амплитуда волн задается от 10^{-2} до 10^{-4} максимального значения, фазы волн произвольны. Скорости частиц пучка в системе координат, движущейся со скоростью v_0 (начальная скорость пучка), задаются нулевыми. Координаты распределены по прямоугольнику со сторонами L_x, L_y . Уравнения решаются методом Рунге — Кутта и позволяют рассматривать до 200 волн и 1000 частиц (на ЭВМ БЭСМ-6).

Расчет проведен для $v_0/c_s = 9$ и $v_0/c_s = 3$ при $n_{ob}/n_0 = 10^{-3}$ и для $v_0/c_s = 6$ и $v_0/c_s = 20$ при $n_{ob}/n_0 = 10^{-1}$. Результаты свидетельствуют о том (рис. 30,а), что при $v_0/c_s = 9$ ($n_{ob}/n_0 = 10^{-3}$) и $v_0/c_s = 20$ ($n_{ob}/n_0 = 10^{-1}$) торможением пучка можно пренебречь, а рассеяние по углу в пределах точности машинного эксперимента совпадает с теоретическим результатом (1.242). Начальная гидродинамическая стадия релаксации моноэнергетических пучков при этих значениях v_0/c_s качественно происходит так же, как и последующая кинетическая, т.е. заметно только рассеяние по углу. Характерное время гидродинамической стадии описывается обратным гидродинамическим инкрементом $\tau = \omega_{pi}^{-1}(n_0/n_{ob})^{1/3}$.

Существенно иначе идет релаксация при меньших значениях v_0/c_s . Так, при $v_0/c_s = 3$ ($n_{ob}/n_0 = 10^{-3}$) рассеяние сопровождается интенсивным торможением пучка. На рис. 30,б изображен пучок в пространстве скоростей v_z и v_\perp в различные моменты (время

отсчитывается с момента выхода на нелинейный режим). Преобладание рассеяния над торможением заметно лишь на гидродинамической стадии. В дальнейшем разбросы по продольным и поперечным

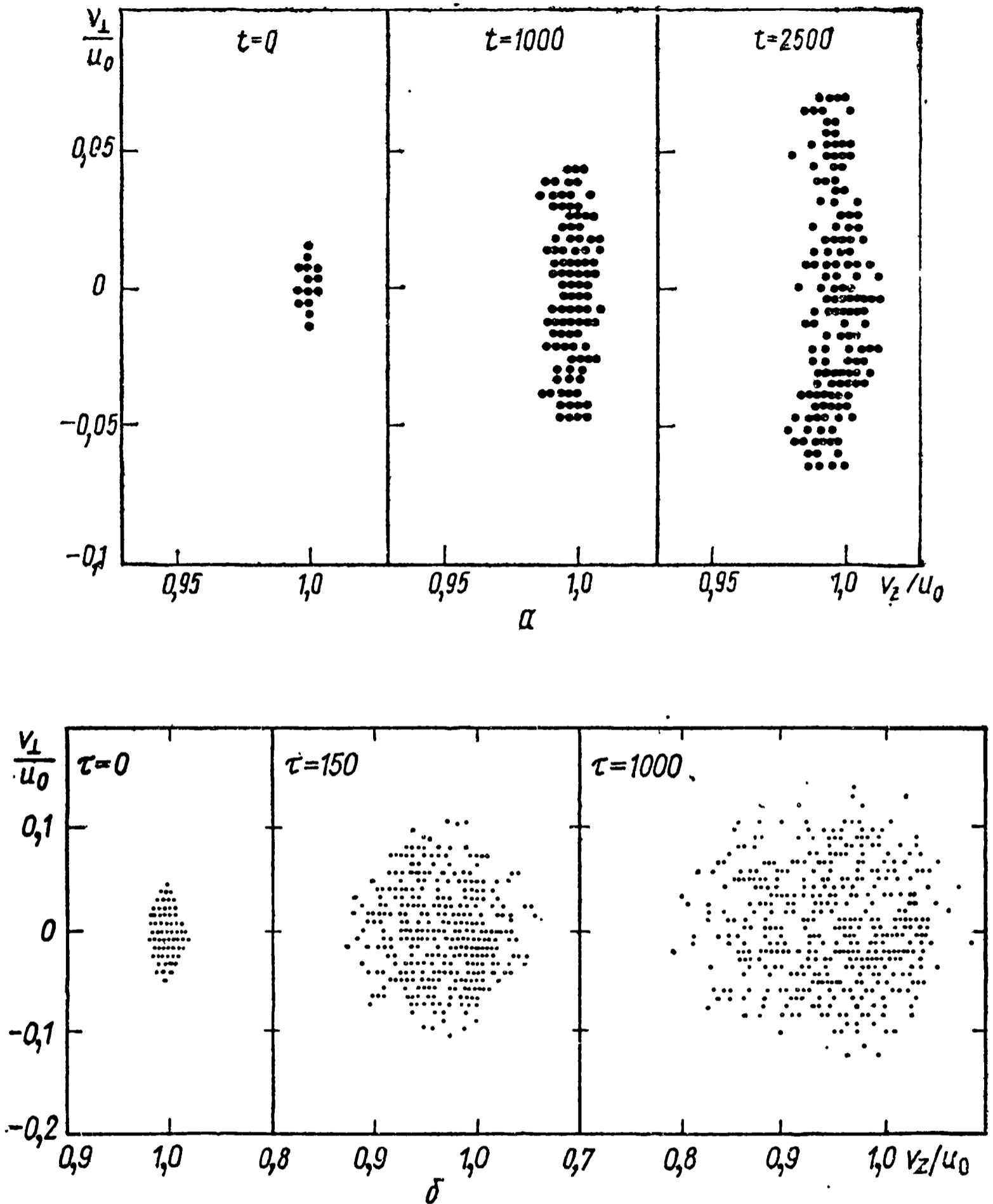


Рис. 30

скоростям выравниваются. Значительный интерес представляет рис. 31, на котором изображена функция распределения по продольным скоростям $f_z(v_z) = \int f d^2v_{\perp}$ в те же моменты. Оказывается, что при $v_0/c_s = 3$ релаксация носит недиффузионный характер, что типично для $v_0/c_s \ll 1$ (ср. с рис. 22). При несколько большем значении v_0/c_s (равном 6) ($n_{ob}/n_0 = 10^{-1}$) торможение пучка тоже значительно, однако функция имеет диффузионный характер (рис. 32). Рассеяние пучка как при $v_0/c_s = 3$ ($n_{ob}/n_0 = 10^{-3}$), так и при

$v_0/c_s = 6$ ($n_{ob}/n_0 = 10^{-1}$) удовлетворительно описывается формулой (1.242). Форма функции углового распределения близка к изображенной на рис. 24,а.

Таким образом, торможением пучка можно полностью пренебречь при $v_0/c_s \geq 10$. В этом случае угол рассеяния определяется

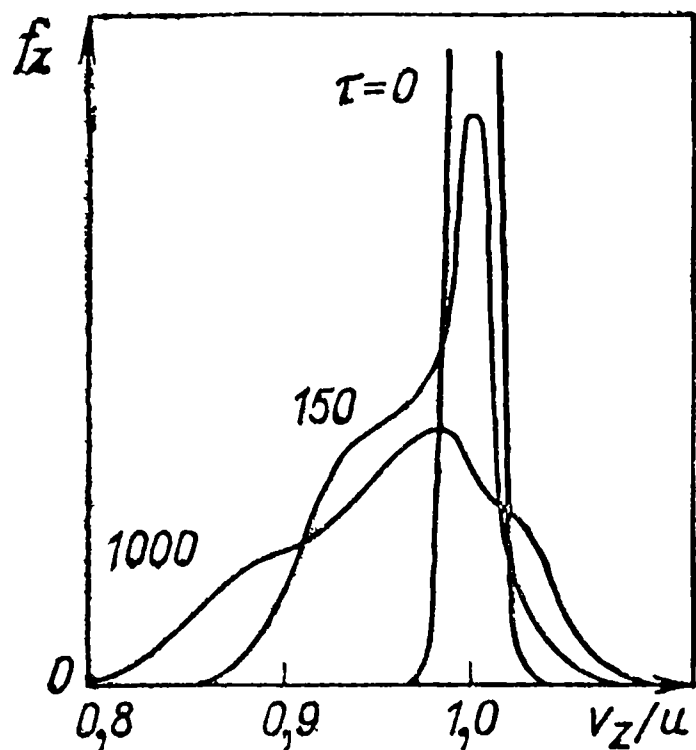


Рис. 31

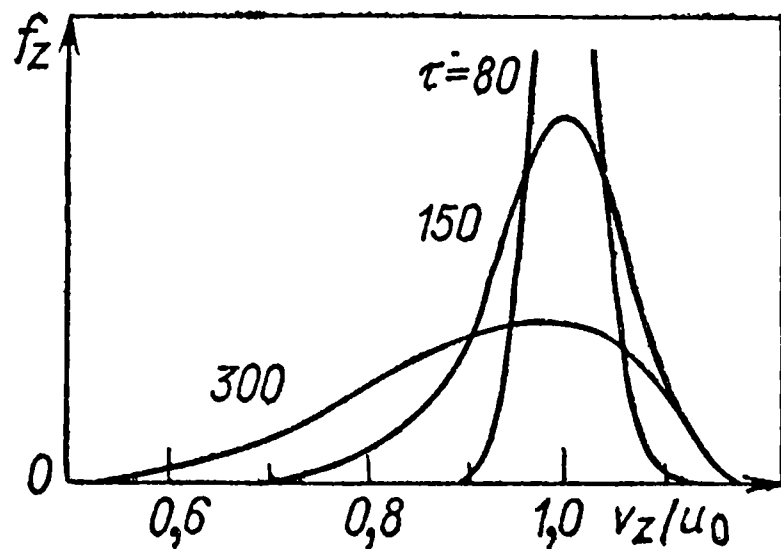


Рис. 32

формулой (1.242). Этой формулой можно пользоваться вплоть до $v_0/c_s = 3$. Однако при $v_0/c_s \leq 6$ уже нельзя пренебрегать появлением разброса по скоростям. При $v_0/c_s \approx 3$ разброс по поперечным скоростям Δv_{\perp} сравним с разбросом по продольным скоростям Δv_z . Это соотношение Δv_{\perp} и Δv_z сохраняется и при меньших значениях v_0/c_s . При $v_0/c_s < 1$ релаксация функции распределения почти одномерна. Скорость движения фронта описывается уравнением (1.213). Разброс по поперечным скоростям близок к разбросу по продольным скоростям.

§ 1.24. Низкочастотные колебания плазмы в магнитном поле

В § 1.21 рассмотрен случай, когда ионный пучок инжектируется в плазму в отсутствие магнитного поля. Но там же показано, что если инкремент неустойчивости больше ионной циклотронной частоты ω_{Ni} , то магнитное поле не влияет на характер неустойчивости и все полученные результаты применимы и для плазмы в магнитном поле, если магнитное поле не слишком велико. Характер колебаний может, однако, существенно измениться и при выполнении условия $(n_{ob}/n_0)^{1/3} \omega_{pi} > \omega_{Ni}$, если температура ионов не слишком мала по сравнению с температурой электронов. Это связано с тем, что фазовая скорость неустойчивых волн $\omega/k \leq c_s$ при $T_e \sim T_i$ сравнима с тепловой скоростью ионов. Строго говоря, в этом случае неустойчивость ионного пучка отсутствует, так как затухание на ионах настолько сильно, что декремент сравним с частотой

той. При инжекции ионного пучка вдоль магнитного поля в этом случае неустойчивость будет иметь место, лишь если плазма обладает собственными колебаниями, распространяющимися со скоростью, много большей v_{Ti} , и если можно создать пучок ионов со скоростью, близкой к фазовой скорости колебаний.

Рассмотрим собственные колебания плазмы в магнитном поле на низких по сравнению с ω_{pe} и ω_{He} частотах. Потенциальные волны, которые до сих пор рассматривались, как правило, имеют низкие фазовые скорости по сравнению со скоростью света c . Выведем общие соотношения, позволяющие находить все н. ч.-собственные колебания: потенциальные и непотенциальные. Последним термином мы будем обозначать такие собственные колебания, в которых электрическое поле нельзя представить в виде $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$, что приведет к появлению магнитного поля из-за того, что $\text{rot}\mathbf{E} \neq 0$. Движение частиц можно при этом рассматривать в гидродинамическом приближении, полагая температуру каждой из компонент равной нулю, так как нас интересуют собственные колебания, распространяющиеся с фазовой скоростью, много большей тепловой скорости ионов плазмы. Уравнения Максвелла при этом можно записать в виде [17]:

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c)\partial\mathbf{D}/\partial t; \text{ rot } \mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t, \quad (1.245)$$

где

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad (1.246)$$

так что $\varepsilon_{\alpha\beta}$ есть тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Первое уравнение (1.245) можно легко получить из микроскопического уравнения Максвелла для магнитного поля $\text{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j} + (1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$, если обычным образом ввести тензор проводимости $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$. При этом оказывается, что ввести тензор диэлектрической проницаемости, связанный с тензором проводимости, довольно просто, положив

$$(\partial/\partial t)(\varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta)\partial D_\alpha/\partial t = \partial E_\alpha/\partial t + 4\pi\sigma_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (1.247)$$

Для фурье-компонент электрического поля уравнение (1.247) можно переписать в виде

$$i\omega\varepsilon_{\alpha\beta}E_{k\beta} = -i\omega\delta_{\alpha\beta}E_{k\beta} + 4\pi\sigma_{\alpha\beta}E_{k\beta}$$

и тензор диэлектрической проницаемости выразить в виде алгебраической формулы через тензор проводимости [17]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i(4\pi/\omega)\sigma_{\alpha\beta}. \quad (1.248)$$

Тензор проводимости можно найти, пользуясь уравнениями движения для каждой компоненты плазмы и решая эти уравнения в линейном приближении. Из этих уравнений можно, таким образом, получить зависимость фурье-компонент скоростей электронов и ионов от электрического поля, а затем согласно формуле

$$\mathbf{j}_k = en_0(\mathbf{v}_{ik} - \mathbf{v}_{ek}) \quad (1.249)$$

найти тензор проводимости и тензор диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \{ \mathbf{H}_k \exp [-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})] \} = \\ &= i \exp [-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})] [\mathbf{k}\mathbf{H}_k]. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения Максвелла для фурье-компонент будут иметь вид:

$$[\mathbf{k}\mathbf{H}_k] = -(\omega/c) \mathbf{D}_k; \quad [\mathbf{k}\mathbf{E}_k] = (\omega/c) \mathbf{H}_k. \quad (1.250)$$

Уравнения движения в линейном приближении записываются в виде

$$m \partial \mathbf{v}_e / \partial t = -e \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v}_e \mathbf{H}_0] \};$$

$$M \partial \mathbf{v}_i / \partial t = e \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v}_i \mathbf{H}_0] \}.$$

Здесь H_0 — напряженность постоянного внешнего магнитного поля, в которое помещена плазма. Из этих уравнений получаем:

$$-i\omega \mathbf{v}_{ek} = -(e/m) \{ \mathbf{E}_k + (1/c) [\mathbf{v}_{ek} \mathbf{H}_0] \}; \quad (1.251)$$

$$-i\omega \mathbf{v}_{ik} = (e/M) \{ \mathbf{E}_k + (1/c) [\mathbf{v}_{ik} \mathbf{H}_0] \}. \quad (1.252)$$

Векторное уравнение (1.251) для дальнейших целей необходимо решить в общем виде, не задаваясь конкретной системой координат. Для этого сначала нужно умножить обе части уравнения скалярно на \mathbf{H}_0 , а затем векторно на \mathbf{H}_0 . Получившееся в результате векторного умножения уравнение нужно еще раз умножить векторно на \mathbf{H}_0 . Тогда получим систему трех уравнений, из которых можно найти связь \mathbf{v}_{ek} и \mathbf{E}_k :

$$\mathbf{v}_{ek} = -\frac{ie\omega}{m(\omega^2 - \omega_{He}^2)} \left[\mathbf{E}_k - \frac{\omega_{He}^2 \mathbf{h}(\mathbf{E}_k \mathbf{h})}{\omega^2} \right] - \frac{e}{m} \frac{\omega_{He} [\mathbf{E}_k \mathbf{h}]}{\omega^2 - \omega_{He}^2}. \quad (1.253)$$

Введя декартову систему координат с осью z , направленной вдоль вектора \mathbf{H}_0 , и пользуясь формулой (1.248), получим выражение для тензора диэлектрической проницаемости [17]:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (1.254)$$

$$\text{где } \eta = 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / \omega^2; \quad \epsilon = 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / (\omega^2 - \omega_{Hs}^2);$$

$$g = - \sum_s \omega_{ps}^2 \omega_{Hs} / \omega (\omega^2 - \omega_{Hs}^2). \quad (1.255)$$

Здесь суммирование ведется по электронам и ионам.

Ранее мы пользовались уравнением Пуассона, которое при введении вектора \mathbf{D} можно преобразовать к виду [8, 17]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1.256)$$

Для фурье-компонент это уравнение преобразуется в следующее: $k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} E_{k\beta} = 0$. С учетом того, что $E_{k\beta} = -ik_\beta \varphi_k$, получим окончательно

$$k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.257)$$

В отсутствие магнитного поля компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ упрощаются так, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (1.258)$$

Иными словами, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} (1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2)$. Подставив это выражение в соотношение (1.257), получим $(k_\alpha k_\alpha = k^2) k^2 (1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2) = 0$ или $1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2 = 0$, что совпадает с дисперсионным соотношением (1.18) для ленгмюровских колебаний с учетом движения ионов. Если учесть температуру в уравнениях движения и использовать еще уравнения непрерывности для каждой из компонент плазмы, можно получить из уравнения (1.257) также и выражение для частоты ионно-звуковых колебаний. Однако наиболее полезно использовать тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ для исследования колебаний в магнитном поле. Из уравнений Максвелла (1.250) следует, что

$$\mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{E}_k) - k^2 \mathbf{E}_k = -(\omega^2/c^2) \mathbf{D}_k,$$

или

$$k_\alpha (k_\beta E_{\alpha\beta}) - k^2 \delta_{\alpha\beta} E_{k\beta} = -(\omega^2/c^2) \varepsilon_{\alpha\beta} E_{k\beta}. \quad (1.259)$$

Так как нас интересуют нетривиальные решения $E_{k\beta} \neq 0$, то следует потребовать обращения в нуль детерминанта системы уравнений (1.259). При этом получим дисперсионное соотношение.

Рассмотрим случай низких частот, когда существенно движение ионов. Компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ при этом имеют вид ($m/M \ll 1$):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Hi}^2} & -i \frac{\omega_{pi}^2 \omega}{\omega_{Hi}(\omega^2 - \omega_{Hi}^2)} & 0 \\ i \frac{\omega_{pi}^2 \omega}{\omega_{Hi}(\omega^2 - \omega_{Hi}^2)} & 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega^2 - \omega_{Hi}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (1.260)$$

Пусть волна распространяется в плоскости yz , тогда система уравнений (1.259) примет вид:

$$N^2 E_x = \varepsilon E_x + ig E_y; \quad (1.261)$$

$$N_y(N_y E_y + N_z E_z) - N^2 E_y = ig E_x - \varepsilon E_y; \quad (1.262)$$

$$-N^2 E_z + N_z(N_y E_y + N_z E_z) = -\eta E_z, \quad (1.263)$$

где $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ — квадрат показателя преломления, а N_y и N_z равны соответственно $k_y c / \omega$ и $k_z c / \omega$. Величина $\eta \gg \varepsilon, g$, поскольку $\omega \ll \omega_{He}$, а ω_{He} , как правило, меньше или порядка ω_{pe} . Поэтому из уравнения (1.263) следует, что $E_z \approx E_y N_z N_y / \eta \ll \ll E_y$. Это соответствует тому физическому факту, что в случае низких частот электрическое поле волны E_z довольно быстро уничтожается движением электронов вдоль магнитного поля [17]. Пренебрегая величиной E_z в уравнениях (1.261), (1.262) и исключая из них E_x и E_y , получаем дисперсионное соотношение

$$N^4 - N^2(\varepsilon + \varepsilon / \cos^2 \theta) + (\varepsilon^2 - g^2) / \cos^2 \theta = 0; \quad \sin \theta = k_y / k. \quad (1.264)$$

Подставляя в него значения ε и g , преобразуем дисперсионное соотношение к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} & [\omega_{pi}^4 / (\omega^2 - \omega_{Hi}^2) \omega^4 \cos^2 \theta \omega_{Hi}^2] [k^4 v_A^4 \cos^2 \theta - \\ & - \omega^2 k^2 v_A^2 (1 + \cos^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta) + \omega^4] = 0; \\ & q = kc / \omega_{pi}; \quad v_A = H_0 / \sqrt{4\pi n_0 M}. \end{aligned} \right\} \quad (1.265)$$

Решение этого уравнения при $\omega \neq \omega_{Hi}$ имеет вид

$$\omega^2 = (1/2) k^2 v_A^2 \{ (1 + \cos^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta) \pm \sqrt{(1 + \cos^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta} \}. \quad (1.266)$$

При $q \ll 1$ получим

$$\omega_1^2 = k^2 v_A^2; \quad \omega_2^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta. \quad (1.267)$$

Первое из этих соотношений связывает частоту и волновой вектор для магнитно-звуковой волны, второе — для альфвеновской волны [10, 17]. Фазовые скорости этих волн порядка v_A . Как правило, отношение тепловой скорости ионов к альфвеновской очень мало, так как $v_{Ti}^2 / v_A^2 = 8\pi n_0 T_i / H_0^2 = \beta \ll 1$. Величина β характеризует отношение давления плазмы к давлению магнитного поля и в обычных экспериментальных условиях составляет по порядку 10^{-2} — 10^{-3} . Ионный пучок, распространяющийся вдоль магнитного поля, возбуждает альфвеновские или магнитно-звуковые колебания в изотермической плазме в том случае, если скорость его порядка v_A . Однако если альфвеновская скорость при этом превышает тепловую скорость электронов плазмы, то неустойчивыми могут оказаться в принципе и электронные ленгмюровские колебания. Таким образом, ионный пучок возбуждает только альфвеновские или магнитно-звуковые волны при $T_e \sim T_i$, $\beta < m/M$. Такие значения β имеет, например, плазма солнечного ветра. Как показано при исследовании плазмы без магнитного поля, гидродинамическая стадия неус-

тойчивости пучков довольно быстро переходит в кинетическую стадию, поэтому влияние ионного пучка на дисперсионное соотношение нужно описывать в кинетическом приближении. Это приведет к появлению дополнительных слагаемых в сумме по s для компонент тензора диэлектрической проницаемости, пропорциональных n_{0b}/n_0 .

§ 1.25. Интегрирование по траекториям

Найдем поправку к функции распределения частиц пучка по скоростям, когда пучок инжектируется в плазму, помещенную в магнитное поле.

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения ионов пучка в нулевом приближении в присутствии магнитного поля:

$$\partial f_0 / \partial t + \mathbf{v} \partial f_0 / \partial \mathbf{r} + (e/Mc) [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \partial f_0 / \partial \mathbf{v} = 0. \quad (1.268)$$

Электрическое поле отсутствует, так как плазма квазинейтральна, а здесь рассматривается задача об инжекции пучка в плазму. Решением этого уравнения будет любая произвольная функция характеристик, уравнения для которых имеют вид

$$dt/1 = d\mathbf{r}/\mathbf{v} = d\mathbf{v}/(e/Mc) [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]. \quad (1.269)$$

Уравнения (1.269) формально можно получить, исходя из того, что в пространстве t, \mathbf{v} и \mathbf{r} вектор $\mathbf{g} = \{\partial f_0 / \partial t, \partial f_0 / \partial \mathbf{r}, \partial f_0 / \partial \mathbf{v}\}$ является нормалью к поверхности $f_0 = \text{const}$. Уравнение (1.268) при этом можно трактовать как обращение в нуль скалярного произведения вектора нормали в пространстве $t, \mathbf{v}, \mathbf{r}$ и некоторого вектора с компонентами $\mathbf{R} = \{1, \mathbf{v}, (e/Mc) [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]\}$, т. е. $(\mathbf{g} \mathbf{R}) = 0$. Это означает, что вектор \mathbf{R} в рассматриваемом семимерном пространстве должен лежать в плоскости, касательной к поверхности $f_0 = \text{const}$, т. е. должен быть коллинеарен вектору $\{dt, d\mathbf{r}, d\mathbf{v}\}$. Уравнения (1.269) можно переписать в виде

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}; \quad d\mathbf{v}/dt = (e/Mc) [\mathbf{v} \mathbf{H}_0], \quad (1.270)$$

который представляет собой уравнения движения частицы с зарядом e и массой M в магнитном поле \mathbf{H}_0 . Будем считать, что магнитное поле направлено по оси z , тогда

$$dv_x/dt = \omega_{Hi} v_y; \quad dv_y/dt = -\omega_{Hi} v_x; \quad dv_z/dt = 0. \quad (1.271)$$

Дифференцируя первое из уравнений системы (1.271) по времени и подставляя в него выражение для dv_y/dt из второго уравнения, получаем $d^2 v_x / dt^2 = -\omega_{Hi}^2 v_x$. Решение этого уравнения

$$v_x = v_{\perp}^0 \cos(\omega_{Hi} t + \alpha), \quad (1.272)$$

где v_{\perp}^0 и α — постоянные интегрирования. Из первого уравнения системы (1.271) с учетом (1.272) получаем

$$v_y = -v_{\perp}^0 \sin(\omega_{Hi}t + \alpha). \quad (1.273)$$

Из последнего уравнения системы (1.271) имеем

$$v_z = v_z^0, \quad (1.274)$$

где v_z^0 — еще одна постоянная интегрирования. Интегрируя уравнения (1.272)—(1.274) еще раз по времени, получим траекторию движения иона в постоянном магнитном поле:

$$\left. \begin{aligned} x &= (v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) \sin(\omega_{Hi}t + \alpha) = x_0; \\ y &= (v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) \cos(\omega_{Hi}t + \alpha) + y_0; \\ z &= v_z^0 t + z_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.275)$$

Здесь x_0, y_0, z_0 — постоянные интегрирования. Уравнения (1.275) описывают вращение иона с частотой ω_{Hi} в плоскости xy , перпендикулярной \mathbf{H}_0 , и равномерное поступательное движение вдоль магнитного поля со скоростью v_z^0 .

Функция распределения f_0 в невозмущенном состоянии должна быть произвольного вида функцией постоянных интегрирования: $f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = f_0(v_{\perp}^0, v_z^0, \alpha, \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Для первой поправки к функции распределения пучка ионов в плазме f_1 , появление которой связано с возникновением самосогласованных электрических и магнитных полей, можно записать уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{M_c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \\ = -\frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_1] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (1.276)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H}_1 — электрическое и магнитное поле возмущения. Левую часть уравнения (1.276) можно записать в виде полной производной по времени, которая берется вдоль траектории, описываемой уравнениями (1.275), т. е.

$$df_1/dt = -(e/M) \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}_1] \} \partial f_0 / \partial \mathbf{v}. \quad (1.277)$$

Интегрируя уравнение (1.277) по времени, получаем

$$f_1 = -(e/M) \int_{-\infty}^t \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}_1] \} (\partial f_0 / \partial \mathbf{v}) dt'. \quad (1.278)$$

Здесь возмущение полагается равным нулю при $t = -\infty$ согласно принципу причинности, подобно тому как это делалось при получении формул для затухания Ландау (см. § 1.8). Как \mathbf{E} и \mathbf{H} , так и $\partial f_0 / \partial \mathbf{v}$ являются функциями координаты \mathbf{r} и времени t . При интегрировании по t' они должны браться в точках траектории (1.275) так, что, например, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}[\mathbf{r}(t'), t']$, где зависимость $\mathbf{r}(t')$ задана формулами (1.275).

Для рассматриваемого случая ионного пучка, параметры которого не зависят от координат, можно считать, что функцию распределения в начальный момент f_0 можно выбрать в виде $f_0 = f_0(v_{\perp}^0, v_z^0, \alpha)$. В цилиндрической системе координат с осью z такая функция не зависит от угла α . Поэтому ее можно выбрать в виде $f_0 = f_0(v_{\perp}^0, v_z^0) = f_0(v_x^2 + v_y^2, v_z^0)$.

Разумеется, функцию распределения нельзя выбрать совершенно произвольной, так как она должна удовлетворять определенным физическим требованиям. В этом отношении весьма удобна максвелловская функция распределения с одинаковыми или различными поперечной и продольной температурами вида

$$f_0 = n_{0b} \left(\frac{m}{2\pi T_{\parallel}} \right)^{1/2} \frac{m}{2\pi T_{\perp}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2T_{\perp}} - \frac{m(v_z - u)^2}{2T_{\parallel}} \right\},$$

где T_{\perp} и T_{\parallel} — постоянные, характеризующие среднюю энергию частиц поперек и вдоль магнитного поля; u — средняя скорость вдоль оси z . Можно выбрать функцию также в виде δ -функции, что особенно удобно при использовании гидродинамического приближения

$$f = n_{0b} (m/2\pi T_{\perp}) \exp [-m(v_x^2 + v_y^2)/2T_{\perp}] \delta(v_z - v_z^0).$$

Вычислим поправку f_1 по формуле (1.278). Начальная функция распределения зависит лишь от интегралов движения, поэтому при интегрировании ее можно считать постоянной. Производную $\partial f_0 / \partial v$ поэтому надо записать через производные по интегралам движения:

$$\begin{aligned} \partial f_0 / \partial v_x &= (\partial f_0 / \partial v_{\perp}^0) v_x / v_{\perp}^0 = (\partial f_0 / \partial v_{\perp}^0) \cos(\omega_{Hi} t + \alpha); \\ \partial f_0 / \partial v_y &= (\partial f_0 / \partial v_{\perp}^0) \sin(\omega_{Hi} t + \alpha); \\ \partial f_0 / \partial v_z &= \partial f_0 / \partial v_z^0. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.278), получаем

$$\begin{aligned} f_1 &= - \frac{e}{M} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}^0} \int_{-\infty}^t \left\{ \left(E_x + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}_1]_x \right) \times \right. \\ &\times \cos(\omega_{Hi} t' + \alpha) + \left(E_y + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}_1]_y \right) \times \\ &\times \sin(\omega_{Hi} t' + \alpha) \left. \right\} dt' - \frac{e}{M} \frac{\partial f_0}{\partial v_z^0} \times \\ &\times \int_{-\infty}^t \left(E_z + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}_1]_z \right) dt'. \end{aligned} \quad (1.279)$$

Будем считать, что все возмущенные величины пропорциональны $\exp[-i\omega t + i(kr)]$, тогда

$$\begin{aligned}
 H_k &= (c/\omega) [kE_k]; \\
 f_k &= -\frac{e}{M} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}^0} \int_{-\infty}^t \left\{ E_{kx} \left[1 - \frac{(kv(t'))}{\omega} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_x(E_{kv}(t'))}{\omega} \right\} \cos(\omega_{Hi}t' + \alpha) + \\
 &\quad + \left\{ E_{ky} \left[1 - \frac{(kv(t'))}{\omega} \right] + \frac{k_y(E_{kv}(t'))}{\omega} \right\} \times \\
 &\times [\sin(\omega_{Hi}t' + \alpha)] \exp\{-i\omega(t' - t) + ik[r(t') - r(t)]\} dt' - \\
 &\quad - \frac{e}{M} \frac{\partial f_0}{\partial v_z^0} \int_{-\infty}^t \left[E_z \left(1 - \frac{(kv)}{\omega} \right) + k_z \frac{(Ev)}{\omega} \right] \times \\
 &\quad \times \exp\{-i\omega(t' - t) + ik[r(t') - r(t)]\}.
 \end{aligned} \tag{1.280}$$

Чтобы провести интегрирование, необходимо вычислить выражения типа $(kr(t'))$ и $(kv(t))$. Согласно уравнениям (1.278), $(kr(t')) = (k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) \sin(\omega_{Hi}t' + \alpha + \beta) + k_z v_z^0 t + k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0$, где $\operatorname{tg} \beta = k_y / k_x$; $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Величины E_{kx} , E_{ky} и E_{kz} в уравнении (1.280) являются постоянными.

Рассмотрим сначала волну с частотой $\omega \ll \omega_{Hi}$, у которой вектор k имеет отличную от нуля компоненту k_z . Уравнения (1.260), (1.262) можно переписать при этом в виде ($k_y = 0$)

$$(N^2 - \varepsilon) E_x = igE_y; (N^2 - \varepsilon) E_y = -igE_x. \tag{1.281}$$

Дисперсионные соотношения для магнитно-звуковой и альфвеновской волн при продольном распространении совпадают ($\cos\theta = 1$), однако поляризация их различна. Действительно, из уравнений (1.281) следует, что $(N^2 - \varepsilon)^2 = g^2$, т. е.

$$N^2 = \varepsilon \pm g, \tag{1.282}$$

и, согласно уравнениям (1.281), обе волны оказываются поляризованными по кругу, так как по первому из уравнений (1.281) и уравнению (1.282)

$$E_{kx} = \pm iE_{ky}. \tag{1.283}$$

Альфвеновская волна поляризована так, что $E_{kx} = iE_{ky}$ (правое вращение, т. е. в сторону вращения ионов в магнитном поле), а магнитно-звуковая имеет левое вращение. Поляризация определяется углом φ , таким, что $\operatorname{tg} \varphi = (\operatorname{Re} E_y) / \operatorname{Re} E_x = \operatorname{Re} E_{ky} \times$

$\times \exp(-i\omega t)/\text{Re } E_{kx} \exp(-i\omega t)$. При $E_{kx} = iE_{ky}$ $\text{tg } \varphi = \text{tg } \omega t$, т. е. волна правополяризована.

Итак, в уравнении (1.280) при продольном распространении можно положить $k_y = k_x = 0$, $E_{kz} = 0$, $E_{kx} = iE_{ky}$. Тогда выражение для фурье-компоненты поправки к функции распределения примет вид

$$f_k = - (e/M) [(1 - k_z v_z^0 / \omega) \partial f_0 / \partial v_{\perp}^0 + (k_z v_{\perp}^0 / \omega) \partial f_0 / \partial v_z^0] \times \\ \times iE_{ky} \int_{-\infty}^t \exp \{ -i(\omega_{Hi} t' + \alpha) - \\ - i\omega(t' - t) + ik_z v_z^0(t' - t) \} dt'. \quad (1.284)$$

Интегрируя по t' с учетом того, что возмущение равно нулю при $t = -\infty$, получаем

$$f_k = (e/M) \hat{L}_k f_0 E_{ky} \times \\ \times \exp [-i(\omega_{Hi} t + \alpha)] / (\omega - k_z v_z^0 + \omega_{Hi}), \quad (1.285)$$

где

$$\hat{L}_k = (1 - k_z v_z^0 / \omega) \partial / \partial v_{\perp}^0 + (k_z v_{\perp}^0 / \omega) \partial / \partial v_z^0.$$

Теперь, пользуясь выражением (1.285), можно найти вклад от пучка в тензор диэлектрической проницаемости. Главными членами при продольном распространении в тензоре являются ϵ и g , поэтому и поправки на вклад от пучка будем искать к этим членам. Как уже было показано, тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ связан простым соотношением с тензором проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$. Нам необходимо найти вклад от пучка σ'_{xx} , σ'_{yy} и σ'_{xy} . Для рассматриваемого случая $E_{kx} = iE_{ky}$, поэтому

$$f_k = \frac{e}{2M} \frac{(E_{ky} - iE_{kx}) \exp [-i(\omega_{Hi} t + \alpha)]}{\omega - k_z v_z^0 + \omega_{Hi}} \hat{L}_k f_0, \quad (1.286)$$

а выражение для плотности тока имеет вид

$$j_k = \int v(t) f_k(t) v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 dv_z^0 d\alpha.$$

Отсюда можно найти σ'_{xx} и σ'_{xy} , так как

$$j_x = \frac{e}{2M} \int v_{\perp}^0 \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) \frac{E_{ky} - iE_{kx}}{\omega - k_z v_z^0 + \omega_{Hi}} \times \\ \times \exp [-i(\omega_{Hi} t + \alpha)] (\hat{L}_k f_0) v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 dv_z^0 d\alpha$$

Интегрируя по α от 0 до 2π с учетом того, что f_0 не зависит от α , получаем

$$\sigma'_{xy} = \int \frac{v_{\perp}^0}{2} \frac{e}{2M} \frac{1}{\omega - k_z v_z^0 + \omega_{Hi}} \left(\hat{L}_k \bar{f}_0 \right) v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 dv_z^0;$$

$$\sigma'_{xx} = -i \int \frac{v_{\perp}^0}{2} \frac{e}{2M} \frac{1}{\omega - k_z v_z^0 + \omega_{Hi}} \left(\hat{L}_k \bar{f}_0 \right) v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 dv_z^0,$$

где $\bar{f}_0 = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f_0 d\alpha$. Пользуясь этими формулами, можно най-

ти вклад от пучка в тензор диэлектрической проницаемости, так как $\varepsilon'_{\alpha\beta} = i4\pi\sigma'_{\alpha\beta}/\omega$. Подставляя $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = \varepsilon'$ и $g' = -i\varepsilon'_{xy}$ в уравнение $(N^2 - \varepsilon)^2 = g^2$ и разлагая по малым $\varepsilon'/\varepsilon \sim n_{0b}/n_0$ и $g'/g \sim n_{0b}/n_0$, получаем

$$\gamma = -\pi \frac{n_{0b}}{n_0} \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega \partial D / \partial \omega) |_{\omega = \omega_k}} \int dv_{\perp}^0 dv_z^0 v_{\perp}^{02} \{ (N^2 - \varepsilon) - g \} \times$$

$$\times \hat{L}_k \frac{f_0}{n_{0b}} \delta(\omega + \omega_{Hi} - k_z v_z^0), \quad (1.287)$$

где $D = (N^2 - \varepsilon) - g^2$, причем $\omega = \omega_k$ при $D = 0$, а корень выбирается соответствующим альфвеновской волне, когда $N^2 - \varepsilon = -g$. Если выбрать в качестве функции распределения

$$f_0 = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M v_{\perp}^{02}}{2T} - \frac{M (u - v_{z0})^2}{2T} \right\} n_{0b},$$

то инкремент будет иметь вид [46]

$$\gamma_k = -\frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{n_{0b}}{n_0} \frac{(\omega_k^2 - \omega_{Hi}^2)^2}{\omega_k \omega_{Hi}^2} \times$$

$$\times \frac{\omega_k - k_z u}{k_z v_{Ti}} \exp \left\{ -\left(\frac{\omega_k + \omega_{Hi} - k_z u}{k_z v_{Ti}} \right)^2 \right\}. \quad (1.288)$$

Неустойчивой оказывается альфвеновская волна с $k_z \sim \omega_{Hi}/u$ и $\gamma_k \sim (n_{0b}/n_0) \omega_{Hi} u^2 / v_{Ti} v_A$. Условие применимости кинетического приближения $\gamma < kv_{Ti}$ принимает вид

$$(n_{0b}/n_0)^{1/3} < (v_A/u) \beta^{1/3}. \quad (1.289)$$

Теперь возбуждение волны происходит не при $\omega = k_z u$, а при $\omega + \omega_{Hi} = k_z u$, т. е. тогда, когда в системе координат, движущейся со скоростью пучка, частота волны $\omega' = \omega - (ku)$ совпадает с циклотронной частотой ионов. Это связано с круговой поляризацией волны, и при частоте вращения поля волны, совпадающей

с ω_{Hi} в системе, которая движется со скоростью пучка, происходит эффективное взаимодействие волны с частицей. Резонансы типа $\omega - (\mathbf{k}\mathbf{u}) = \pm \omega_{Hi}$ часто называют доплеровскими, в отличие от черенковских $\omega - (\mathbf{k}\mathbf{u}) = 0$.

Чтобы построить квазилинейную теорию для ионного пучка в магнитном поле, необходимо знать поведение линейного инкремента в зависимости от θ и определить угол θ , при котором γ_k максимально. В работе [47] вычислен инкремент неустойчивости для любых θ и показано, что инкремент максимален при $\theta \ll q = kc/\omega_{pi} \sim \sim v_A/u < 1$, т. е. преимущественно возбуждаются волны, распространяющиеся вдоль направления скорости пучка (см. также [48]).

§ 1.26. Квазилинейная релаксация ионного пучка в плазме, помещенной в магнитное поле

Наиболее удобны здесь цилиндрические координаты в пространстве скоростей. Единственной особенностью, на которую следует обратить внимание, является то, что поправка к начальной функции распределения, которая аксиально-симметрична, зависит от угла α в пространстве скоростей. Поэтому в операторе \hat{L}_k следует оставить производную $\partial/\partial\alpha$. Однако это приведет к появлению в квазилинейном уравнении членов, содержащих сомножителем $\exp(-i\omega_{Hi}t)$. При усреднении по интервалу времени $\tau \sim 1/\gamma \gg \omega_{Hi}^{-1}$ такие члены исчезнут [39], поэтому можно опустить производную $\partial/\partial\alpha$ в операторе \hat{L}_k . Квазилинейные уравнения при этом имеют вид

$$\frac{\partial f_0(t)}{\partial t} = \pi \left(\frac{e}{M}\right)^2 \hat{L}_k \frac{|E_{xx}|^2 2\pi/l_z}{|\partial\omega/\partial k_z - v_z^0|} \hat{L}_k f_0(t) \Bigg|_{k_z = \frac{\omega_k + \omega_{Hi}}{v_z^0}}; \quad (1.290)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E_{xx}|^2}{\partial t} &= 2 |E_{kx}|^2 \pi^2 \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{(\omega_k^2 - \omega_{Hi}^2)}{|k_z| \omega_{Hi}^2} \times \\ &\times \int_0^\infty dv_\perp^0 v_\perp^{02} \hat{L}_k \frac{f_0(t)}{n_{ob}} \Bigg|_{k_z = \frac{\omega_k + \omega_{Hi}}{v_z^0}}, \end{aligned} \quad (1.291)$$

где $\hat{L}_k = (1 - k_z v_z^0 / \omega_k) (1/v_\perp^0) (\partial/\partial v_\perp^0) v_\perp^0 + (k_z v_z^0 / \omega_k) \partial/\partial v_z^0$.

Уравнения (1.290), (1.291) были впервые использованы в работе [46] для нахождения конечного стационарного состояния. Эти уравнения можно решить и для произвольного момента, т. е. можно решить динамическую задачу [48]. Введем в качестве одной из координат характеристику уравнения

$$\hat{L}_k f_0 = 0 \text{ или } (1 - k_z v_z / \omega_k) \partial f_0 / \partial v_{\perp}^0 + (k_z v_z^0 / \omega_k) \partial f_0 / \partial v_z = 0, \quad (1.292)$$

а в качестве другой используем v_z^0 . Характеристика ω определяется из уравнения

$$dv_{\perp}^0 / (1 - k_z v_z^0 / \omega_k) = \omega_k dv_z^0 / k_z v_z^0; \quad k_z = (\omega + \omega_{Hi}) / v_z^0,$$

т. е. одной из координат будет

$$\omega = (1/2) [\omega_{Hi} / (\omega_k + \omega_{Hi})] v_z^{02} + (1/2) v_{\perp}^{02}, \quad (1.293)$$

а другой

$$v = v_z^0. \quad (1.294)$$

Тогда $L_k f_0 = (\partial / \partial v) f_0$, и квазилинейные уравнения примут более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \pi \left(\frac{e}{M} \right)^2 \times \right. \\ &\times \left. \frac{[(\omega_k + \omega_{Hi}) / \omega_k]^2 v_{\perp}^0(\omega, v) / v}{(\partial \omega / \partial k_z - v)} \frac{2\pi}{l_x} |E_x| \frac{\partial f_0(t)}{\partial v} \right\}; \end{aligned} \quad (1.295)$$

$$\left. \begin{aligned} &\Big|_{k_z = \frac{\omega_k + \omega_{Hi}}{v}} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E_{kx}|^2}{\partial t} &= 2\pi^2 |E_{kx}|^2 \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{(\omega_k^2 - \omega_{Hi}^2)^2}{\omega_k \omega_{Hi}^2} \times \\ &\times \int_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega v_{\perp}^{02}(\omega, v) \frac{\partial f_0}{\partial v}. \end{aligned} \quad (1.296)$$

Здесь $\omega_{\min} = (1/2) [\omega_{Hi} / (\omega_k + \omega_{Hi})] v^2$ [см. (1.293)].

Формула (1.295) напоминает первое из квазилинейных уравнений в одномерной теории, однако уравнение для шумов отличается тем, что производная df/dv должна быть проинтегрирована по ω . Основная идея метода может оказаться плодотворной и в этом неодномерном случае. Во-первых, обратим внимание на то, что в пространстве v, ω не происходит диффузии по координате ω . Следовательно, в любой плоскости $\omega = \text{const}$ (на каждой линии $\omega = \text{const}$) число частиц не меняется во времени.

Чтобы выяснить физическую сущность метода решения, разберем следующий пример. Пусть функция распределения частиц в пучке имеет простой вид:

$$f_0(t) = A [F_1(v, t) \delta(\omega - \omega_1) + F_2(v, t) \delta(\omega - \omega_2)]. \quad (1.297)$$

В этом случае уравнение для шумов (1.296) можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln |E_{kx}|^2 = 2\pi^2 \frac{n_{0b}}{n_0} \frac{(\omega_k^2 - \omega_{Hi}^2)^2}{\omega_k \omega_{Hi}^2} A \times$$

$$\times \left[v_{\perp}^{02}(\omega_1, v) \frac{\partial F_1}{\partial v} + v_{\perp}^0(\omega_2, v) \frac{\partial F_2}{\partial v} \right], \quad (1.298)$$

где $v_{\perp}^0(\omega_{1,2}, v)$ определяется из уравнения характеристики (1.293). Квазилинейная система уравнений будет полной, если записать еще выражения для $F_1(v, t)$ и $F_2(v, t)$. Их можно получить из уравнения (1.295), подставив в него выражение (1.297) и проинтегрировав полученное уравнение один раз по интервалу вблизи линии $\omega = \omega_1$, другой раз вблизи линии $\omega = \omega_2$. В результате получим два независимых уравнения для $F_1(v, t)$ и $F_2(v, t)$:

$$\frac{\partial F_{12}(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \pi e^2 / M^2 \frac{[(\omega_k + \omega_{Hi})^2 / |\omega_k|] v_{\perp}^0(\omega_{1,2}, v) / v}{|\partial \omega / \partial k_z - v|} \frac{2\pi}{l_x} \times \right.$$

$$\left. \times |E_{kx}|^2 \frac{\partial F_{12}(v, t)}{\partial v} \right\} \Bigg|_{k_z = \frac{\omega_k + \omega_{Hi}}{v}} \quad (1.299)$$

Положим для определенности, что в момент $t = 0$ $dF_2(v, 0)/dv > > dF_1(v, 0)/dv$, а также что концентрация ионов на линии $\omega = \omega_1$ меньше, чем концентрация на линии $\omega = \omega_2$. При этом получим, что рост шумов в начальный момент определяется производной

$dF_2(v, 0)/dv$ [см. уравнение (1.298)]. В следующие моменты можно считать, что произойдет укрупнение функции $F_2(v, t)$ на линии $\omega = \omega_2$ и в уравнении (1.298) член, содержащий F_1 , станет несущественным. При этом задача в точности соответствует одномерной. Решением при этом будет функция, имеющая форму ступеньки на линии $\omega = \omega_2$. Для значений скорости, больших начального теплового разброса скоростей пучка, вплоть до значений порядка v_f , функция $F_2(v, t)$ представляет собой плато, а затем резко обрывается, обращаясь в нуль (рис. 33). Крутизну фронта в пространстве скоростей Δv можно оценить из соотношения $\Delta v / v \sim$

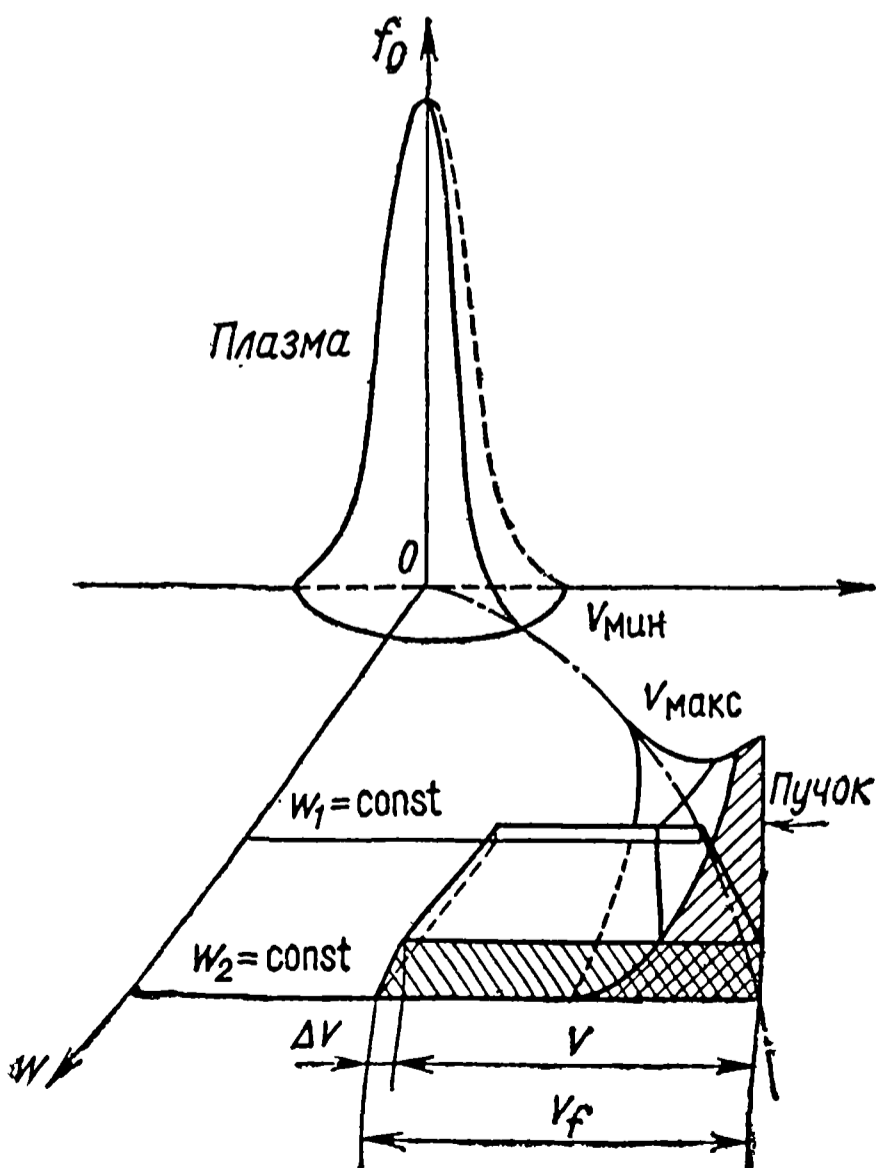


Рис. 33

$\sim \Lambda^{-1}$, где Λ — кулоновский логарифм. На соседней линии $\omega = \omega_1$ релаксация функции распределения происходит по-другому.

Как показано для одномерного случая, характерное время квазилинейной релаксации в интервале Δv пропорционально Λ . На линии $\omega = \omega_2$ это будет именно так, поскольку начальные шумы имеют уровень порядка тепловых. Следует отметить, что за фронтом уровень шумов порядка конечных, поэтому диффузия по v на линии $\omega = \omega_1$, которая начинается позже и описывается уравнением (1.299), происходит со скоростью, определяемой конечным уровнем шумов, так как $|E_{Rx}|$ зависит только от v и не зависит от ω . Поэтому релаксация функции $F_1(v, t)$ в интервале $v_t < v < u$ происходит за время, в Λ раз меньшее, а релаксация на обеих линиях происходит почти одновременно. Координата фронта волны релаксации v_f с точностью до членов порядка Λ^{-1} не зависит от ω . Так как число частиц на линии $\omega = \omega_2$ больше, чем на линии $\omega = \omega_1$, а интервал v примерно одинаков, то в течение всего процесса условие $dF_2/dv > dF_1/dv$ выполняется. Результат остается таким же и в случае выполнения обратного неравенства. Покажем, что решение, найденное для весьма специфического вида функции распределения ионов пучка (1.297), справедливо и для системы, описываемой в общем случае уравнениями (1.295), (1.296). Для этого надо ввести систему n δ -функций; при этом интеграл в уравнении (1.296) превратится в сумму n слагаемых. Предел $n \rightarrow \infty$ даст точное решение системы квазилинейных уравнений, согласующееся с разобранный выше упрощенной моделью. Отметим, что полученное решение имеет более общий характер и применимо к любой системе квазилинейных уравнений типа (1.295), (1.296), а не только к случаю ионного пучка. Такая ситуация может иметь место и для электронного пучка в сильном магнитном поле, когда средняя скорость движения электронов пучка достаточно велика для возбуждения геликонов (волн, плоскость поляризации которых вращается в ту же сторону, что и электрон в магнитном поле), для релятивистских пучков [49] и т. д.

Учитывая полученный характер зависимости функций F_1 и F_2 от v , можно записать следующее выражение для функции распределения ионов пучка:

$$\left. \begin{aligned} f^0 &= \Phi [v - v_f(t)] \psi(\omega) 1/[v_{\text{макс}}(\omega) - v_f(t)]; \\ \Phi [v - v_f(t)] &= \begin{cases} 0 & v < v_f; \\ 1 & v_{\text{макс}}(\omega) > v > v_f, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.300)$$

где v_f — координата фронта в пространстве скоростей, зависящая от времени и не зависящая от ω , а $v_{\text{макс}}(\omega)$ определяется видом начальной функции распределения и формулой (1.293) при $v_{\perp}^0 =$

$= 0$. Функция $\psi(\omega) = \int_0^{v_{\text{макс}}(\omega)} f^0(v, \omega) dv$ — концентрация ионов пучка

на линии $\omega = \text{const}$ — постоянна во времени. Подставляя выражение (1.300) в уравнение (1.296), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln |E_{kx}|^2 = 2\pi^2 \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{(\omega_k^2 - \omega_{Hi}^2)^2}{\omega_k \omega_{Hi}} \times \\ \times \int_{\omega_{\text{мин}}}^{\infty} d\omega \frac{\psi(\omega) v_{\perp}^2(v, \omega)}{v_{\text{макс}}(\omega) - v_f(t)} \delta[v - v_f(t)]. \quad (1.301)$$

Таким образом, $|E_{kx}|^2$ оказывается функцией переменной $\zeta = v - v_f(t)$, и уравнение (1.301) при этом можно переписать в виде

$$- \dot{v}_f(t) \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln |E_{k,x}|^2 = R(\omega_k, k) \times \\ \times \int_{\omega_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{\psi(\omega) v_{\perp}^{02}[\omega, \zeta + v_f(t)]}{v_{\text{макс}}(\omega) - v_f(t)} \delta(\zeta) d\omega, \quad (1.302)$$

где $R(\omega_k, k) = 2\pi^2 \frac{n_{ob}}{n_0} \frac{(\omega_k^2 - \omega_{Hi}^2)^2}{\omega_k \omega_{Hi}^2}$. Интегрирование уравнения по ζ

дает соотношение

$$- \dot{v}_f(t) \approx R(\omega_k, k) \int_{\omega_{\text{мин}}}^{\infty} d\omega \frac{\psi(\omega) v_{\perp}^{02}[\omega, v_f(t)]}{v_{\text{макс}}(\omega) - v_f(t)}. \quad (1.303)$$

Уравнение (1.303) можно легко проинтегрировать по времени. В случае неустойчивости ионного пучка средняя скорость его много больше теплового разброса скоростей пучка, поэтому $\psi(\omega) \approx \delta(\omega - \omega_0)$. Учитывая, что при $\omega \ll \omega_{Hi}$ $\omega_k = k_z v_A$ и $k_z \approx \omega_{Hi}/u$, получим для этого случая

$$- \dot{v}_f(t) \Lambda = 2\pi^2 (u/v_A) (n_{ob}'/n_0) [2\omega_0 - v_f^2(t)] / (u - v_f). \quad (1.304)$$

Так как $\omega_0 \approx u^2/2$, то

$$v_f = u [2 \exp(-Vt) - 1], \quad (1.305)$$

где $V = (2\pi^2/\Lambda) (n_{ob}'/n_0) \omega_{Hi} u / v_A$.

Решение справедливо до значений $v_f > v_A$. Отрицательные значения v_f , получаемые при $t \rightarrow \infty$, физического смысла не имеют. Характерное время релаксации $[(n_0/n_{ob}) v_A / u > 1]$

$$\tau \sim (\Lambda 2\pi^2) (n_0/n_{ob}) (v_A/u) \omega_{Hi}^{-1},$$

а длина, на которой происходит релаксация ионного пучка, инжектируемого в занятое плазмой полупространство,

$$\lambda \sim v_{\text{гр}} \tau \sim v_A \frac{v_A}{u \omega_{Hi}} \frac{n_0}{n_{0b}} \frac{\Lambda}{2\pi^2} = \frac{c}{\omega_{pi}} \frac{v_A}{u} \frac{n_0}{n_{0b}} \frac{\Lambda}{2\pi^2},$$

так как $v_{\text{гр}} = v_A$ при $\omega \ll \omega_{Hi}$.

Интересно, что при $\omega \ll \omega_{Hi}$ характеристика (1.293) принимает вид $\omega_0 - (1/2)v_z^{02} + (1/2)v_{\perp}^{02}$, т. е. релаксация происходит таким образом, что пучок практически не теряет (с точностью до членов порядка ω_k/ω_{Hi}) энергии, рассеиваясь почти упруго. Энергия шумов, которая в одномерной теории определялась величиной $n_{0b} M u^2/2$, теперь в ω_{Hi}/ω раз меньше, но, конечно, много больше энергии тепловых шумов.

Если учесть, что инкремент для волн, распространяющихся под углом θ к оси z , хотя и мал, но конечен, то можно исследовать вторую стадию релаксации, которая приводит к появлению шумов заметной энергии для $\theta > q$. Методика исследования второй стадии в сущности такая же, однако выкладки гораздо более громоздки, поэтому приведем лишь конечный результат, отсылая за подробностями к работе [47]. Найденная функция распределения неустойчива и имеет меньший инкремент относительно возбуждения магнитно-звуковых волн. Второй этап релаксации происходит таким образом, что в системе остается узкий пакет волн с частотами $\omega > \omega_{Hi}$ (магнитно-звуковые колебания существуют и при $\omega \gg \omega_{Hi}$), а $df/dv_z^0 \approx 0$. Это состояние стационарно, однако установление его происходит уже за довольно большой промежуток времени. Релаксация происходит так, что волновой пакет остается все время узким, но среднее волновое число пакета поперек магнитного поля k_{\perp} увеличивается со временем.

УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

§ 2.1. Плазменная ловушка с магнитными пробками

В этой главе рассмотрена плазма в магнитном поле различной конфигурации и выяснена устойчивость такой плазмы в отсутствие пучков и внешних в. ч.-полей.

Одной из первых систем, предложенных для удержания плазмы, была система с магнитными пробками, или пробкотрон [50, 51]. Чтобы выяснить физические принципы работы такой системы, необходимо найти характер движения частицы в постоянных электрическом и магнитном полях, а также в медленно меняющихся во времени и в пространстве полях.

Хорошо известно, что частица в постоянном магнитном поле вращается вокруг силовой линии с циклотронной частотой $\omega_{H\alpha}$ (см. § 1.21) по окружности с радиусом ρ , который легко найти из уравнения движения, положив ускорение dv/dt равным центростремительному $v_{\perp 0}/\rho$:

$$mv_{\perp}^2/\rho = (e/c) v_{\perp} H. \quad (2.1)$$

Отсюда следует выражение для ларморовского радиуса:

$$\rho_{\alpha} = v_{\perp} / \omega_{H\alpha}. \quad (2.2)$$

Движение частицы в случае $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0$ можно найти, если положить $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, где \mathbf{v}_0 не зависит от времени. Подставив это выражение в уравнение движения, получим

$$m d\mathbf{v}_1/dt = (e/c) [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}_0],$$

если

$$\mathbf{v}_0 = (c/H_0^2) [\mathbf{E} \mathbf{H}_0]. \quad (2.3)$$

Таким образом, движение частицы можно представить как сумму движений: вращения с частотой $\omega_{H\alpha}$ вокруг силовой линии и дрейфа центра ларморовского кружка в направлении, перпендикулярном \mathbf{E} и \mathbf{H} . Рассуждая аналогично, получим для силы \mathbf{F}

$$\mathbf{v}_0 = - (c/eH_0^2) [\mathbf{F} \mathbf{H}_0]. \quad (2.4)$$

Ларморовский радиус электронов и ионов мал по сравнению с размером магнитных ловушек, а время действия полей E_0 и H_0 много больше ω_{He}^{-1} . Поэтому частицы можно представить в виде точек, движущихся со скоростями ведущих центров (2.3).

Пусть магнитное поле медленно меняется во времени, так что время изменения поля много больше ω_{He}^{-1} , т. е. $(1/H)(dH/dt) \ll \omega_{He}$. Так как движение частицы представляет собой колебание с частотой ω_{He} , а при медленном изменении поля медленно меняется частота колебаний, то можно воспользоваться известным из механики понятием адиабатического инварианта [51]. При медленно изменяющихся параметрах осциллятора постоянным остается отношение энергии колебаний к частоте, т. е.

$$\mu = v_{\perp}^2 / 2H. \quad (2.5)$$

Рассмотрим изменение магнитного потока, проходящего через ларморовский кружок: $\Phi = \pi r^2 H \sim v_{\perp}^2 / H$. Тогда при изменении магнитного поля возникнет вихревое электрическое поле, напряженность которого по теореме о циркуляции равна $E_{\varphi} = -\dot{H}_{\varphi} / 2c$, где φ — азимутальный угол; $v_{\perp} = v_{\varphi}$. Это приведет к появлению ускорения $\dot{v}_{\varphi} = -eE/m$, и производная $d\Phi/dt$ будет пропорциональна

$$(d/dt) (v_{\varphi}^2 / H) = 2v_{\varphi} \dot{v}_{\varphi} / H - v_{\varphi}^2 \dot{H} / H^2.$$

Подставляя сюда $\dot{v}_{\varphi} = (e\rho/2mc) \dot{H} = (v_{\varphi}/2) (\dot{H}/H)$, получаем $(d/dt) (v_{\varphi}^2 / H) = 0$, т. е. $d\Phi/dt = 0$.

Нетрудно показать, что μ пропорционально магнитному моменту. Если магнитное поле медленно меняется в пространстве, так что $(1/H)(dH/dx) \ll \rho^{-1}$, то μ также постоянно. В магнитной ловушке типа пробкотрон поле имеет вид, изображенный на рис. 34, так что поле на краях системы (H_m) больше, чем в центре (H_0); H_m/H_0 обычно называют пробочным отношением.

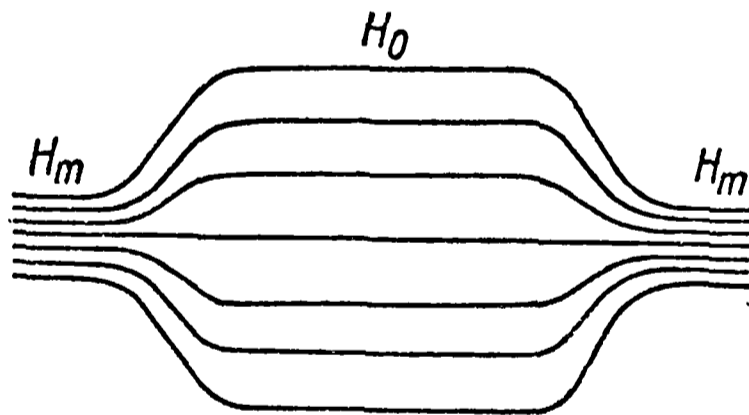


Рис. 34

Допустим, что заряженная частица движется вдоль магнитной силовой линии в сторону возрастания напряженности магнитного поля под углом θ к направлению магнитного поля. Тогда в силу закона сохранения энергии

$$\mathcal{E} = mv^2/2 = mv_{\parallel}^2/2 + mv_{\perp}^2/2 = \text{const}. \quad (2.6)$$

Здесь v_{\parallel} и v_{\perp} — компоненты скоростей вдоль и поперек магнитного поля. При увеличении магнитного поля поперечная скорость должна увеличиваться в силу соотношения (2.5). Поэтому должна уменьшаться продольная скорость [см.: уравнение (2.6)]. При этом

может оказаться, что в некоторой точке магнитной силовой линии, по которой движется частица, продольная скорость обратится в нуль и полная скорость станет равна поперечной.

Поэтому $v_{\perp}^2/2H = v^2 \sin^2 \theta/2H = v^2/2H_A$, т. е. $\sin \theta = \sqrt{H/H_A}$.

Достигнув точки A , частица не сможет продвигаться дальше в сторону увеличения магнитного поля, так как поперечная энергия $mv_{\perp}^2/2$ при этом стала бы больше \mathcal{E} . Поэтому частица от точки A начнет двигаться в противоположном направлении. Таким образом, области сильного магнитного поля ведут себя как зеркала и называются магнитными зеркалами или магнитными пробками. Если скорость частицы такова, что $\sin \theta < \sqrt{H/H_A}$, частица пройдет точку A и выйдет в область большего магнитного поля. Если же поле $H_A = H_m$ — максимальное в системе, то при достаточно большой продольной скорости, т. е. при $\sin \theta < \sqrt{H/H_m}$, частица покинет систему. Таким образом, в ловушке будут удерживаться лишь те частицы, у которых угол θ между направлением скорости и магнитной силовой линией больше некоторого угла θ_0 .

Заряженная частица, захваченная ловушкой, может бесконечно долго удерживаться в ней. Если же в ловушке находится не одна частица, а плазма, появится утечка частиц через пробки. Причиной этого будут кулоновские столкновения частиц, выводящие их внутрь предельного конуса с $\theta < \theta_0$ и $\theta > \pi - \theta_0$, которые приводят к изменению угла θ для частицы. Частица, которая попадает в «конус потерь» за время порядка пролетного, покинет ловушку. Преимущественная тенденция изменения скорости, такая, что частица должна покинуть систему, попав в конус потерь, связана с тем, что перераспределение частиц в фазовом пространстве описывается уравнением диффузии с нулевым граничным условием при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi - \theta_0$. Для решения задачи можно воспользоваться кинетическим уравнением с интегралом столкновений в форме интеграла Ландау [52, 53]. В работе [51] использовали формально введенные источники частиц, компенсирующие уход из ловушки и позволяющие перейти к стационарной задаче. Считалось, что плазма состоит из электронов и однопородных ионов и $T_e = T_i$. При этом можно было пренебречь рассеянием ионов на электронах. Определяя затем из решения стационарной задачи число ионов, пересекающих поверхность конуса потерь в единицу времени, можно было получить время удержания $\tau_{уд}$, или время жизни, разделив полное число частиц N_0 в системе на \dot{N} . Определенное таким способом $\tau_{уд}$ в принципе должно зависеть от характера инжекции, обеспечивающей стационарность задачи. Однако зависимость эта для больших значений пробочного отношения (при которых решение корректно) не существенна, и формула для $\tau_{уд}$ имеет вид [51]

$$\tau_{уд} = 0,785 v_{ii}^{-1} \ln (H_{\max}/H). \quad (2.7)$$

Результат (2.7) интересен тем, что время удержания оказывается слабозависящим от пробочного отношения. Этого следовало ожидать, так как оно определяется в основном диффузией в пространстве скоростей и в меньшей степени углом $\theta_0 = \arcsin(H/H_m)$.

Вследствие малого времени удержания использование ловушки типа пробкотрон в качестве прообраза термоядерного реактора сомнительно [54]. Однако в пробкотроне можно изучать ряд физических явлений, таких, как нагрев плазмы пучками и нагрев прямым разрядом. Например, нагретую за короткое время $\omega_{pe}^{-1} n_0/n_{0b}$ электронным пучком плазму можно затем удерживать в пробкотроне в течение относительно большого времени.

Рассмотрим, как меняются параметры плазмы в пробкотроне при увеличении H во времени. Характерное время изменения поля, разумеется, должно быть много меньше $\tau_{уд}$. С другой стороны, будем считать, что это время велико по сравнению с ларморовским периодом обращения $2\pi/\omega_{H_i, e}$. Это условие обычно легко выполнимо, так как плотность плазмы составляет $10^{11}—10^{12}$ см⁻³, а температура порядка нескольких десятков электронвольт. Возрастание магнитного поля приводит к увеличению поперечной энергии частиц, т. е. к нагреву плазмы согласно формуле (2.5). Частицы при этом не попадают в конус потерь, так как из-за нагрева $\sin \theta$ увеличивается, и можно считать, что за время нагрева не происходит ни одного столкновения. Изменение магнитного поля приведет к появлению азимутального электрического поля согласно закону электромагнитной индукции. Заряженная частица, находящаяся в скрещенных электрическом и магнитном полях, начнет дрейфовать со скоростью $(c/H^2)[E \times H]$ к центру системы, если магнитное поле нарастает во времени. Пусть ведущий центр заряженной частицы находится на расстоянии r от оси ловушки. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора E , взяв в качестве контура интегрирования окружность радиуса r с центром на оси ловушки. Плоскость контура перпендикулярна H . Тогда $E = (r/2c)(dH/dt)$, а

$$v_r = - (c/H) E = - (r/2H) (dH/dt). \quad (2.8)$$

Так как $v_r = \dot{r}$, то $\pi r^2 B = \Phi = \text{const}$.

Если в системе находится не одна частица, а много, но они не сталкиваются, то каждая из них движется согласно уравнению (2.8), однако полный магнитный поток Φ , пронизывающий систему, сохраняется. При одинаковом уменьшении расстояния от всех частиц до центра возрастает концентрация плазмы. Так как $n \sim 1/s$ и $H \sim 1/s$, постоянным остается отношение n/H . Можно считать, что силовые линии «вморожены» в плазму в силу бесконечной проводимости последней, и увеличение магнитного поля приводит к росту плотности плазмы. Размеры плазмы при увеличении магнитного поля уменьшаются, и если конфигурация цилиндрическая, радиус плазмы обратно пропорционален \sqrt{H} .

Выше рассмотрены явления, происходящие вдали от магнитных пробок. Учтем теперь, что система конечна в направлении магнитного поля. Пусть магнитное поле на оси имеет вид [55] $H(z, t) = H_0(t) + (1/2)k(t)z^2$, где $H_0(t)$ и $k(t) \geq 0$ — медленно меняющиеся во времени функции; $\dot{H}_0(t)/H_0 - \dot{k}(t)/k(t) \ll \Omega$ (Ω — частота продольных осцилляций). Ось z направлена вдоль оси ловушки, $z = 0$ в центре ловушки. Уравнение движения частицы имеет вид

$$m \ddot{z} = -\mu \partial H / \partial z = -\mu k(t) z. \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что частица совершает осцилляции с частотой Ω , слабо зависящей от времени: $\Omega = \sqrt{\mu k(t)/m}$. Энергия состоит из двух слагаемых: $\bar{\mathcal{E}} = \overline{m \dot{z}^2} / 2 + \overline{\mu k z^2} / 2$, где черта означает усреднение по периоду колебаний. Так как $z = a \cos(\Omega t + \varphi)$, а $\dot{z} = -a\Omega \sin(\Omega t + \varphi)$, то $\bar{\mathcal{E}} = ma^2 \Omega^2 / 2$ и отношение $\bar{\mathcal{E}}/\Omega$ постоянно, т. е.

$$a^2 \Omega = \text{const}. \quad (2.10)$$

Величину $a^2 \Omega$ называют продольным адиабатическим инвариантом. Если $k(t)$ нарастает во времени, то возрастает частота колебаний и согласно уравнению (2.10) уменьшается амплитуда, т. е. при увеличении магнитного поля без изменения конфигурации уменьшается размер плазмы также и в продольном направлении. Продольная составляющая скорости частицы $v_{\parallel} = \dot{z}$ также увеличивается, поскольку $\bar{\mathcal{E}} \sim \Omega$. Таким образом, $v_{\parallel} \sim \sqrt{\bar{\mathcal{E}}} \sim [k(t)]^{1/4}$. Поперечная скорость растет пропорционально \sqrt{H} ; поэтому если увеличивать поле, не меняя его конфигурации, в q раз, то $\theta = \text{arctg}(v_{\perp}/v_{\parallel})$ будет возрастать, так как v_{\perp}/v_{\parallel} будет расти как $q^{1/4}$ и частицы не выйдут в конус потерь. Нагрев плазмы при помощи такого адиабатического сжатия действительно приводит к увеличению в ней nT [56]. Однако возникающие при этом неустойчивости, связанные с анизотропией функции распределения по скоростям, существенно уменьшают время жизни ионов в системе.

§ 2.2. Желобковая неустойчивость

Неоднородность плотности плазмы и магнитного поля в пробкотроне может привести к неустойчивости и уменьшению времени жизни плазмы в системе. Если $k_z = 0$, а $k_y \neq 0$, то возмущения остаются постоянными вдоль силовых линий магнитного поля. Именно такие возмущения называют желобковыми. Так как частота колебаний, например, пружины пропорциональна корню квадратному из коэффициента упругости, то по отношению к возмущениям с $k_z = 0$ плазма не обладает никакой «упругостью». Поэтому можно ожидать, что небольшие искривления силовых линий магнитного поля или воздействие силы тяжести, направленной в

сторону убывания плотности, приведут к нарастанию возмущений. Таким образом, необходимо выяснить, как изменятся траектории движения частиц при учете неоднородности магнитного поля или введении некоторой эквивалентной силы тяжести mg . Неоднородность магнитного поля можно описать, введя радиус кривизны ρ_0 силовой линии: $(\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0 = (1/\rho_0) \mathbf{N}_0$ (\mathbf{h}_0 — единичный вектор, касательный к магнитной силовой линии, а \mathbf{N}_0 — вектор нормали), а также производную $\partial |\mathbf{H}| / \partial r$ (рис. 35).

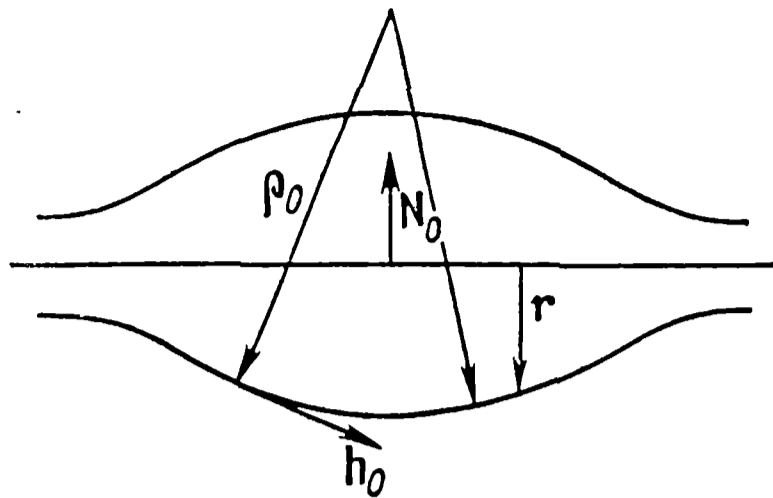


Рис. 35

Уравнение движения электрона имеет вид

$$m d\mathbf{v}/dt = - (e/c) [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] - \mu \nabla |\mathbf{H}_0|. \quad (2.11)$$

Сил, действующих вдоль силовой линии, нет. Если бы силовые линии были прямыми, то согласно формуле (2.4) электрон, двигаясь вдоль них с постоянной скоростью v_{\parallel} , дрейфовал бы еще поперек под действием силы $-\mu \nabla |\mathbf{H}_0|$ со скоростью

$$\mathbf{v}_1 = (mv_{\perp}^2 / e2H_0^2) [\mathbf{h}\nabla |\mathbf{H}_0|]. \quad (2.12)$$

Кривизну силовой линии проще всего учесть, перейдя в систему координат, движущуюся со скоростью v_{\parallel} вдоль силовой линии. Если радиус кривизны силовой линии ρ_0 , то можно сказать, что новая система вращается с угловой скоростью Ω относительно лабораторной системы, так что $\mathbf{h}v_{\parallel} = [\Omega \rho_0]$; $(\Omega \rho_0) = 0$. Полная скорость частицы $\mathbf{v} = \mathbf{h}v_{\parallel} + \mathbf{v}_{\text{отн}}$ зависит теперь от координаты, так как $\mathbf{v} = [\Omega \rho_0] + \mathbf{v}_{\text{отн}}$. По теореме Кориолиса уравнение движения во вращающейся системе координат имеет вид

$$m \mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{f} + 2m [\mathbf{v}_{\text{отн}} \Omega] - m [\Omega [\Omega \rho_0]] - m [\dot{\Omega} \rho_0]. \quad (2.13)$$

Здесь $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ и $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ — ускорение и скорость частицы во вращающейся системе координат. Так как $(\Omega \rho_0) = 0$, то $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_{\perp}$ и $\Omega = - (v_{\parallel} / \rho_0^2) [\mathbf{h}\rho_0]$, откуда следует, что вектор Ω является величиной первого порядка по неоднородности, связанной с кривизной силовых линий. Поэтому члены, содержащие производные от вектора Ω по времени, как величины второго порядка можно не принимать во внимание, так же как и $\dot{\rho}_0$. Таким образом, влияние кривизны силовых линий приводит к появлению двух сил инерции — кориолисовой и центробежной, описываемых соответственно вторым и третьим слагаемыми в правой части уравнения (2.13).

Итак, вместо уравнения (2.11) получим

$$m \mathbf{a}_{\text{отн}} = - (e/c) [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] - \mu \nabla |\mathbf{H}_0| + 2m [\mathbf{v}_{\text{отн}} \Omega] - m [\Omega [\Omega \rho_0]]. \quad (2.14)$$

Помимо дрейфа, описываемого формулой (2.12), имеет место еще так называемый центробежный дрейф, происходящий со скоростью

$$\mathbf{v}_c = (c/H_0) (mv_{\parallel}^2 / e\rho_0) [\mathbf{h}_0 \mathbf{H}_0] = (c/H_0 e) mv_{\parallel}^2 [\mathbf{h}_0 (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0]. \quad (2.15)$$

Сила Кориолиса, как нетрудно видеть, направлена вдоль силовой линии, поэтому ее изменение скажется лишь в изменении продольной компоненты полной скорости. Полный и последовательный вывод формул, описывающих дрейфовые траектории, можно найти в работе [57]. Центробежный дрейф направлен в разные стороны для электронов и ионов, что может привести к неустойчивости. Вообще говоря, при одинаковой температуре электронов и ионов их средние кинетические энергии равны, т. е. $m_e v_{\parallel e}^2 = M v_{\parallel i}^2 = T$, поэтому скорости центробежного дрейфа электронов и ионов равны по абсолютному значению. Желобковую неустойчивость часто описывают, вводя некое постоянное «ускорение свободного падения» $g \sim T/m\rho_0$. При этом можно пользоваться «плоской моделью», считая, что магнитное поле направлено вдоль оси z , а ускорение g направлено в сторону убывания плотности, т. е. вдоль оси x .

Найдем движение плазмы в невозмущенном состоянии. Для этого, положив в уравнениях движения $dv_e/dt = dv_i/dt = 0$, получим $-(e/c) [\mathbf{v}_e^0 \mathbf{H}_0] n_e + mgn_e - T_e \nabla n_e - e\mathbf{E}_0 n_e = 0$; $(e/c) [\mathbf{v}_i^0 \mathbf{H}_0] n_i + Mgn_i - T_i \nabla n_i + e\mathbf{E}_0 n_i = 0$. Сложив их с учетом того, что $n_e = n_i = n_0$, получим $(1/c) [\mathbf{j}_0 \mathbf{H}_0] = (M + m) gn_0 + (T_e + T_i) \nabla n_0$, или, подставив из уравнений Максвелла $\mathbf{j} = (c/4\pi) \text{rot } \mathbf{H}_0$, $\nabla H_0^2/8\pi = (M + m) gn_0 + (T_e + T_i) \nabla n_0$. Пренебрежем первым слагаемым в правой части последнего уравнения, положив $\nabla n_0/n_0 = (1/n_0) \times (\partial n_0/\partial x) \gg 1/\rho$. Тогда уравнение равновесия примет вид

$$(\partial/\partial x) (H_0^2/8\pi) = \partial\rho_0/\partial x, \quad (2.16)$$

где ρ_0 — давление плазмы. Уравнение (2.16) можно переписать в виде

$$\frac{(8\pi/H_0^2) (\partial/\partial x) (H_0^2/8\pi)}{(1/\rho_0) (\partial\rho_0/\partial x)} = \frac{8\pi\rho_0}{H_0^2} = \beta.$$

Введя характерную длину l_H , на которой заметно меняется

магнитное поле, $l_H = \left| \frac{H_0^2/8\pi}{(\partial/\partial x) (H_0^2/8\pi)} \right|$, и соответствующую величину

$l_p = \left| \frac{\rho_0}{\partial\rho_0/\partial x} \right|$ для давления плазмы, получим

$$l_p / l_H = \beta. \quad (2.17)$$

Так как в сильном магнитном поле $\beta \ll 1$, можно считать, что на длине l_0 , где заметно изменилось давление плазмы, магнитное

поле практически то же. При решении уравнений движения и непрерывности можно пренебрегать производными $(1/H_0) (\partial H_0 / \partial x)$ по сравнению с $(1/n_0) (\partial n_0 / \partial x)$. А так как $1/\rho \sim (1/H_0) (\partial H_0 / \partial x)$, то при решении уравнений равновесия можно было опустить силу $(M + m) g n_0$.

Решая уравнение движения для невозмущенного состояния с учетом того, что $H_0 = \text{const}$, получаем

$$\mathbf{v}_e = (c/H_0) [\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0] - (cm/eH_0) [g \mathbf{h}_0] - (cT_e/eH_0) [(\nabla n_0/n_0) \mathbf{h}];$$

$$\mathbf{v}_i = (c/H_0) [\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0] - (cM/eH_0) [g \mathbf{h}_0] - (cT_i/eH_0) [(\nabla n_0/n_0) \mathbf{h}].$$

Последние слагаемые в выражениях для скорости электронов и ионов характеризуют собой так называемый ларморовский дрейф, направление которого различно для электронов и ионов. Ток, возникающий в результате этого дрейфа, течет в области неоднородности плазмы в направлении оси y , а сила $(1/c)[\mathbf{j} \mathbf{H}]$ направлена по оси x и удерживает плазму. Для исследования желобковой неустойчивости вращение плазмы как целого со скоростью $\mathbf{v} = c[\mathbf{E}_0 \mathbf{h}]/H_0$ не играет никакой роли. Положим $T_i \approx T_e \approx 0$. Выводы, полученные при сравнении l_p и l_H , останутся в силе, так как при $T_i \approx T_e \approx 0$ $\beta \approx 0$. Тогда, пренебрегая массой электрона по сравнению с массой иона, можно считать, что в равновесном состоянии все ионы движутся в направлении оси y со скоростью

$$v_{i0} = -g/\omega_{Hi}. \quad (2.18)$$

Уравнение движения для ионов в первом приближении запишем следующим образом:

$$\partial \mathbf{v}_i / \partial t + v_{i0} \partial \mathbf{v}_i / \partial y = (e/M) \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v}_i \mathbf{H}_0] \}. \quad (2.19)$$

Нас интересуют потенциальные колебания с частотой $\omega \ll \omega_{Hi}$. Поэтому фурье-компонента уравнения (2.19) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -i\omega' M \mathbf{v}_{ik} &= -ike\varphi_k + (e/c) [\mathbf{v}_{ik} \mathbf{H}_0]; \\ \omega' &= \omega + k_y g / \omega_{Hi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

и отношение инерционного члена $-i\omega' M \mathbf{v}_{ik}$ к силе Лоренца $(e/c) [\mathbf{v}_{ik} \mathbf{H}_0]$ есть величина порядка $\omega' / \omega_{Hi} \ll 1$. Используем это неравенство для получения явной зависимости \mathbf{v}_{ik} от φ_k . В нулевом приближении по малому параметру ω' / ω_{Hi} пренебрежем левой частью уравнения (2.20) и получим ($k_z = 0$ для желобковых колебаний)

$$\mathbf{v}_{ik}^{(1)} = (ic/H_0) [\mathbf{h}_0 \mathbf{k}] \varphi_k. \quad (2.21)$$

Подставляя выражение (2.21) в левую часть уравнения (2.20) и разрешая его относительно \mathbf{v}_{ik} , получаем окончательно

$$\mathbf{v}_{ik} = (ic/H_0) [\mathbf{h}_0 \mathbf{k}] \varphi_k - (c/H_0) (\omega' / \omega_{Hi}) \mathbf{k}_\perp \varphi_k, \quad (2.22)$$

где \mathbf{k}_\perp — составляющая волнового вектора, перпендикулярная \mathbf{H}_0 .
Линеаризованное уравнение непрерывности для ионов имеет вид

$$\partial n_i / \partial t + v_{i0} \partial n_i / \partial y + v_{ix} \partial n_0 / \partial x + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0.$$

Фурье-компоненту этого уравнения можно получить обычным образом:

$$-i\omega' n_{ik} - i(\partial n_0 / \partial x) (ck_y / H_0) \varphi_k - in_0 (\omega' / \omega_{Hi}) (ck^2 / H_0) \varphi_k = 0. \quad (2.23)$$

Здесь учтено, что второе слагаемое в формуле для скорости (2.22) меньше первого в ω_{Hi} / ω раз, поэтому оно учитывается лишь в $\operatorname{div} \mathbf{v}_i$, так как $\operatorname{div} \{(c/H_0) [\mathbf{h}_0 \nabla \varphi]\} \equiv 0$. Кроме того, рассматриваются такие длины волн, что $k_y \gg (1/n_0) (\partial n_0 / \partial x)$ (иначе нельзя было бы пользоваться приближением геометрической оптики [58]).

Из уравнения (2.23) находим фурье-компоненту возмущения концентрации ионов

$$n_{ik} / n_0 = (ck_y \kappa / H_0 \omega') \varphi_k - (k_\perp^2 / \omega_{Hi}^2) (e\varphi_e / M), \quad (2.24)$$

где $\kappa = |(1/n_0)(dn_0/dx)|$. Для возмущения концентрации электронов результат можно получить непосредственно из выражения (2.24), учитывая, что в равновесном состоянии электроны не движутся, поэтому ω' следует заменить на ω . Кроме того, можно пренебречь инерцией электронов. Формально это приведет к тому, что последнее слагаемое в выражении (2.24) для электронов будет отсутствовать. Таким образом,

$$n_{ek} / n_0 = ck_y \kappa / H_0 \omega. \quad (2.25)$$

Подставляя n_{ek} и n_{ik} в фурье-компоненту уравнения Пуассона $k_\perp^2 \varphi = ck_y \kappa / \omega H_0$, получаем при $k_x \ll k_y$

$$\frac{\omega_{Hi} \kappa}{k_y} \left(\frac{1}{\omega + k_y g / \omega_{Hi}} - \frac{1}{\omega} \right) - 1 = v_A^2 / c^2, \quad (2.26)$$

где $v_A = c\omega_{Hi} / \omega_{pi}$ — альфвеновская скорость.

В достаточно плотной плазме $\omega_{pi} \gg \omega_{Hi}$, поэтому

$$\omega^2 + k_y (g / \omega_{Hi}) \omega + \kappa g = 0. \quad (2.27)$$

При выполнении условия $\kappa g > k_y^2 g^2 / 4\omega_{Hi}^2$ уравнение (2.27) имеет неустойчивые решения. Подставив для оценки $g = T / M\rho_0$, получим, что плазма неустойчива при

$$\rho_0 / a > k_y^2 \rho_i^2, \quad (2.28)$$

где $a = \kappa^{-1}$, $\rho_i^2 = T / M\omega_{Hi}^2$. Так как длины рассматриваемых волн много больше ларморовского радиуса ионов, а радиус кривизны силовой линии ρ_0 много больше характерной длины неоднородности, неравенство (2.28) выполняется с большим запасом. Поэтому, пренебрегая вторым слагаемым в уравнении (2.27), получаем

$$\omega^2 = -\kappa g, \quad (2.29)$$

т. е. $\omega = \pm i \sqrt{\kappa g}$. Сравнивая второй член в уравнении (2.27) с третьим и первым, получаем, что уравнение (2.29) справедливо при выполнении условия (2.28). Таким образом, неустойчивость оказывается аperiодической с характерным временем нарастания возмущений $(\kappa g)^{-1/2}$. Нарастание таких желобковых возмущений приводит к уходу плазмы из ловушки, а

$$\gamma = \sqrt{\kappa g} = v_{Ti} / \sqrt{a\rho}. \quad (2.30)$$

§ 2.3. Эффект стабилизации желобковой неустойчивости

Эффект стабилизации, предсказанный в работе [59], связан с учетом конечности ларморовского радиуса ионов. Величина ρ_i фигурировала в формулах предыдущего параграфа; однако она появилась там при оценках инкремента, который выражался через эффективное ускорение свободного падения g . Последовательный учет конечности ларморовского радиуса можно провести лишь при кинетическом подходе. В § 1.22 описано, как находить поправку к функции распределения методом интегрирования по траекториям. Поправка к функции распределения ионов по скоростям имеет вид [ср. с формулой (1.278)] -

$$f_1 = - (e/M) \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\partial f_0 / \partial \mathbf{v}) dt' = (e/M) \int_{-\infty}^t \nabla \phi (\partial f_0 / \partial \mathbf{v}) dt'. \quad (2.31)$$

При этом равновесная функция распределения является функцией интегралов движения, а интегрирование в формуле (2.31) ведется по невозмущенным траекториям (1.275). В отличие от случая ионного пучка в магнитном поле, рассмотренного в § 1.22, нас интересует теперь поправка к функции распределения ионов слабонеоднородной плазмы по скоростям. Функция распределения f_0 в этом случае может зависеть от интегралов движения

$$v_{\perp}^0, v_z^0, x_0 = x + v_y / \omega_{Hi}. \quad (2.32)$$

Равновесную функцию распределения f_0 можно выбрать в виде

$$f_0 = n_0(x_0) (M/2\pi T)^{3/2} \exp(-Mv^2/2T) = f_0(v^2/2, x_0), \quad (2.33)$$

где $v^2 = v_{\perp}^2 + v_z^2$. Отметим, что функция распределения рассматривается в той системе координат, где нет направленной скорости ионов $v_{0i} = -g/\omega_{Hi}$.

Определим $\partial f_0 / \partial \mathbf{v}$:

$$\partial f_0 / \partial \mathbf{v} = - (M\mathbf{v}/T) f_0 + \mathbf{e}_y (\partial f_0 / \partial x_0) (1/\omega_{Hi}). \quad (2.34)$$

Подставляя это выражение в формулу (2.31), получаем

$$f_1 = - (f_0/T) e \int_{-\infty}^t (\mathbf{v}\nabla\varphi) dt' + (e/M\omega_{Hi}) (\partial f_0/\partial x_0) \int_{-\infty}^t (\partial\varphi/\partial y') dt'.$$

Но, так как $d\varphi/dt' = \partial\varphi/\partial t' + (\mathbf{v}\nabla)\varphi$, то первый член в формуле для f_1 можно преобразовать следующим образом:

$$f_1(t) = - (e/T) f_0 \varphi(t) + (e/T) f_0 \int_{-\infty}^t \frac{\partial\varphi(t')}{dt'} dt' + (e/M\omega_{Hi}) (\partial f_0/\partial x_0) \int_{-\infty}^t (\partial\varphi(t')/\partial y') dt'. \quad (2.35)$$

Проведя фурье-преобразование уравнения (2.35) с учетом того, что в нашем случае $k_z = 0$ и $kr(t') - kr(t) = (k_{\perp} v_{\perp}^0/\omega_{Hi}) [\sin(\omega_{Hi} t' + \alpha + \beta) - \sin(\omega_{Hi} t + \alpha + \beta)]$ ($\text{tg } \beta = k_y/k_x$; $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$), получим

$$f_k = - (e/T) f_0 \varphi_k + (e/T) \varphi_k \{ -if_0\omega + (cT/eH_0) ik_y (\partial f_0/\partial x_0) \} \int_{-\infty}^t \exp [i (k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) \times \times \{ \sin(\omega_{Hi} t' + \alpha + \beta) - \sin(\omega_{Hi} t + \alpha + \beta) \} - i\omega(t' - t)] dt'.$$

Воспользуемся хорошо известной формулой из теории функций Бесселя [60]:

$$\exp(ia \sin \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) \exp(in\varphi), \quad (2.36)$$

где J_n — функция Бесселя n -го порядка. Тогда выражение для функции распределения примет вид

$$f_k = - (e/T) f_0 \varphi_k + (e/T) \varphi_k [-i\omega f_0 + (cT/eH_0) \times \times ik_y (\partial f_0/\partial x_0)] \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} J_m(k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) J_n(k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) \times \times \frac{\exp \{ i(m-n) \omega_{Hi} t + i(\alpha + \beta)(m-n) \}}{i m \omega_{Hi} - i \omega}. \quad (2.37a)$$

Чтобы определить фурье-компоненту возмущения концентрации ионов, необходимо проинтегрировать f_k по скорости:

$$n_{ik} = \int f_k v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 dv_z^0 d\alpha.$$

Интегрирование по углу α в пространстве скоростей приведет к тому, что в двойной сумме по m и n отличными от нуля будут лишь члены с $m = n$, так что

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} f_k d\alpha = -(e/T) f_0 \varphi_k + (e/T) \varphi_k [(cT/eH_0) k_y \partial f_0 / \partial x_0 - \omega f_0] \sum_n J_n^2(k_\perp v_\perp^0 / \omega_{Hi}) / (n\omega_{Hi} - \omega). \quad (2.376)$$

Для интегрирования по скорости необходимо прежде всего выяснить смысл производной $\partial f_0 / \partial x_0$ и зависимости $f_0(x_0)$, так как $x_0 = x + v_y / \omega_{Hi}$. Величина $v_y / \omega_{Hi} \sim \rho_i$, значит, $f_0(x_0) \approx f(x) + (\partial f_0 / \partial x)(v_i / \omega_{Hi}) + \dots$, так как характерный размер неоднородности плотности плазмы всегда много больше ларморовского радиуса ионов. Поэтому $f_0(x_0) \approx f_0(x)$, т. е. мы имеем дело с локальным максвелловским распределением по скоростям. Учитывая, что $\omega \ll \omega_{Hi}$, в сумме по n можно оставить лишь член с $n = 0$. Тогда

$$\frac{n_{ik}}{n_0} = -\frac{e\varphi_k}{T} + \frac{e\varphi_k}{T} \frac{(-cT/eH_0)(1/n_0)(\partial n_0 / \partial x) k_y + \omega}{\omega} \times \\ \times \frac{M}{T} \int_0^\infty J_0^2\left(\frac{k_\perp v_\perp^0}{\omega_{Hi}}\right) \exp\left(-\frac{M v_\perp^{02}}{2T}\right) v_\perp^0 dv_\perp^0. \quad (2.38)$$

Интеграл в форме (2.38) можно преобразовать следующим образом:

$$I = \frac{M}{T} \int_0^\infty J_0^2\left(\frac{k_\perp v_\perp^0}{\omega_{Hi}}\right) \exp\left(-\frac{m v_\perp^{02}}{2T}\right) v_\perp^0 dv_\perp^0 = \\ = \int_0^\infty J_0^2(k_\perp \rho_i \sqrt{2z}) \exp(-z) dz.$$

Согласно [60] $I = I_0(s) \exp(-s)$; $s = k_\perp^2 \rho_i^2$, т. е.

$$n_{ik}/n_0 = (e\varphi_k/T) (\omega^*/\omega) I_0(s) \exp(-s) + (e\varphi_k/T) (I_0(s) \exp(-s) - 1); \\ \omega^* = (cT/eH_0) k_y \kappa. \quad (2.39)$$

В формуле (2.24) в знаменателе стоит частота $\omega' = \omega + k_y g / \omega_{Hi}$, а в формуле (2.39) — частота ω . Это связано с тем, что вычисляется поправка к функции распределения ионов в движущейся со скоростью $v_{i0} = -e_y g / \omega_{Hi}$ системе координат. В лабораторной системе координат к частоте согласно эффекту Доплера следует добавить $k_y g / \omega_{Hi}$, поэтому в формуле (2.39) следует заменить ω на ω' . Разлагая $I_0(s) \exp(-s)$ в ряд по $s \ll 1$: $I_0(s) \exp(-s) = 1 - s - \dots$, получаем в лабораторной системе координат

$$n_{ik}/n_0 = \varphi_k (c/H_0) (k_y \kappa / \omega') (1 - s) - (k_{\perp}^2 / \omega_{Hi}^2) e \varphi_k / M. \quad (2.40)$$

Первый член при учете конечности ларморовского радиуса несколько уменьшился, так как электрический дрейф ионов определяется не тем значением возмущенного электрического поля, которое оно имеет в центре ларморовской окружности. Поскольку масса электрона мала, для n_{ek}/n_k можно использовать выражение (2.25). Дисперсионное соотношение тогда будет иметь вид [ср. с формулой (2.26)]

$$\frac{\omega_{Hi} \kappa}{k_y} \left(\frac{1 - s}{\omega + k_y g / \omega_{Hi}} - \frac{1}{\omega} \right) - 1 = \frac{v_A^2}{c^2}. \quad (2.41)$$

Считая, что $k_y g / \omega_{Hi} \ll \omega$ и $v_A^2 / c^2 \ll 1$, перепишем формулу (2.41) в виде

$$\omega^2 + \omega \omega^* + \kappa g = 0. \quad (2.42)$$

Отсюда следует

$$\omega = -\omega^*/2 \pm \sqrt{\omega^{*2}/4 - g\kappa}. \quad (2.43)$$

При $g\kappa < \omega^2/4$ плазма устойчива. Подставив сюда $g = T/M_i \rho_0$, получим условие устойчивости в виде

$$k^2 \rho_i^2 > 4a/\rho_0; \quad a = \kappa^{-1}. \quad (2.44)$$

В реальных условиях $a \ll \rho_0$, поэтому стабилизируются даже такие возмущения, длина волны которых много больше ρ_i . Случаи желобковой неустойчивости для $s \geq 1$ подробно исследованы в работе [61], где получена диаграмма устойчивых значений плотности плазмы в зависимости от магнитного поля.

Отметим в заключение, что введение величины $g = T_i / M \rho$ обосновано, даже если затем в выкладках полагать температуру плазмы равной нулю. Это можно легко понять, если обратиться к формулам (2.37) и (2.38), полученным при кинетическом описании. Из них следует, что при $k_z = 0$ (а именно такие колебания рассматриваются) в приближении нулевого ларморовского радиуса $s = 0$ выражение (2.38) не зависит от температуры плазмы.

§ 2.4. Дрейфовая неустойчивость плазмы при $k_{\perp} \rho_i \ll 1$

Начало изучения дрейфовых неустойчивостей положили работы [62, 63], где авторы рассматривали волны с $k_z \neq 0$ в слабонеоднородной плазме, помещенной в магнитное поле. При этом оказалось, что из-за резонансного взаимодействия заряженных частиц с волной амплитуда последних экспоненциально нарастала во времени, несмотря на то, что функция распределения по скоростям была локально максвелловской, а поле силы тяжести Mg отсутствовало. Приведем вначале более наглядный метод расчета, разви-

тый в работах [62, 63], а затем покажем, как эти же результаты получаются методом интегрирования по траекториям.

При получении дисперсионного соотношения для колебаний с частотами, много меньшими циклотронной ионной, и волновыми векторами, удовлетворяющими условию $k^2 \rho_i^2 \ll 1$, можно использовать так называемое дрейфовое кинетическое уравнение [57]. В дрейфовом приближении ($\omega \ll \omega_{Hi}$, $k^2 \rho_i^2 \ll 1$) состояние движения заряженной частицы характеризуется пятью переменными: координатами ведущего центра x , y , z , продольной и поперечной скоростями v_{\parallel} и v_{\perp} , так как здесь можно провести усреднение по периоду циклотронного вращения. Функция распределения относится не к распределению самих частиц, а к распределению их ведущих центров. Когда характерное время много меньше времени между столкновениями частиц, можно записать закон сохранения частиц в элементе фазового объема в обычном виде $(d/dt)(fd\Gamma) = 0$, где $d\Gamma = dx dy dz dv_{\parallel} dv_{\perp}$. По теореме Лиувилля $d\Gamma = \text{const}$, поэтому дрейфовое кинетическое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} df/dt = \dot{\mathbf{r}} \partial f / \partial \mathbf{r} + \\ + (\partial f / \partial v_{\parallel}) dv_{\parallel} / dt + (\partial f / \partial v_{\perp}) dv_{\perp} / dt = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь скорость частицы $\dot{\mathbf{r}}$ и ее ускорение вдоль магнитного поля определяются уравнениями, полученными в § 2.1 и 2.2:

$$\mathbf{r} = v_{\parallel} \mathbf{h}_0 + (c/H_0) [\mathbf{E} \mathbf{h}_0]; \quad dv_{\parallel} / dt = (e/M) (\mathbf{E} \mathbf{h}_0). \quad (2.46)$$

Ускорение частиц поперек магнитного поля можно найти из условия, что магнитный момент μ есть инвариант при $\omega \ll \omega_{Hi}$. При этом $v^2 \sim H$, а для потенциальных колебаний $H = H_0 = \text{const}$; следовательно, $dv_{\perp} / dt = 0$.

Рассмотрим кинетическое уравнение в дрейфовом приближении с учетом сделанных замечаний:

$$\dot{\mathbf{h}}_0 \mathbf{v} \partial f / \partial \mathbf{z} + (c/H_0) [\mathbf{E} \mathbf{h}_0] \partial f / \partial \mathbf{r} + (e/M) (\mathbf{E} \mathbf{h}_0) \partial f / \partial v_{\parallel} = 0. \quad (2.47)$$

В нулевом приближении напряженность электрического поля возмущений равна нулю [если $E_{0x} \neq 0$, колебания рассматриваются в системе отсчета, движущейся со скоростью $v_{0y} = -(c/H_0) E_{0x}$], а функция распределения

$$f_{0i} = [M/2\pi T(x)]^{1/2} \exp \{ -Mv_{\parallel}^2 / 2T(x) \}. \quad (2.48)$$

Для фурье-компоненты функции распределения имеем

$$f = \frac{(c/H_0) k_y \partial f_0 / \partial x + k_z (e/M) \partial f_{0i} / \partial v_{\parallel}}{\omega - k_z v_{\parallel}} \varphi_k. \quad (2.49)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (2.376), получа-

ем, что в пределе $k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Hi} \rightarrow 0$ остается лишь член с $n = 0$ и формула (2.37б) совпадает с формулой (2.49), если в последней положить $k_z = 0$.

Для электронов

$$f_{ke} = - \frac{(c/H_0) k_y \partial f_{0e} / \partial x - k_z (e/m) \partial f_{0e} / \partial v_{\parallel}}{\omega - k_z v_{\parallel}} \Phi_k. \quad (2.50)$$

Окончательный вид дисперсионного соотношения следует из условия квазинейтральности $n_{ek} = n_{ik}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c/H_0) k_y \partial f_{0e} / \partial x - k_z (e/m) \partial f_{0e} / \partial v_{\parallel}}{\omega - k_z v_{\parallel}} dv_{\parallel} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c/H_0) k_y \partial f_{0i} / \partial x + k_z (e/M) \partial f_{0i} / \partial v_{\parallel}}{\omega - k_z v_{\parallel}} dv_{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Рассмотрим сначала случай, когда электронная и ионная температуры одного порядка. В гл. 1 было показано, что слабозатухающие колебания могут существовать в области частот $k_z v_{Ti} \ll \ll \omega \ll k_z v_{Te}$, так как при этом мнимые части интегралов в уравнении (2.51) достаточно малы. Изучим эту область частот. Полезны следующие равенства и обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \partial f_{0i,e} / \partial x &= f_{0i,e} (\partial \ln n_0 / \partial x) \left[1 - \eta_{i,e} \left(\frac{1}{2} - \frac{v_{\parallel}^2}{v_{Ti,e}^2} \right) \right]; \\ \eta_{i,e} &= \partial \ln T_{i,e} / \partial \ln n_0; \quad \partial \ln n_0 / \partial x = (1/n_0) \partial n_0 / \partial x. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

При вычислении левой части уравнения (2.51), представляющей собой вклад электронов в дисперсионное соотношение, воспользуемся условием $k_z v_{Te} \gg \omega$. Это означает, что при вычислении главной части в знаменателе можно пренебречь ω по сравнению с $k_z v_{\parallel}$.

При этом $(c/H_0) k_y \int_{-\infty}^{\infty} (\partial f_0 / \partial x) (k_z v_{\parallel})^{-1} dv_{\parallel} = 0$ из-за четности по v_{\parallel}

функции f_0 . Поэтому

$$n_{ek} = n_0 \frac{e \varphi_k}{T} - i \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial f_0}{\partial x} - k_z \frac{e}{m} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{\parallel}} \right) \delta(\omega - k_z v_{\parallel}) dv_{\parallel},$$

или

$$\begin{aligned} n_{ek} &= n_0 \frac{e \varphi_k}{T_e} + \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \left\{ \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial \ln n_0}{\partial x} \left[1 - \eta_e \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{e}{T} \omega \right\} \exp \left(- \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\omega \ll k_z v_{Te}$, получим окончательно

$$n_{ek} = n_0 \frac{e\varphi_k}{T_e} \left\{ 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left[-\frac{\omega_e^*}{\omega} \left(1 - \frac{\eta_e}{2} \right) + 1 \right] \right\}. \quad (2.53)$$

Вычислить аналогичный интеграл для ионов довольно просто, если вспомнить, что $\omega \gg k_z v_{Ti}$. Из этого неравенства следует, во-первых, что мнимая часть интеграла экспоненциально мала, а во-вторых, что знаменатель интеграла в правой части уравнения (2.51) можно разложить по параметру $k_z v/\omega \ll 1$. Используя пока лишь нулевой член разложения, получаем

$$n_{ik} = -\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c/H_0) k_y \partial f_{oi}/\partial x}{\omega} dv_{\parallel} = -\frac{n_0}{\omega} \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial \ln n_0}{\partial x} \varphi_k. \quad (2.54)$$

Последний результат можно получить, не прибегая к формуле (2.52),

если заметить, что $\int_{-\infty}^{\infty} (\partial f_{oi}/\partial x) dv_{\parallel} = (\partial/\partial x) \int f_{oi} dv_{\parallel} = \partial n_0/\partial x$.

Дисперсионное соотношение (2.51) в этом случае примет вид

$$\omega^*/\omega = 1 + i \sqrt{\pi} (\omega/|k_z| v_{Te}) [1 - (\omega^*/\omega) (1 - \eta_e/2)]. \quad (2.55)$$

Учитывая, что $\omega/k_z v_{Te} \ll 1$, получим для частоты и инкремента

$$\omega = \omega^*; \quad \gamma = -(\sqrt{\pi}/2) (\omega^{*2}/|k_z| v_{Te}) \eta_e. \quad (2.56)$$

Неустойчивость имеет место, если

$$\partial \ln T_e / \partial \ln n_0 < 0. \quad (2.57)$$

Чтобы понять физический смысл этой неустойчивости, рассмотрим распространение дрейфовой волны в пространстве так, как это изображено на рис. 36.

Волна бежит вдоль оси y , так как $\partial \ln n_0 / \partial x < 0$. Поскольку поле потенциально, компонента E_y отлична от нуля. Рассмотрим движение частиц, у которых скорость вдоль магнитного поля близка к фазовой скорости волны ω/k в направлении оси z . Если перейти в систему координат, движущуюся вдоль оси z со скоростью ω/k и вдоль оси y со скоростью $(cT_e/eH_0) \times |\partial \ln n_0 / \partial x|$, то в этой системе E_z и E_y будут постоянны. Поскольку для максвелловской функ-

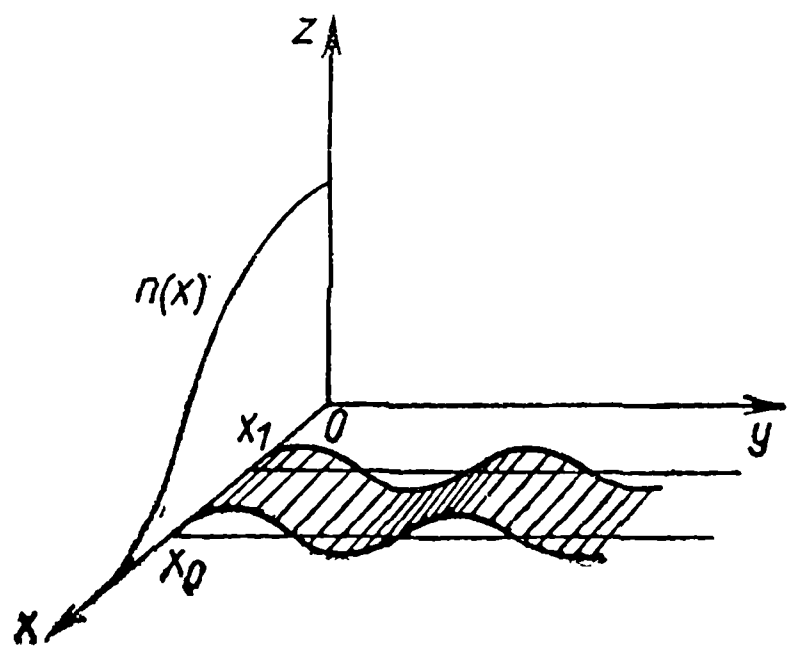


Рис. 36

ции распределения $\partial f/\partial v_z < 0$, взаимодействие волны с частицами приводило бы к затуханию волны, если бы не наличие неоднородности концентрации (см. рис. 36). Из-за дрейфа в скрещенных полях частицы приходят на линию $x = x_0$ с линии $x = x_1$ со скоростью cE_y/H_0 . Увеличение числа частиц в области $x_0 - x_1$ в единицу времени определяется разностью потоков, т. е.

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t) [n_{0p}(x_1 - x_0)] &= (cE_y/H_0)[n_{0p}(x_1) - n_{0p}(x_0)] \approx \\ &\approx (cE_y/H_0) \partial n_{0p}/\partial x |_{x=x_0} (x_1 - x_0), \end{aligned}$$

или

$$\partial n_{0p}/\partial t = (cE_y/H_0) \partial n_{0p}/\partial x. \quad (2.58)$$

Если инкремент неустойчивости, связанный с увеличением числа резонансных частиц, превысит декремент, пропорциональный df_0/dv_{\parallel} , волна окажется неустойчивой.

Рассмотрим неизотермическую плазму, когда $T_e \gg T_i$. Дисперсионное соотношение для ионно-звуковых колебаний можно получить, если в правой части уравнения (2.51) удержат следующий член разложения по $k_z v_{Ti}/\omega$. Таким образом, вместо формулы (2.54) для n_{ik} получим соотношение

$$\begin{aligned} n_{ik} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c/H_0) k_y \partial f_{0i}/\partial x + k_z (e/M) \partial f_{0i}/\partial v_{\parallel}}{\omega - k_z v_{\parallel}} dv_{\parallel} \varphi_k \approx \\ &\approx - \varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} + k_z \frac{e}{M} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_{\parallel}} \right) \left(\frac{1}{\omega} + \frac{k_z v_{\parallel}}{\omega^2} \right) dv_{\parallel} = \\ &= - \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} dv_{\parallel} \varphi_k - \varphi_k \frac{k_z^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{M} v_{\parallel} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_{\parallel}} dv_{\parallel} = \\ &= - \frac{n_0}{\omega} \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial \ln n_0}{\partial x} \varphi_k + n_0 \frac{k_z^2}{\omega^2 M} \varphi_k. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Дисперсионное соотношение при этом будет иметь вид [ср. с уравнением (2.55)]

$$\begin{aligned} \omega_e^*/\omega + k_z^2 T_e M \omega^2 &= 1 + i \sqrt{\pi} (\omega/|k_z| v_{Te}) [1 - \\ &- (\omega_e^*/\omega) (1 - \eta_e/2)]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Здесь у дрейфовой частоты ω^* введен индекс e , чтобы подчеркнуть то, что она определяется электронной температурой. Пренебрегая в первом приближении малой мнимой частью, получим выражение для частоты

$$\omega = \omega_e^*/2 \pm \sqrt{\omega_e^{*2}/4 + k_z^2 T_e/M}, \quad (2.61)$$

из которого следует, что существует как бы два типа ионно-звуковых волн в неоднородной плазме — быстрая и медленная. При $k_z c_z \ll \omega_e^*$ одно из решений (2.61) переходит в $\omega = \omega_e^*$, а другое в $\omega = -k_z^2 c_z^2 / \omega_e^*$. Поэтому зависимость ω от k_z для потенциальных волн имеет вид, изображенный на рис. 37.

Если учесть малые мнимые члены в уравнении (2.60), то окажется, что критерий возбуждения первой, быстрой, волны (со знаком плюс, 1 на рис. 37) остается прежним ($d \ln T_e / d \ln n_0 < 0$), вторая волна (медленная, 2 на рис. 37) в принципе может оказаться также неустойчивой. Чтобы найти ее инкремент, подставим в уравнение (2.60) решение (2.61) со знаком минус и найдем мнимую добавку к частоте, возникающую от малых мнимых членов. В результате получим

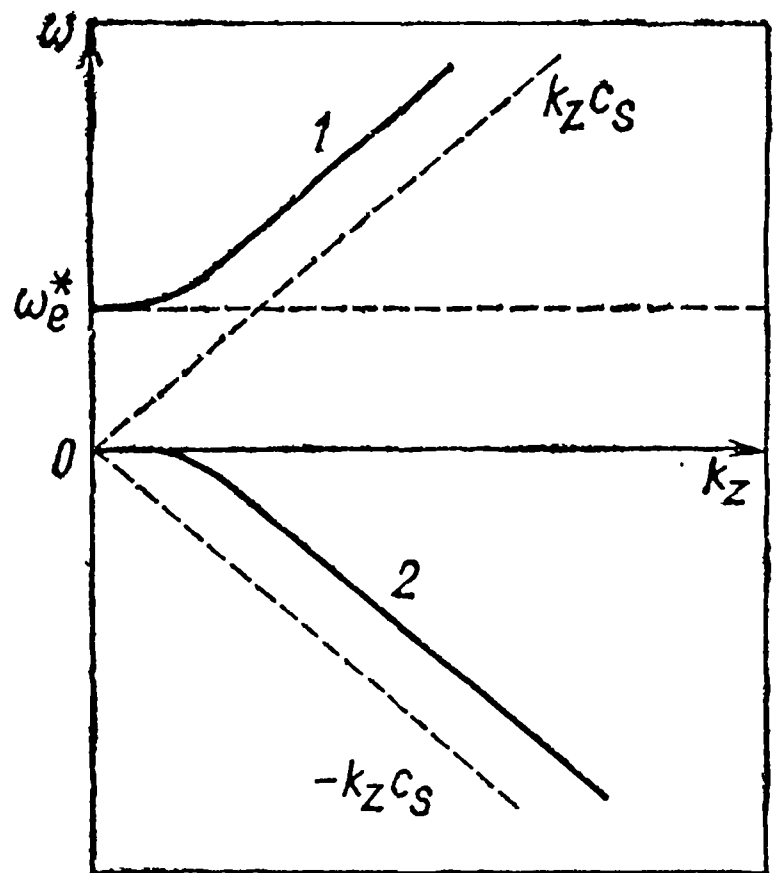


Рис. 37

$$\gamma = -\sqrt{\pi} (\omega_0^2 / |k_z| v_{Te}) [k_z^2 c_z^2 / \omega_e^{*2} + (1 - \eta_e / 2)],$$

где $\omega_0 = -k_z^2 v_{Te}^2 / \omega_e^*$.

Так как выражение для ω_0 получено при разложении уравнения (2.61) по $k_z^2 c_s^2 / \omega_e^{*2} \ll 1$, первым слагаемым в квадратных скобках последнего выражения можно пренебречь, и выражение для инкремента примет окончательный вид

$$\gamma = \sqrt{\pi} (\omega_0^2 / |k_z| v_{Te}) (\eta_e / 2 - 1), \quad (2.62)$$

а условие неустойчивости

$$\eta_e > 2. \quad (2.63)$$

Таким образом, неоднородная плазма, у которой характерные длины изменения электронной температуры и концентрации не совпадают, также оказывается неустойчивой при выполнении критерия (2.63). Учитывая еще условие (2.57), можно в окончательном виде записать область устойчивости плазмы при наличии градиента электронной температуры:

$$2 > \eta_e > 0. \quad (2.64)$$

В работах [62, 63] обнаружен еще один тип дрейфовой неустойчивости, связанной с градиентом ионной температуры. Наиболее просто получить выражение для инкремента этой так называемой дрейфово-температурной неустойчивости, если в выражении (2.59)

учесть члены порядка $k_z v_{Ti}/\omega \ll 1$. При этом вместо формулы (2.59) получим соотношение

$$n_{ik} = -\frac{n_0}{\omega} \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial \ln n_0}{\partial x} \varphi_k + n_0 \frac{k_z^2}{\omega^2 M} \varphi_k - \\ - \frac{c}{H_0} \frac{k_z^2 k_y}{\omega^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_0 T_i}{M} \right) \varphi_k. \quad (2.65)$$

Полное дисперсионное соотношение, описывающее все ветви дрейфовых волн при $k\rho_i < 1$, имеет вид

$$\frac{\omega_e^*}{\omega} + \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} + \frac{\omega_i^* k_z^2 c_s^2}{\omega^3} (1 + \eta_i) = \\ = 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left[1 - \frac{\omega_e^*}{\omega} \left(1 - \frac{\eta_e}{2} \right) \right], \quad (2.66)$$

где $\eta_i = \partial \ln T_i / \partial \ln n_0$; $\omega_i^* = -(cT_i/eH_0) k_y \partial \ln n_0 / \partial x$.

Исследуем дисперсионное соотношение (2.66) для случая $\eta_i \gg 1$. В результате получим $(\omega_i^* k_z^2 c_s^2 / \omega^3) \eta_i = 1$, т. е.

$$\omega^3 = \omega_i^* k_z^2 c_s^2 \eta_i. \quad (2.67)$$

У кубического уравнения (2.67) один из трех корней всегда соответствует неустойчивости с инкрементом

$$\gamma \sim (\omega_i^* k_z^2 c_s^2 \eta_i)^{1/3}. \quad (2.68)$$

Подставляя полученное решение в исходное уравнение (2.67), получаем, что принятые нами допущения справедливы при условии $k_z^2 c_s^2 \ll \gamma^2$, т. е. когда

$$\omega_i^* \eta_i > k_z c_s. \quad (2.69)$$

В этом случае неустойчивость можно считать гидродинамической. Случай $\eta_i \gg 1$ — не исключение, так как в большинстве экспериментальных установок, в которых плазма удерживается магнитным полем, коэффициент диффузии поперек магнитного поля $D_{\perp} = \rho_e^2 \nu_{ei}$ много меньше коэффициента поперечной теплопроводности $\kappa = \rho_i^2 \nu_{ii} n_0$.

Получающееся различие в потоках тепла $\kappa \partial T / \partial x$ и диффузионных потоках частиц $D \partial n_0 / \partial x$ связано с тем, что согласно условию квазинейтральности ионы и электроны не могут диффундировать поперек магнитного поля отдельно, в то время, как вынос тепла поперек магнитного поля в среднем не связан с пространственным перемещением частиц и может происходить отдельно для электронов и ионов.

Представляет интерес найти пороговое значение η_i , при котором начинается неустойчивость. Для этого обратимся к исходному уравнению для дрейфовых колебаний (2.51) и учтем, что для дрейфово-температурной неустойчивости $\omega \ll k_z v_{Ti}$. Это означает, что ионы дают заметный вклад в мнимые члены дисперсионного соотношения. Поскольку $\omega \ll k_z v_{Ti}$, в уравнении (2.51) можно пренебречь вкладом от электронов в мнимую часть дисперсионного соотношения по сравнению с вкладом от ионов, так как при сравнимых температурах они различаются в $\sqrt{M/m}$ раз. Дисперсионное соотношение при этом примет вид

$$1 + \frac{T_i}{T_e} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_i^* (1 - \eta_i/2 + \eta_i v_{\parallel}^2 / v_{Ti}^2) + \omega}{\omega - k_z v_{\parallel}} \frac{f_{0i}}{n_0} dv_{\parallel} = 0. \quad (2.70)$$

Теперь можно приравнять нулю мнимые и действительные части уравнения (2.70). Мнимая часть обязана своим происхождением затуханию Ландау на ионах, а в действительную часть дает вклад интеграл в смысле главного значения. Таким образом, для пороговых значений имеем:

$$1 + \frac{T_i}{T_e} - \mathcal{P} \int \frac{\omega_i^* (1 - \eta_i/2 + \eta_i v_{\parallel}^2 / v_{Ti}^2) + \omega}{\omega - k_z v_{\parallel}} \frac{f_{0i}}{n_0} dv_{\parallel} = 0; \quad (2.71)$$

$$1 - \eta_i/2 + \eta_i \omega^2 / k_z^2 v_{Ti}^2 + \omega / \omega_i^* = 0. \quad (2.72)$$

Из уравнения (2.72) следует, что $\omega = -\omega_i^* (1 - \eta_i/2 + \eta_i \omega^2 / k_z^2 v_{Ti}^2)$. Подставив это выражение для ω в уравнение (2.71), получим

$$1 + \frac{T_i}{T_e} - \omega_i^* \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \eta_i/2 + \eta_i v_{\parallel}^2 / v_{Ti}^2) - (1 - \eta_i/2 + \eta_i \omega^2 / k_z^2 v_{Ti}^2)}{\omega - k_z v_{\parallel}} \times \\ \times \frac{f_{0i}}{n_0} dv_{\parallel} = 0,$$

или, сократив на $\omega - k_z v_{\parallel} \neq 0$ числитель и знаменатель подынтегрального выражения,

$$1 + \frac{T_i}{T_e} + \frac{\omega_i^*}{k_z^2 v_{Ti}^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega + k_z v_{\parallel}) \frac{f_{0i}}{n_0} dv_{\parallel} = 0. \quad (2.73)$$

Отсюда следует выражение для пороговой частоты

$$\omega = - (1 + T_i/T_e) k_z^2 v_{Ti}^2 / \omega_i^*. \quad (2.74)$$

Если подставить соотношение (2.74) в формулу (2.72), можно записать окончательное выражение для порогового значения k_z^2 :

$$k_z^2 = \frac{\omega_i^{*2}}{v_{Ti}^2} \frac{(\eta_i/2 - 1)}{\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \left[\eta_i \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) - 1\right]}. \quad (2.75)$$

Подставив пороговое значение k_z^2 в выражение (2.74), получим для пороговой частоты

$$\omega = \omega_i^* \frac{(1 - \eta_i/2)}{[\eta_i (1 + T_i/T_e) - 1]}. \quad (2.76)$$

Из формул (2.75) и (2.76) следует, что ω на пороге неустойчивости действительна при любых значениях η_i . Величина k_z^2 также должна быть действительной, так как иначе волна сильно затухает в пространстве, а нас интересуют неустойчивые периодические в пространстве волны. Поэтому условием неустойчивости будет $k_z^2 > 0$, или

$$\eta_i > 2. \quad (2.77)$$

Таким образом, дрейфово-температурная неустойчивость возникает уже при сравнительно небольших η_i [64].

Если считать для простоты, что температура электронов не зависит от x , а температура ионов равна нулю, то в равновесном состоянии ионы будут покоиться, а электроны — дрейфовать в направлении оси y , создавая поверхностный диамагнитный ток, удерживающий вместе с магнитным полем плазму. При этом нетрудно показать из уравнения движения электрона с учетом тепловых поправок, что скорость дрейфа

$$v_{0e} = - (cT_e/eH) \partial \ln n_0 / \partial x.$$

Таким образом, дрейфовые волны, частота которых $\omega = -k_y \times (cT/eH) \partial \ln n_0 / \partial x$, распространяются в сторону дрейфа электронов.

§ 2.5. Дрейфовая неустойчивость при $k_{\perp} \rho_i \geq 1$

Покажем, что учет инерции ионов приводит не к стабилизации найденных неустойчивостей, а, напротив, к появлению новых [65]. Рассмотрим слабонеоднородную плазму, помещенную в магнитное поле, у которой $T_e \gg T_i$ и T_e не зависит от x . В этом случае колебания ионов можно рассматривать в гидродинамическом приближении, а электроны необходимо описывать кинетическим уравнением. Как и прежде, $\omega \ll k_z v_{Te}$. Тогда с учетом инерции ионов фурье-компонента возмущения концентрации ионов будет иметь вид [ср. с (2.24)]

$$n_{ik} = -n_0 k_y \frac{c}{H_0} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \ln n_0}{\partial x} \varphi_k - \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Hi}^2} \frac{e\varphi_k}{M}. \quad (2.78)$$

Для электронов n_{ek} можно получить из формулы (2.53), в которой следует положить $\eta_e = 0$:

$$n_{ek} = n_0 (e\varphi_k/T_e) \{1 + i\sqrt{\pi} (\omega/|k_z|v_{Te}) [1 - \omega_e^*/\omega]\}. \quad (2.79)$$

Дисперсионное соотношение для дрейфовой неустойчивости с учетом инерции ионов следует из условия квазинейтральности:

$$\omega_e^*/\omega - k_{\perp}^2 T_e/M\omega_{Hi}^2 = 1 + i\sqrt{\pi} (\omega/|k_z|v_{Te}) (1 - \omega_e^*/\omega). \quad (2.80)$$

В пренебрежении малыми мнимыми членами имеем

$$\omega = \omega_e^*/(1 + k_{\perp}^2 T_e/M\omega_{Hi}^2). \quad (2.81)$$

Находя поправку к частоте обычным способом, получаем $\gamma = \sqrt{\pi} (\omega^2/|k_z|v_{Te}) (1 - \omega/\omega^*)$, т. е. при $\omega < \omega^*$ колебания неустойчивы. Подставляя теперь в выражение для инкремента формулу (2.81), находим

$$\gamma = \sqrt{\pi} (\omega_e^{*2}/k_z v_{Te}^2) k_{\perp}^2 \rho_s^2 / (1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2)^3. \quad (2.82)$$

Из формулы для инкремента следует, что при $k_{\perp}\rho_s = 1$ он имеет максимум, поэтому быстрее всего возбуждаются волны с $k_{\perp}\rho_s \approx 1$, т. е. в области коротких волн появляются новые неустойчивости.

К неустойчивостям такого же типа может привести неоднородность плотности и при достаточно горячих ионах, т. е. когда $T_e \approx T_i = T$, $\eta_{i,e} = 0$. Однако в этом случае дисперсионное соотношение можно получить, решая полное кинетическое уравнение для ионов, в то время как для электронов можно по-прежнему пользоваться дрейфовым кинетическим уравнением, так как нас интересуют такие длины волн, когда $k_{\perp}\rho_e \ll 1$. Полное кинетическое уравнение решалось в линейном приближении в § 2.3, когда исследовался вопрос о стабилизации желобковой неустойчивости при учете конечности ларморовского радиуса ионов. Метод получения дисперсионного соотношения практически полностью совпадает с методом, изложенным в § 2.3. Различие состоит лишь в том, что в дрейфовых колебаниях в отличие от желобковых возмущения зависят от z , поэтому $k_z \neq 0$. Вследствие этого выражение для фурье-компоненты поправки к функции распределения ионов (2.37а) заменится следующим:

$$\begin{aligned} f_k = & -\frac{e}{T} \varphi_k f_0 + \frac{e}{T} \varphi_k \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} \frac{\omega f_0 - (cT/eH_0) k_y \partial f_0 / \partial x}{\omega - k_z v_z^0 - m \omega_{Hi}} \times \\ & \times J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) \times \\ & \times \exp \{i(m-n) \omega_{Hi} t + i(\alpha + \beta)(m-n)\}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Для вычисления фурье-компоненты возмущенной плотности ионов обе части выражения (2.83) надо проинтегрировать по всему пространству скоростей с учетом того, что в сумме по m необходимо оставить только слагаемое с $m = 0$ ($\omega, k_z v_{Ti} \ll \omega_{Hi}$). При этом интегрирование по углу α приведет к тому, что в сумме останется лишь один член с $m = n = 0$. Воспользовавшись тем, что

$$f_0 \sim \exp \left[-M \frac{(v_z^{02} + v_{\perp}^{02})}{2T} \right] = \exp \left(-M v_z^{02} / 2T \right) \exp \left(-M v_{\perp}^{02} / 2T \right),$$

проведем интегрирование по v_{\perp}^0 . При этом получим

$$\frac{n_{ik}}{n_0} = -\frac{e \varphi_k}{T} + I_0 \exp(-s) \frac{e \varphi_k}{T} (\omega + \omega^*) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_0'(v_z^0)/n_0] dv_z^0}{\omega - k_z v_z^0}, \quad (2.84)$$

где $f_0'(v_z) = n_0 (M/2\pi T)^{1/2} \exp(-M v_z^0/2T)$.

Очень часто в физике плазмы пользуются так называемой функцией Крампа, которая в сущности нами уже изучена при исследовании затухания Ландау. Вводят ее следующим образом:

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2) dx}{z - x + i\nu}, \quad (2.85)$$

где малая мнимая положительная добавка к z задает правило обхода полюса $z = x$ (правило Ландау). Функцию $Y(z)$ можно разбить на сумму двух функций [17]:

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) \int_0^{\infty} \frac{1}{i} \exp[i(z-x)\xi] d\xi = \\ = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\xi \exp\left(iz\xi - \frac{\xi^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x + i\frac{\xi}{2}\right)^2\right] dx = \\ = -i \int_0^{\infty} d\xi \exp\left(iz\xi - \frac{\xi^2}{4}\right) = -i \exp(-z^2) \times \\ \times \left(2 \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy - 2 \int_0^{iz} \exp(-y^2) dy \right).$$

Таким образом,

$$Y(z) = 2 \exp(-z^2) \int_0^z \exp(t^2) dt - i \sqrt{\pi} \exp(-z^2). \quad (2.86)$$

Функция $Y(z)$ затабулирована [66], однако практически во всех интересных случаях можно пользоваться ее асимптотическими приближениями.

Прежде всего отметим, что

$$\frac{n_{ik}}{n_0} = -\frac{e\varphi_k}{T} + I_0(s) \exp(-s) \frac{e\varphi_k}{T} \frac{\omega + \omega^*}{k_z v_{Ti}} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_{Ti}}\right). \quad (2.87)$$

Возмущение же концентрации электронов можно непосредственно получить из формулы (2.87):

$$\frac{n_{ek}}{n_0} = \frac{e\varphi_k}{T} - \frac{e\varphi_k}{T} \frac{\omega - \omega^*}{k_z v_{Te}} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_{Te}}\right). \quad (2.88)$$

Пользуясь условием квазинейтральности, получим дисперсионное соотношение [69]

$$\begin{aligned} \exp(-s) I_0(s) \frac{\omega + \omega^*}{k_z v_{Ti}} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_{Ti}}\right) + \\ + \frac{\omega - \omega^*}{k_z v_{Te}} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_{Te}}\right) = 2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Как было показано, дрейфовые волны неустойчивы при $k\rho_i \ll 1$, если для фазовых скоростей выполняется условие $v_{Ti} < \omega/k_z < v_{Te}$. При этом можно заменить функции $Y(z)$ их разложениями. В области больших значений аргумента, что выполняется для ионов, можно пренебречь мнимой частью функции $Y(z)$ [см. (2.86)], а действительную часть разложить по $z \gg 1$:

$$\begin{aligned} Y(z) \approx 2 \exp(-z^2) \int_0^z \exp(t^2) dt = 2 \exp(-z^2) \int_0^z (1/2t) \times \\ \times \exp(t^2) d(t^2) = 1/z + \exp(-z^2) \int_0^z (1/t^2) \exp(t^2) dt = \\ = 1/z + 1/2z^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.90)$$

Для малых z в случае электронов действительная часть функции $Y(z)$ мала по сравнению с мнимой, поэтому при $z \ll 1$ $Y(z) \approx -i\sqrt{\pi}$. Дисперсионное соотношение при этом принимает вид

$$\exp(-s) I_0(s) (\omega + \omega^*)/\omega - i [(\omega - \omega^*)/k_z v_{Te}] \sqrt{\pi} = 2. \quad (2.91)$$

Рассмотрим сначала случай $k_z^2 v_{Ti}^2 \ll \omega^2$. Тогда

$$\omega = \omega^* \frac{F(s)}{2 - F(s)}; \quad \gamma = 2\sqrt{\pi} \frac{\omega^{*2}}{k_z v_{Te}} \frac{[1 - F(s)] F^2(s)}{[2 - F(s)]^3}, \quad (2.92)$$

где $F(s) = I_0(s) \exp(-s)$.

При уменьшении k_z , когда $\omega/k_z \sim v_{Te}$, инкремент γ становится порядка частоты ω . При малых s неустойчивые колебания распадаются на две ветви. Частота и инкремент одной из них задаются соотношениями (2.92), причем инкремент убывает как s^2 при $s \rightarrow 0$. Это связано с тем, что при $s \rightarrow 0$ величина $1 - F$ пропорциональна s и $\omega^* \sim k_y \rho_i = \sqrt{s}$. Частоту второй ветви можно получить, предположив, что $k_z v_{Te} \ll \omega$. При этом даже в отсутствие малых мнимых добавок в уравнении (2.91) плазма неустойчива. Чтобы убедиться в этом, разложим функцию $Y(\omega^2/k_z^2 v_{Te}^2)$ следующим образом: $Y(\omega/k_z v_{Te}) \approx k_z v_{Te} / \omega + k_z^3 v_{Te}^3 / 2\omega^3$. Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$(\omega_z^2 - \omega^*) / (\omega + \omega^*) = 2\omega^2 s / k_z^2 v_{Te}^2 - \omega^2 / \omega_z^2, \quad (2.93)$$

где $\omega_z^2 = \omega_{Ni} \omega_{He} k_z^2 / k_\perp^2$.

Уравнение (2.93) является кубическим, с коэффициентом при ω^2 равным нулю, поэтому условие устойчивости для него можно получить из формулы Кардана [67]. Для уравнений типа $y^3 + 3py + 2q = 0$ число действительных решений зависит от знака дискриминанта $D = q^2 + p^3$, и при $D < 0$ уравнение имеет три действительных решения, а при $D > 0$ — одно действительное и два комплексно-сопряженных. Отсюда следует, что уравнение (2.93) имеет комплексные корни при

$$\omega^* / \omega_z > 2/5. \quad (2.94)$$

Таким образом, (2.94) есть условие неустойчивости второй ветви колебаний при $s \ll 1$ и $\omega^* > k_z v_{Te}$. Инкремент при этом может достигать значений порядка ω^* . Однако условие $k_z v_{Te} < \omega^*$ является довольно жестким, поэтому такая неустойчивость может возникать лишь в достаточно длинных вдоль магнитного поля установках, когда соответствующее значение k_z достаточно мало. Значение ω^* можно оценить по формуле $\omega^* \sim k_y v_{Ti} \rho_i / a$.

Чтобы получить представление о характерных значениях ω^* , $k_z v_{Te}$, a и т. д., опишем параметры наиболее типичных установок для исследования дрейфовых волн [68]. В таких системах,

как Q-машина (установка со спокойной плазмой), которые как раз предназначены для исследования дрейфовых волн, напряженность магнитного поля составляет 10^3 — 10^4 Э, плотность плазмы 10^8 — 10^{11} см⁻³, а температура электронов и ионов одинакова и составляет примерно 0,2

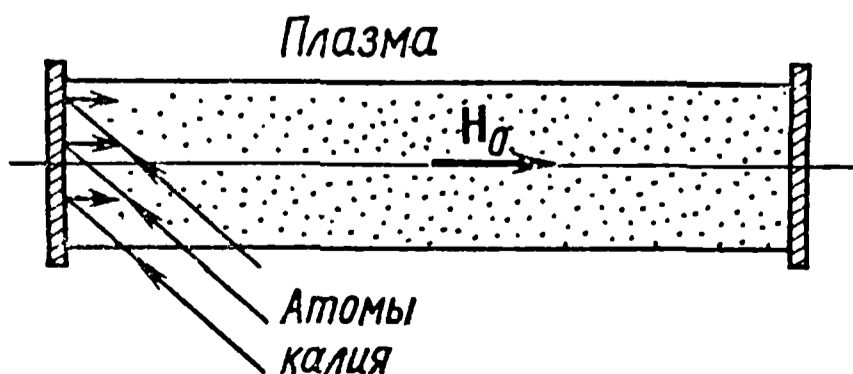


Рис. 38

эВ. Радиус плазмы порядка 1 — 2 см, длина установки до 10^2 см. Система очень интересна тем, что при относительно низкой температуре удавалось получить полностью ионизованную плазму, а это позволяло проводить различные модельные опыты, пользуясь при этом простейшей зондовой диагностикой. Отметим, что плазма (рис. 38) получалась в результате поверхностной ионизации атомов щелочных металлов на раскаленной вольфрамовой пластине, а затем вытекала вдоль магнитного поля, рекомбинируя на второй холодной пластине. Частота дрейфовых волн ω^* для калиевой плазмы в поле с $H=10^3$ Э была порядка 10^4 с $^{-1}$, если считать, что $k_y \rho_i \sim 1/4$. Величина $k_z v_{Te} \sim (2\pi/L_z) v_{Te} \sim 6 \cdot 10^5$ с $^{-1}$ была даже больше циклотронной частоты, которая, в свою очередь, должна превышать дрейфовую. Поэтому условие $\omega^* \gg k_z v_{Te}$ может выполняться только в очень длинных установках. Область достаточно малых k_z интересна тем, что при $\omega^*/k_z \leq v_A$ нарушается потенциальность дрейфовых колебаний. При этом может оказаться, что

$$\omega/k_z \leq v_A \ll v_{Te}, \quad (2.95)$$

т. е. имеет место обычное кинетическое возбуждение дрейфовой неустойчивости. Второе из неравенств (2.95) выполняется, когда

$$\beta = 8\pi\rho/H^2 \gg m/M. \quad (2.96)$$

Приведем наиболее простой способ учета непотенциальности колебаний, который дан в обзоре [69]. В альфвеновских волнах, дисперсионное соотношение для которых $\omega = k_z v_A$, происходит искривление силовых линий магнитного поля, поэтому формально можно ввести «продольный» потенциал ψ , связанный следующим образом с напряженностью вихревого поля: $E_z = -\partial\psi/\partial z$. Поперечную компоненту электрического поля можно считать потенциальной, поэтому можно ввести «поперечный» потенциал ϕ и соответственно $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \phi$. Отметим, что согласно уравнениям Максвелла возмущение магнитного поля

$$H_{xk} = (c/\omega) [\mathbf{kE}_k]_x = (c/\omega) (k_y E_{kz} - k_z E_{ky}) = i (c/\omega) k_y k_z (\phi_k - \psi_k)$$

отлично от нуля лишь в том случае, когда ϕ не совпадает с ψ . В уравнении движения для электронов можно пренебречь членами, содержащими инерцию электронов. Если ввести орт $\mathbf{h} = \mathbf{h}(z, t)$ вдоль мгновенного направления силовой линии, то, пренебрегая массой электронов, получим $0 = -en(\mathbf{Eh}) - T_e(\mathbf{h}\nabla)n$. Но так как $\mathbf{h} = \mathbf{e}_z H_0 / \sqrt{H_z^2 + H_0^2} + \mathbf{e}_x H_x / \sqrt{H_x^2 + H_0^2}$, в линейном приближении по возмущениям

$$0 = i k_z e n_0 \psi_k - i k_z T_e n_{ek} - T_e (H_x/H_0) dn_0'/dx. \quad (2.97)$$

Подставляя сюда выражения для H_x через функции ϕ и ψ , получаем для возмущения концентрации электронов

$$n_{ek}/n_0 = e\varphi_k/T_e + (e/T_e) (\psi_k - \varphi_k) (1 - \omega^*/\omega). \quad (2.98)$$

Чтобы получить соотношение, связывающее φ и ψ , можно воспользоваться z -компонентой уравнения $\partial \mathbf{j} / \partial t = -(c^2/4\pi) \text{rot rot } \mathbf{E}$, где \mathbf{j} — плотность тока. В результате запишем

$$j_z = (c^2/4\pi\omega) k_z k_\perp^2 (\varphi - \psi). \quad (2.99)$$

Поперечная скорость электронов (см. § 2.4) есть $c[\mathbf{E}\mathbf{h}]/H$, а для ионов необходимо учесть их инерцию и уменьшение тока из-за фактора $I_0 \exp(-s)$ при $s \ll 1$. В итоге

$$\mathbf{v}_{ik\perp} = i(c/H) [\mathbf{e}_z \mathbf{k}]_\perp \varphi - i(c/H) [\mathbf{e}_z \mathbf{k}]_\perp k_\perp^2 \rho_i^2 + (c/H) (\omega/\omega_{Hi}) k_\perp \varphi;$$

$$\mathbf{v}_{ek\perp} = i(c/H) [\mathbf{e}_k \mathbf{k}]_\perp \varphi;$$

$$\mathbf{j}_{\perp k} = en_0 (\mathbf{v}_{ik\perp} - \mathbf{v}_{ek\perp}).$$

Теперь можно воспользоваться условием квазинейтральности $n_e = n_i$ или вытекающим из него и уравнений непрерывности для электронов и ионов соотношением $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и определить из него j_{zk} :

$$j_{zk} = i \text{div } \mathbf{j}_{\perp k} / k_z = - (n_0 M c^2 / H^2) (k_\perp^2 / k_z) (\omega + \omega^*) \varphi_k. \quad (2.100)$$

Сравнивая выражения (2.99) и (2.100), находим связь между потенциалами φ и ψ :

$$\psi_k - \varphi_k = - \varphi_k \omega (\omega + \omega^*) / k_z^2 v_A^2,$$

откуда

$$n_{ek}/n_0 = [1 - (\omega^2 - \omega^{*2}) / k_z^2 v_A^2] e\varphi/T; \quad (2.101)$$

$$n_{ik}/n_0 = (e\varphi_k/T) \omega^*/\omega. \quad (2.102)$$

Из условия $n_{ek} = n_{ik}$ окончательно имеем

$$(\omega - \omega^*) (\omega + \omega^* \omega - k_z^2 v_A^2) = 0. \quad (2.103)$$

Это уравнение расщепляется на два: $\omega = \omega^*$, которое соответствует дрейфовой звуковой волне, рассмотренной в § 2.4, и

$$\omega^2 + \omega^* \omega - k_z^2 v_A^2 = 0. \quad (2.104)$$

Из последнего уравнения следует, что при $\omega^* \gg k_z v_A$ $\omega = \omega^*$, а при $\omega^* \ll k_z^2 v_A^2$ $\omega = k_z v_A$. Графическая зависимость частот собственных колебаний от волнового числа в неоднородной плазме представлена на рис. 39.

Волны с положительной частотой (верхние кривые, изображенные сплошной линией) распространяются в сторону дрейфа электронов.

Возбуждение непотенциальных дрейфовых волн подробно изучали авторы работы [70], которые нашли, что неустойчивость возникает только на ускоренной ветви (вторая сверху кривая на рис. 39).

При достаточно больших β и $T_e = T_i$ альфвеновская скорость приближается к тепловой ионной, так как $\sqrt{\beta} \sim v_{Ti}/v_A \sim k_z v_{Ti}/\omega$.

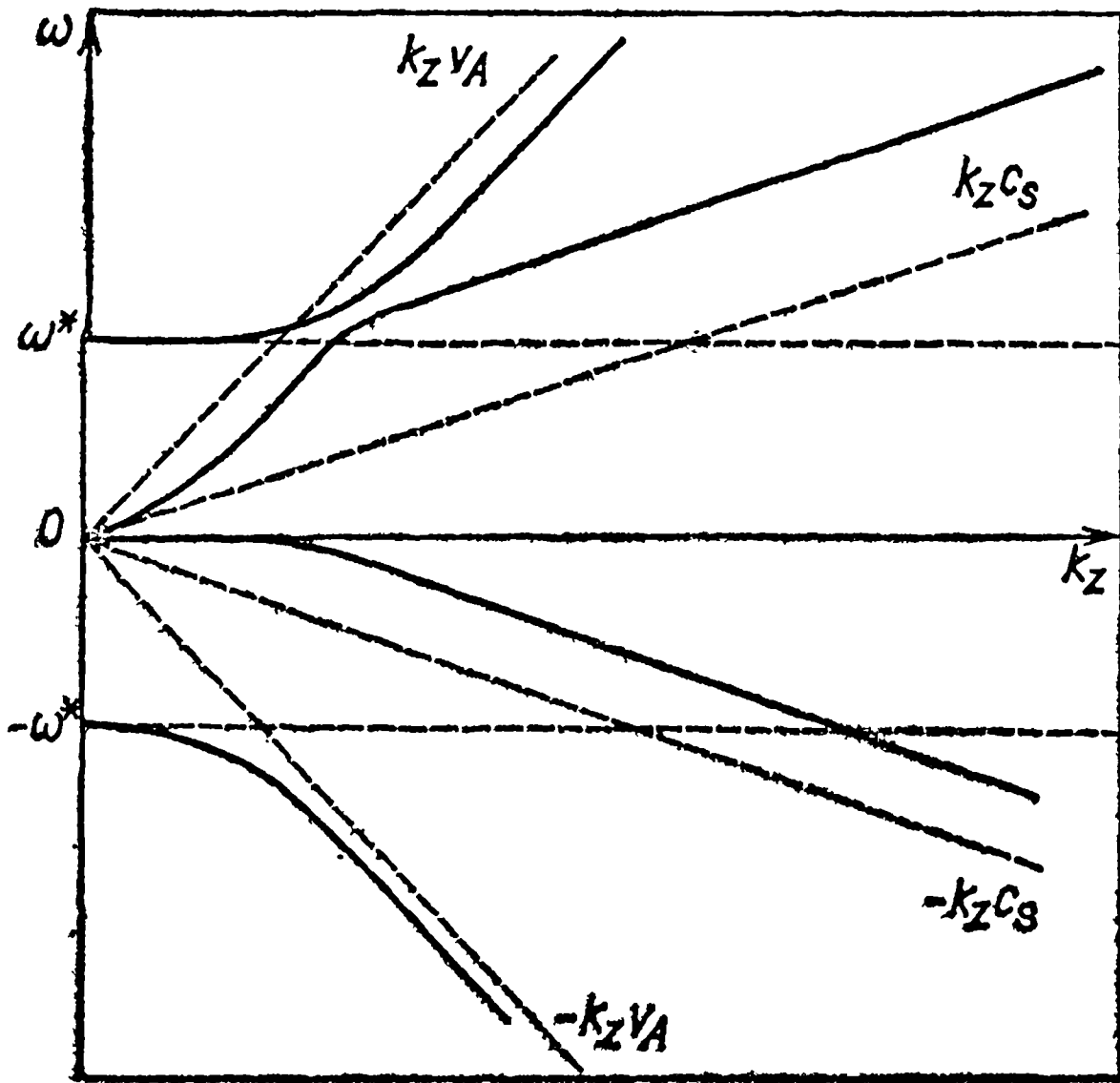


Рис. 39

Это приводит к тому, что по мере увеличения β все большую роль начинает играть затухание Ландау на ионах, и, как показали точные расчеты [71], при $\beta > 0,13$ дрейфовая неустойчивость полностью подавляется ионным затуханием.

К подавлению дрейфовой неустойчивости может также приводить эффект перекрещенности силовых линий, часто называемый *широм*. Если θ — угол, на который поворачивается силовая линия при смещении по радиусу (или вдоль оси x в плоской геометрии) на длину порядка $a = |dn_0/n_0 dx|^{-1}$, то дрейфовая волна, локализуемая в области $\Delta x \sim a$, имеет компоненту $k_{\parallel} \sim k_z + k_y \theta$. Если $v_{Ti} k_y \theta \sim \omega^* \gg k_z v_{Ti}$, неустойчивость можно подавить ионным затуханием. Таким образом, при $\theta \geq \omega^*/k_y v_{Ti} \sim \rho_i/a$ следует ожидать подавления неустойчивости за счет малой перекрещенности силовых линий.

§ 2.6. Ионно-звуковая и циклотронная неустойчивости неоднородной плазмы

Пусть $T_i \ll T_e$. Рассмотрим случай, когда частота волны много больше циклотронной частоты ионов ω_{Hi} , однако $\omega \ll \omega_{He}$. При этом магнитное поле можно считать практически не влияющим на движение ионов в волне, а электроны по-прежнему замагниченными и пользоваться для них дрейфовым приближением. Последнее также означает, что длина волны много больше ларморовского радиуса электронов $k\rho_e \ll 1$.

Рассмотрим потенциальные колебания, для которых $k\rho_e \ll 1$. Из уравнений движения и непрерывности для ионов в гидродинамическом приближении можно найти, как обычно, возмущения концентрации ионов в колебаниях

$$n_{ik}/n_0 = (k^2/\omega^2) (e/M) \varphi_k. \quad (2.105)$$

Концентрацию электронов в возмущениях можно найти, пользуясь дрейфово-кинетическим уравнением, как это сделано в § 2.4. При этом дисперсионное соотношение в общем случае имеет вид

$$k^2 T_e/M\omega^2 + [(\omega - \omega^*)/k_z v_{Te}] Y(\omega/k_z v_{Te}) = 1. \quad (2.106)$$

Для волн, фазовая скорость которых вдоль магнитного поля мала по сравнению с тепловой скоростью электронов, уравнение (2.106) примет вид

$$k^2 c_s^2 / \omega^2 - i \sqrt{\pi} (\omega - \omega^*)/k_z v_{Te} = 1. \quad (2.107)$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений ($\omega \ll k_z v_{Te}$), получаем для частоты и инкремента

$$\omega = kc_s; \quad \gamma = (\sqrt{\pi} k/k_z) \sqrt{m/M} (\omega^* - \omega). \quad (2.108)$$

Из формулы для γ следует, что при $\omega^* > \omega = kc_s$ плазма становится неустойчивой. Полагая $k_x \ll k_y$, получим условие неустойчивости в виде $c_s/\omega_{Hi} > a$, т. е. плазма неустойчива, если ларморовский радиус ионов, определенный по электронной температуре, больше характерной длины неоднородности. Инкремент неустойчивости согласно формуле (2.108) возрастает при увеличении k_y/k_z и при k_y/k_z порядка $\sqrt{M/m}$ достигает значений $\gamma \sim \omega$. При дальнейшем уменьшении k_z для выяснения поведения инкремента и частоты неустойчивости следует пользоваться общим уравнением (2.106), из которого следует, что по достижении максимума при дальнейшем уменьшении k_z инкремент и частота убывают.

Рассмотрим случай, когда частота волны близка к циклотронной частоте ω_{Hi} или к одной из ее гармоник $n\omega_{Hi}$. Как показано в работах [72, 73], в неоднородной плазме при этом возможно возбуждение так называемых дрейфово-циклотронных колебаний. Для нахождения возмущения концентрации электронов можно по-преж-

нему пользоваться формулой (2.88). Концентрацию ионов найдем, проинтегрировав выражение для поправки к функции распределения ионов (2.83) по скоростям и удержав в сумме по m самое большое слагаемое. Если нас интересует частота, близкая к p -й гармонике циклотронной частоты, то

$$\begin{aligned} f_k = & -\frac{e}{T} \varphi_k f_0 + \frac{e}{T} \varphi_k \sum_n \frac{\omega f_0 - (cT/eH_0) k_y \partial f_0 / \partial x}{\omega - k_z v_z^0 - p\omega_{Hi}} \times \\ & \times J_p \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) \times \\ & \times \exp \{ i (p - n) \omega_{Hi} t + i (\alpha + \beta) (p - n) \}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Проинтегрируем это выражение, как обычно, сначала по углу α в пространстве скоростей:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_k d\alpha = & \frac{e}{T} \varphi_k f_0 2\pi + \frac{e}{T} \varphi_k \times \\ & \times \sum_n \frac{\omega f_0 - (cT/eH_0) k_y \partial f_0 / \partial x}{\omega - k_z v_z^0 - p\omega_{Hi}} J_p^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) 2\pi. \end{aligned}$$

Считая, как и прежде, функцию распределения ионов по скоростям максвелловской, получаем, проинтегрировав по скоростям, результат, аналогичный (2.87):

$$\begin{aligned} n_{ik}/n_0 = & -e\varphi_k/T + I_p(s) \exp(-s) (e\varphi_k/T) \times \\ & \times [(\omega + \omega^*)/k_z v_{Ti}] Y [(\omega - p\omega_{Hi})/k_z v_{Ti}]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Используя условие квазинейтральности, получим дисперсионное соотношение в окончательном виде для $T_e = T_i$:

$$\begin{aligned} [(\omega + \omega^*)/k_z v_{Ti}] Y [(\omega - n\omega_{Hi})/k_z v_{Ti}] \exp(-s) I_n(s) + \\ + [(\omega - \omega^*)/k_z v_{Te}] Y (\omega/k_z v_{Te}) = 2, \end{aligned} \quad (2.111)$$

где $I_n(s)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Если бы нас интересовали значения $k\rho_e \geq 1$, то второе слагаемое в левой части уравнения следовало бы умножить на $\exp(-k^2 \rho_e^2) I_0(k^2 \rho_e^2)$. В том случае, когда $k_z v_{Te} \ll |\omega - n\omega_{Hi}|$, дисперсионное соотношение (2.111) упрощается, если $n\omega_{Hi} \ll k_z v_{Te}$:

$$\begin{aligned} [(\omega + \omega^*)/(\omega - n\omega_{Hi})] \exp(-s) I_n(s) - \\ - [(\omega - \omega^*)/k_z v_{Te}] i \sqrt{\pi} = 2. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Необходимо рассматривать значения $s \gg n$, так как тогда

$\exp(-s) I_n(s) \approx 1/\sqrt{2\pi s} \ll 1$. В этом предельном случае, отбрасывая малые мнимые члены в дисперсионном соотношении, можно получить значение собственной частоты ω , близкое к $n\omega_{Hi}$:

$$\omega = \frac{n\omega_{Hi} + \omega^*/2 \sqrt{2\pi} k\rho_i}{1 - 1/2 \sqrt{2\pi} k\rho_i} \approx n\omega_{Hi}, \quad (2.113)$$

так как $n\omega_{Hi} \sim \omega^*$, а $k\rho_i \gg 1$. Чтобы определить инкремент, подставим в первый член левой части уравнения (2.112) при $s \gg n$ величину $\omega = n\omega_{Hi} + \delta$, а в малый мнимый член $\omega = n\omega_{Hi}$. Тогда для добавки к частоте δ получится уравнение первого порядка, а мнимая часть δ , определяющая инкремент, будет описываться соотношением

$$\gamma = \text{Im } \delta = i (1/4k\rho_i) (\omega^{*2} - n^2 \omega_{Hi}^2) / k_z v_{Te}. \quad (2.114)$$

Условие возбуждения циклотронных колебаний имеет обычный для дрейфовых колебаний вид $\omega < \omega^*$ или в данном случае $n^2 \omega_{Hi}^2 < |\omega^{*2}|$. Отсюда следует, что дрейфово-циклотронные колебания, имеющие малые длины волн, неустойчивы, если характерная длина неоднородности достаточно мала: $k^2 \rho_i^2 > na$.

В работах [74, 75] также показано, что циклотронные колебания могут возбуждаться и при чисто поперечном распространении. Чтобы получить дисперсионное соотношение в этом случае, разложим второе слагаемое в левой части уравнения (2.111) по $k_z v_{Te} / \omega$. Тогда для больших s дисперсионное соотношение примет вид

$$[(\omega + \omega^*) / (\omega - n\omega_{Hi})] / \sqrt{2\pi} k\rho_i + (\omega - \omega^*) / \omega = 2. \quad (2.115)$$

Видно, что в данном случае нет пересечения ветвей $\omega = -\omega^*$ и $\omega = n\omega_{Hi}$, поэтому неустойчивость, казалось бы, отсутствует. Однако если принять во внимание возможную неквазинейтральность колебаний, а также поперечную инерцию электронов, то правая часть уравнения (2.115) изменится. Проще всего дисперсионное соотношение в этом случае получить, вычислив n_{ek}/n_0 в гидродинамическом приближении. Меняя в формуле (2.24) знак заряда на противоположный, можно записать

$$n_{ek}/n_0 = (\omega^*/\omega) e\varphi/T + k_{\perp}^2 \rho_i^2 e\varphi/T \quad (2.116)$$

вместо формулы (2.88). Дисперсионное соотношение, которое следует из уравнения Пуассона, формулы (2.116) и выражения для n_{ik}/n_0 , при этом принимает вид

$$\begin{aligned} (1 / \sqrt{2\pi} k\rho_i) (\omega + \omega^*) / (\omega - n\omega_{Hi}) - \omega^*/\omega = \\ = 1 + k_{\perp}^2 (\rho_e^2 + r_{De}^2). \end{aligned} \quad (2.117 a)$$

Будем искать решения этого уравнения в виде $\omega = n\omega_{Hi} + \delta$. Тогда для δ получим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} k \rho_i} \frac{n \omega_{Hi} + \omega^* + \delta}{\delta} - \frac{\omega^*}{n \omega_{Hi}} + \frac{\omega^* \delta}{n^2 \omega_{Hi}^3} = 1 + k^2 (\rho_e^2 + r_{De}^2). \quad (2.1176)$$

Таким образом,

$$\delta^2 = (n^2 \omega_{Hi}^2 / \sqrt{2\pi} k \rho_i) (1 + n \omega_{Hi} / \omega^*)$$

при выполнении условия

$$\omega^* = -n \omega_{Hi} \left[1 + k^2 (\rho_e^2 + r_{De}^2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi} k \rho_i} \right].$$

Последнее условие следует рассматривать как уравнение для волновых чисел k_y неустойчивых колебаний (т. е. колебаний, для которых $\delta^2 < 0$). Критерий неустойчивости можно переписать в виде

$$\rho_i/a \geq 2n (m/M + v_A^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.118)$$

или (при $\omega_{He} > \omega_{pe}$)

$$\rho_i/a \geq 2n v_A/c. \quad (2.119)$$

Инкремент всякой циклотронной неустойчивости должен быть меньше ω_{Hi} . В противоположном случае нельзя выбирать только один член из ряда по циклотронным гармоникам и необходимо суммировать весь ряд. К такому же эффекту приводит увеличение k_z у волн, а именно: при $k_z v_{Ti} \geq \omega_{Hi}$ исчезает влияние магнитного поля на движение ионов, и они ведут себя так же, как и при ионно-звуковых колебаниях (см. начало параграфа). Чтобы уточнить критерий замагниченности ионов в колебаниях, рассмотрим выражение (2.83) и пренебрежем для простоты неоднородностью плазмы. Тогда поправку для функции распределения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f_k &= -\frac{e}{T} \varphi_k f_0 + \frac{e}{T} \varphi_k \sum_{m, n} \frac{\omega f_0}{\omega - k_z v_z^0 - m \omega_{Hi}} J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) \times \\ &\quad \times J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \right) \exp \{ i (m - n) \omega_{Hi} t + i (\alpha + \beta) (m - n) \} = \\ &= -\frac{e}{T} \varphi_k f_0 + \frac{e}{T} \varphi_k \omega f_0 \int_{-\infty}^t \exp \left\{ i \frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \sin (\omega_{Hi} t' + \alpha + \beta) - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \sin (\omega_{Hi} t + \alpha + \beta) + i (t' - t) (k_z v_z - \omega) \right\} dt'. \end{aligned}$$

Наибольший интерес для нас представляет второе слагаемое в формуле для поправки к функции распределения f_k . Преобразуем его, заменив разность синусов в показателе экспоненты их произведе-

нием, и введем новую переменную $t' - t = \tau$. Обозначим для простоты второе слагаемое в формуле для f_k буквой I . Тогда

$$I = \omega f_0 \int_0^{\infty} \exp \{i (k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) 2 \sin (\alpha + \beta + \omega_{Hi} t - \pi/2 - \omega_{Hi} \tau/2) \sin (\omega_{Hi} \tau/2) + i (\omega - k_z v_z) \tau\} d\tau.$$

Чтобы найти возмущение концентрации, необходимо проинтегрировать f_k по v_{\perp}^0 и v_z^0 и углу в пространстве скоростей α . Начнем с интегрирования по углу. Тогда

$$\int_0^{2\pi} I d\alpha = \omega f_0 2\pi \int_0^{\infty} J_0 \left(2 \frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \sin \frac{\omega_{Hi} \tau}{2} \right) \times \times \exp [i (\omega - k_z v_z^0) \tau] d\tau, \quad (2.120)$$

так как

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp (i x \sin \xi - i n \xi) d\xi. \quad (2.121)$$

Проинтегрируем теперь, считая функцию f_0 максвелловской, выражение (2.120) по v_z :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{2\pi} I d\alpha = \omega (M/T) n_0 \exp (-Mv_{\perp}^{02} / 2T) \times \times \int_0^{\infty} J_0 [2 (k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{Hi}) \sin (\omega_{Hi} \tau/2)] \times \times \exp [i\omega\tau - k_z^2 (T/M) \tau^2] d\tau. \quad (2.122)$$

Рассмотрим сначала случай $k_z = 0$. Тогда с учетом того, что при неустойчивости частота ω имеет положительную мнимую добавку, перепишем соотношение (2.122) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{2\pi} I d\alpha = \omega (M/T) n_0 \exp (-Mv_{\perp}^{02} / 2T) \times \times \int_0^{\infty} J_0 [(2k_{\perp} v_{\perp}^{02} / \omega_{Hi}) \sin (\omega_{Hi} \tau/2)] \exp (i \operatorname{Re} \omega \tau - \gamma \tau) d\tau. \quad (2.123)$$

Если $\gamma > \omega_{Hi}$, то можно считать, что основной вклад в интеграл дает область $0 \leq \tau < \omega_{Hi}^{-1}$. Величину $\sin (\omega_{Hi} \tau/2)$ можно заменить на $\omega_{Hi} \tau/2$, а интеграл по τ является в этом случае хорошо известным интегралом Фурье — Бесселя [74]. В результате имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{2\pi} I d\alpha = \omega \frac{M}{T} n_0 \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{M v_{\perp}^2}{2T}\right) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}}, & \omega > k_{\perp} v_{\perp}^0; \\ \frac{1}{\sqrt{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - \omega^2}}, & \omega < k_{\perp} v_{\perp}^0. \end{cases} \quad (2.124)$$

Видно, что зависимость от магнитного поля исчезла и заряженные частицы в колебаниях ведут себя так, как будто магнитного поля нет.

Рассмотрим случай, когда $\gamma < \omega_{Hi}$, но $k_z \neq 0$. Обратимся к формуле (2.122). Для исчезновения зависимости от магнитного поля необходимо, чтобы основной вклад в интеграл давала область $0 < \tau < \omega_{Hi}^{-1}$. Это означает, что $k_z^2 T / M \omega_{Hi}^2$ должно быть больше или порядка единицы. Таким образом, ионы в колебаниях могут считаться незамагниченными при выполнении хотя бы одного из условий

$$\gamma > \omega_{Hi}; \quad k_z v_{Ti} > \omega_{Hi}. \quad (2.125)$$

§ 2.7. Вывод системы квазилинейных уравнений для неоднородной плазмы

Известно, что учет нелинейных эффектов в низшем приближении часто приводит к установлению стационарного состояния. Поэтому интересно исследовать возможность установления такого состояния в случае какой-либо характерной дрейфовой неустойчивости.

Проблема изучения квазилинейной стадии для дрейфовых волн рассматривалась в работах [75, 76]. Следуя этим работам, будем рассматривать слабонеоднородную плазму. Предположим для простоты, что $T_i \ll T_e = T = \text{const}$. Магнитное поле, как это показано в § 2.2, практически не зависит от x . В том случае, если T_e не зависит от x , а T_i мала, как показано в § 2.5, неустойчивость получаем при учете инерции ионов. При исследовании дрейфовой неустойчивости до сих пор использовалось приближение геометрической оптики (мы полагали, что k_x не зависит от x , и считали, что $k_x \ll k_y$). В этом параграфе исследуем более общий случай и получим квазилинейные уравнения именно для такого случая дрейфовой неустойчивости. Чтобы не заниматься исследованиями, связанными с одномерными ионно-звуковыми колебаниями (см. гл. 1), будем считать, что фазовая скорость рассматриваемых волн вдоль магнитного поля много больше скорости ионно-звуковых колебаний $c_s = \sqrt{T/M}$, но много меньше v_A , т. е. $c_s \ll \omega/k_z < v_A$. Правое неравенство представляет собой условие потенциальности колебаний, в то время как при выполнении левого неравенства мож-

но пренебречь смещением ионов в колебаниях вдоль магнитного поля. Будем также считать, что $v_A < v_{Te} = \sqrt{2T/m}$, т. е. давление плазмы не слишком мало: $m/M < \beta \ll 1$.

Дисперсионное соотношение для дрейфовых волн проще всего получить из совместного решения следующих уравнений: уравнений движения и непрерывности для ионной компоненты (ионы, согласно предположению, не имеют компоненты скорости вдоль магнитного поля):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i &= -\frac{e}{M} \nabla \varphi + \frac{e}{Mc} [\mathbf{v}_i, \mathbf{H}_0]; \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{v}_i) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

дрейфового кинетического уравнения для электронов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \left\{ v_z \mathbf{e}_z + \frac{c}{H} [\mathbf{E} \mathbf{e}_z] \right\} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial F}{\partial v_z} &= 0; \\ F(v_z, \mathbf{x}) &= \int F(\mu, v_z, \mathbf{x}) H d\mu \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

и условия квазинейтральности

$$n_i = \int F(v_z, \mathbf{x}) dv_z. \quad (2.128)$$

Здесь $\mu = v_{\perp}^2 / 2H$ — адиабатический инвариант. Исключим из линеаризованного уравнения (2.126) \mathbf{v}_i , воспользовавшись тем, что $\omega \ll \omega_{Hi} = eH/cM$. Так как $\partial \mathbf{v}_i / \partial t \sim \omega \mathbf{v}_i$, в нулевом приближении по ω / ω_{Hi} имеем $\mathbf{v}_i = (c/H) [\mathbf{e}_z \nabla \varphi]$ и в следующем приближении, как обычно,

$$\mathbf{v}_i = (c/H) [\mathbf{e}_z \nabla \varphi] + (1/\omega_{Hi}) (c/H) [\mathbf{e}_z [e_z \partial \nabla \varphi / \partial t]]. \quad (2.129)$$

Выражая с помощью полученного соотношения и уравнения непрерывности возмущение плотности ионов через потенциал φ , получаем

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} \left(n_0 \left\{ \frac{c}{H_0} [\mathbf{e}_z \nabla \varphi] + \frac{Mc^2}{eH_0^2} \left[\mathbf{e}_z \left[\mathbf{e}_z \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} \right] \right] \right\} \right) = 0. \quad (2.130)$$

Рассмотрим поведение во времени возмущений стационарного состояния вида $A_x(\mathbf{x}) \exp(ik_z z + ik_y y - i\omega_k t)$. Тогда из уравнений (2.127) и (2.130) найдем

$$F_k = \frac{k_x (e/m) \partial F / \partial v_z - (c/H_0) k_y \partial F / \partial x}{\omega_k - k_x v_z} \varphi_k; \quad (2.131)$$

$$n_{ik} = -\frac{k_y}{\omega_k} \varphi_k \frac{c}{H} \frac{dn_0}{dx} + \frac{Mc^2}{eH_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(n_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) - k_y^2 \frac{Mc^2}{eH_0^2} n_0 \varphi_k. \quad (2.132)$$

Пользуясь условием квазинейтральности (2.128), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(n_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) - n_0 k_y^2 \rho^2 \varphi_k - \frac{dn_0}{dx} \frac{k_y}{\omega_k} \frac{cT}{eH} \varphi_k -$$

$$- \frac{T}{e} \varphi_k \int \frac{k_z (e/m) \partial F / \partial v_z - (c/H) k_y \partial F / \partial x}{\omega_k - k_z v_z} dv_z = 0;$$

$$\rho = c_s / \omega_{Hi}. \quad (2.133)$$

При вычислении интеграла, входящего в дисперсионное соотношение, воспользуемся правилом Ландау и будем считать, что функция распределения является максвелловской в каждой точке x : $F = n_0(x) \sqrt{m/2\pi T} \exp(-mv_z^2/2T)$. Тогда уравнение (2.133) упрощается и принимает вид

$$\rho^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(n_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) - n_0 (1 + k_y^2 \rho^2) \varphi_k - n_0 \frac{k_y}{\omega_k} \frac{cT}{eH_0} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} -$$

$$- i\pi \frac{T}{m} k_z \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He} k_z} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta(\omega_k - k_z v_z) dv_z = 0. \quad (2.134)$$

В приближении геометрической оптики $\varphi_k(x) = \varphi_k \exp(i \int k_x dx)$ $[(1/k_x) dk_x/dx \ll (1/n_0) dn_0/dx; k_x \gg (1/n_0) dn_0/dx]$ можно определить частоту и локальный инкремент γ_k из уравнения (2.134) так, как это делали для дрейфовых волн в предыдущих параграфах:

$$\omega_k = -k_y \frac{cT}{eH_0} \frac{(1/n_0) dn_0/dx}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2}; \quad (2.135)$$

$$\gamma_k = -\pi \frac{\omega_k^2}{k_y (cT/eH_0) (1/n_0) dn_0/dx} \frac{T}{mn_0} k_z \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He} k_z} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta(\omega_k - k_z v_z) dv_z, \quad (2.136)$$

где $k_{\perp}^2 = k_y^2 + k_x^2$.

Поясним смысл понятия *локальный инкремент* несколько подробнее. Для этого введем «число волн» в состоянии с данным

волновым вектором \mathbf{k} : $N_k = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega_k} k_i k_j \frac{|\varphi_k|^2}{8\pi}$. Здесь ε_{ij} — тензор

диэлектрической проницаемости, который в нашем случае имеет вид [77]

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + k_D^2 \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + k_D^2 \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{k_D^2}{k_z^2} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega} \right) \end{pmatrix},$$

т. е. $N_k = [k_D^2 (1 + k_\perp^2 \rho^2) / \omega_k] \varphi_k^2 / 8\pi$; $k_D^2 = 4\pi n_0 e^2 / T$. Тогда для числа волн можно записать уравнение [69]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_k(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega_k}{\partial k_x} N_k(x, t) \right] &= 2\gamma_k(x) N_k(x, t); \\ \frac{dk_x}{dt} &= - \frac{\partial \omega_k}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (2.137)$$

Первое уравнение (2.137) упрощается в двух предельных случаях. Если $\gamma_k N_k \gg \partial/\partial x [(\partial \omega_k / \partial k_x) N_k]$, то справедливо так называемое локальное приближение, когда амплитуды волн, составляющих пакет, успевают нарасти раньше, чем пакет существенно сместится по x . Тогда скорость нарастания амплитуд волн в окрестности каждой точки x определяется локальным инкрементом $\gamma_k(x)$. В этом случае, когда слагаемое $\partial/\partial x [(\partial \omega_k / \partial k_x) N_k]$ значительно больше остальных, γ_k можно найти методом последовательных приближений. В нулевом приближении

$$\partial/\partial x [(\partial \omega / \partial k_x) N_k] = 0, \quad \text{т. е.} \quad N_k(x, t) = \text{const}(t) / (\partial \omega_k / \partial k_x). \quad (2.138)$$

Далее проинтегрируем первое уравнение (2.137) по области, где $N_k(x, t)$ отлично от нуля (в конкретном случае рассматриваемых дрейфовых волн область интегрирования ограничивается точками поворота $k_x = 0$, где $k_x = (1/\rho) \sqrt{1 + k_y^2 \rho^2 - \omega^* / \omega}$). Пользуясь формулой (2.138), получаем в результате интегрирования

$$\gamma_k = \frac{1}{2N_k(t)} \frac{\partial N_k(t)}{\partial t} = \frac{\int [\gamma_k / (\partial \omega_k / \partial k_x)] dx}{\int dx / (\partial \omega_k / \partial k_x)}, \quad (2.139)$$

где $N_k(t) \sim \text{const}(t)$. Этот результат можно получить также с помощью метода ВКБ, решая уравнение (2.134) [78].

Уравнение (2.127) с учетом нелинейных членов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{c}{H_0} E_y \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{c}{H} E_x \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{c}{H} E_y \frac{\partial F_1}{\partial x} + \\ + v_z \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial F_1}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Усредняя полученное уравнение по фазам колебаний и выражая F_k через φ_k , получаем окончательно [75, 76]

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{(2\pi)^3}{G} \int dk \left(\frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He} k_z} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{k_z^2 e^2}{m^2} \pi \times \\ \times \delta(\omega_k - k_z v_z) |\varphi_k|^2 \left(\frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He} k_z} \right) F, \end{aligned} \quad (2.141)$$

где G — нормировочный объем.

§ 2.8. Начальная стадия квазилинейной релаксации

Таким образом, квазилинейные уравнения для интересующего нас случая имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int dk_x dk_y \hat{L}_k \left(\pi \frac{v_{Te}^2}{mn_0} \frac{\omega_k^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2} \frac{\varepsilon_k}{|v_z|^3} \hat{L}_k F \right); \quad (2.142)$$

$$\frac{1}{W_k} \frac{\partial W_k}{\partial t} = \pi \frac{|\omega_k|}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2} \frac{|v_z|}{v_z} \frac{v_{Te}^2}{n_0} \hat{L}_k F; \quad (2.143)$$

$$\hat{L}_k = \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y v_z}{\omega_{He} \omega_k} \frac{\partial}{\partial x};$$

$$W_k = \omega_k N_k \frac{(2\pi)^3}{G} = k_{De}^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho^2) \frac{|\varphi_k|^2}{8\pi} \frac{(2\pi)^3}{G}.$$

В этой записи исключено k_z с помощью соотношения $\omega_k = k_z v_z$. При исследовании квазилинейных уравнений в работе [75] считали, что в результате нарастания энергии шумов по линейной теории к моменту начала квазилинейной релаксации W_k станет функцией с резко выраженным максимумом в точке $k_{\perp} = \bar{k}_{\perp}$, соответствующей максимуму инкремента γ_k , который определен по начальной функции распределения. Тогда уравнение (2.142) упрощалось:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L_k \left(\pi \frac{v_{Te}^2}{mn_0} \frac{\omega_{\bar{k}}}{1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2} \frac{W_k}{|v_z|^2} \Delta_{\bar{k}_x} \Delta_{\bar{k}_y} \hat{L}_{\bar{k}} F \right), \quad (2.144)$$

где $\Delta_{\bar{k}_x}$ и $\Delta_{\bar{k}_y}$ определяют ширину пакета волн по k_x и k_y . Если ввести характеристики оператора \hat{L}_k , сделав замену $\zeta = v_z$; $\xi = v_z^2/2 + (\omega_{He} \omega_{\bar{k}} / \bar{k}_y) x$, то система квазилинейных уравнений станет еще проще:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\pi \frac{v_{Te}^2}{mn_0} \frac{\omega_{\bar{k}}^2}{1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2} \frac{W_k}{|\zeta|^3} \Delta_{\bar{k}_x} \Delta_{\bar{k}_y} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right); \quad (2.145)$$

$$\frac{1}{W_k} \frac{\partial W_k}{\partial t} = \pi \frac{v_{Te}^2}{mn_0} \frac{|\omega_k|}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2} \frac{|\zeta|}{\zeta} \frac{\partial F}{\partial \zeta}. \quad (2.146)$$

Отсюда следует, что, во-первых, стационарным является состояние с $\partial F / \partial \zeta = 0$ и, во-вторых, в течение процесса квазилинейной релаксации движение частиц описывается уравнением $\xi = \text{const}$. А так как максимальное расстояние, пройденное частицей в пространстве скоростей, $\Delta v_z \ll v_A$, то смещение частицы по x можно оценить следующим образом:

$$\Delta x | (1/n_0) (\partial n_0 / \partial x) | \ll (v_A^2 / v_{Te}^2) (1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2).$$

Поэтому смещение частиц пренебрежимо мало по сравнению с характерной длиной неоднородности. Именно эта стадия процесса рассмотрена в работе [75]. В работе [76] сделана попытка точно решить систему исходных уравнений (2.142), (2.143). Сделанное автором приближение $\bar{k}_\perp^2 \rho^2 \ll 1$ позволило вынести в уравнении (2.142) оператор из-под знака интеграла, так как при этом \hat{L}_k уже не зависит от k . Далее, вводя те же переменные ζ и ξ , можно найти, что стационарным является состояние с $\partial F / \partial \zeta = 0$ и что частицы по x практически не смещаются. Предположение, что спектральная плотность шумов W_k велика в области $k_\perp^2 \rho^2 \ll 1$, кажется довольно искусственным, так как максимум начального инкремента приходится на область $k_\perp \rho \geq 1$. Но если даже предположить, что вначале шумы сосредоточены в области $k_\perp^2 \rho^2 \ll 1$, то найденное в работе [76] состояние все равно не будет стационарным, так как дрейфовые волны с $k_\perp > \bar{k}_\perp$ неустойчивы.

§ 2.9. Смещение пакета волн в область $k_\perp^2 \rho^2 > 1$

Пусть для $k_y = \bar{k}_y$ и $k_x = \bar{k}_x$ установилось стационарное состояние. При этом

$$\partial F / \partial v_z = (k_y v_z / \omega_{He} \omega_{\bar{k}}) \partial F / \partial x. \quad (2.147)$$

Так как смещение частиц по x при этом пренебрежимо мало, в формуле (2.147) можно заменить $\partial F / \partial x$ на $\partial F_0 / \partial x$. Подставляя теперь $\partial F / \partial v_z$ в уравнение (2.143), определяющее инкремент в общем случае, получаем [79]

$$\frac{1}{W_k} \frac{\partial W_k}{\partial t} = 2\pi |\omega_k| |v_z| \frac{k_\perp^2 - \bar{k}_\perp^2}{1 + k_\perp^2 \rho^2} \frac{1}{n_0} \frac{\partial F_0}{\partial x} \frac{1}{d(\ln n_0)/dx}. \quad (2.148)$$

Как для начальной функции распределения, так и для функции,

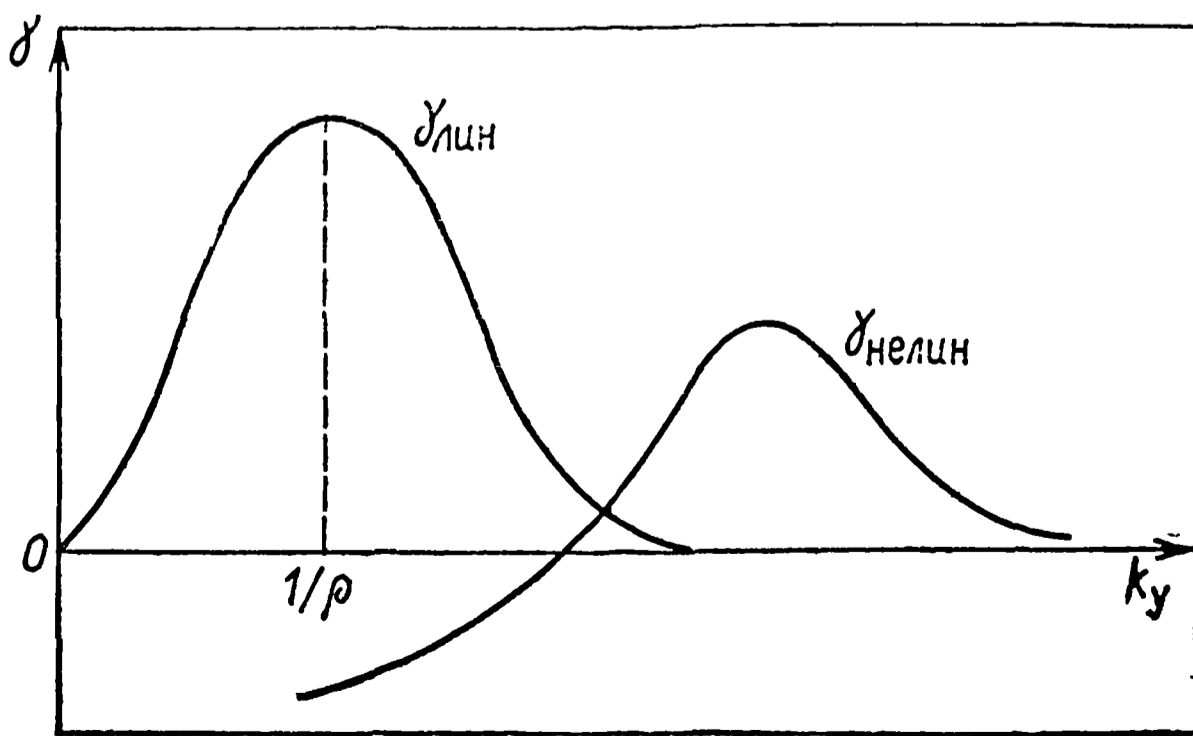


Рис. 40

удовлетворяющей условию (2.147), инкремент максимален при $k_x \ll k_y$, т. е. можно формально положить $k_x = 0$. Разумеется, при «локальном» методе рассмотрения k_x не может равняться нулю, и формально полученный результат следует понимать в том смысле, что $d(\ln n_0)/dx \ll k_x \ll k_y$. Из формулы (2.148) следует, что колебания с $k_y^2 > \bar{k}_y^2$ нарастают, в то время как колебания с $k_y^2 < \bar{k}_y^2$ затухают во времени (рис. 40).

Поэтому решение должно описывать пакет волн, распространяющийся вдоль k_y , причем центр пакета $k_m(v_z, t)$ смещается в сторону больших k_y . Предположим, что пакет узкий, т. е. $\Delta k_y/k_m \ll 1$. Будем рассматривать значения k_y , удовлетворяющие неравенству $\bar{k}_y^2 \rho^2 \leq v_{Te}^2/v_A^2$. Тогда во все моменты $\partial F/\partial x = \partial F_0/\partial x$, а пакет волн в окрестности некоторой точки v_z имеет вид

$$\left. \begin{aligned} W_k &= W_k(t_0) \exp \left\{ 2\gamma_0(v_z) \int_{t_0}^t \frac{k_y \rho (k_y^2 - \bar{k}_y^2) \rho^2}{(1 + k_y^2 \rho^2)^2} dt' \right\}; \\ \gamma_0(v_z) &= \frac{v_z}{\rho} \frac{cT}{eH_0} \left| \frac{1}{n_0} \frac{\partial F_0}{\partial x} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (2.149)$$

Здесь $F_0(v_z, x)$ — начальная функция распределения резонансных электронов; $t_0(v_z)$ — момент, к которому произошла квазилинейная релаксация колебаний с $k_y = k_0$ в окрестности точки v_z . Таким образом, k_0 есть начальное значение \bar{k}_y . При $t = t_0$ по предположению волновой пакет узкий. Это означает, что функция $W_k(t_0)$ при $k_y = k_0$ имеет резкий максимум с некоторой шириной Δ_{k_0} , а при значениях k_y , удовлетворяющих условию $|k_y - k_0| > \Delta_{k_0}$, $W_{k_0} = W_0$ (W_0 — спектральная плотность шумов в начальном состоянии). Самой постановкой задачи о квазилинейной релаксации W_0 считается заданной; она должна быть больше W_k для тепловых шумов. Однако при этом $\ln[W_{k_0}(t)/W_0]$ может быть много больше единицы, как неоднократно отмечалось в гл. 1. Действительно, в уравнения (2.142) и (2.143) входит интеграл, который легко получить, если подставить $W_k \hat{L}_k F$ из уравнения (2.143) в уравнение (2.142) и проинтегрировать результат по времени. Тогда получим, что

$$F - F_0 = \int dk_x dk_y \hat{L}_k [\omega_k (W_k - W_0)/m |v_z|^3]. \quad (2.150)$$

Найдем энергию шумов в состоянии, когда функция распределения $F = F_f$ удовлетворяет соотношению (2.147) с $\bar{k}_y = k_0$. Тогда из уравнения (2.150) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\zeta (F_f - F_0) d\zeta' &= [(W_{k_0} - W_0) / |\zeta|^3 m] \Delta_{k_0} \Delta_{k_x} \omega_{k_0}; \\ \partial F/\partial \zeta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$

где Δ_{k_0} — ширина пакета по k_y ; Δ_{k_x} — ширина пакета по k_x . При помощи закона сохранения числа частиц $\int F_f d\zeta' = \int F_0 d\zeta'$ можно найти, что $F_f - F_0 \sim (v_z/v_{Te})^2 n_0 / \sqrt{\pi} v_{Te}$. Поэтому

$$W_{k_0}(t_0) \approx \left(\frac{v_z}{v_{Te}} \right)^3 \frac{mn_0 |v_z|^3}{\Delta_{k_0} \Delta_{k_x} \omega_{k_0}} \approx \left(\frac{v_z}{v_{Te}} \right)^5 \frac{2n_0 T}{\Delta_{k_0} \Delta_{k_x} \Delta_{k_z}};$$

$$\Delta_{k_z} \approx \frac{\omega_{k_0}}{|v_z|}.$$

Здесь $\Delta\zeta \approx \Delta v_z \approx v_z$; $k_0 \rho \approx 1$. Если считать, что W_0 в α раз больше W_k для тепловых шумов, то $W_0 = \frac{n_0 T}{N_D} \alpha \frac{1}{k_D^3 4\pi/3}$. Поэтому

$$\frac{W_{k_0}(t_0)}{W_0} \approx \frac{1}{\alpha} \left(\frac{v_z}{v_{Te}} \right)^5 N_D \frac{8\pi k_D^3}{3\Delta_{k_0} \Delta_{k_x} \Delta_{k_z}}; \quad \alpha \approx 10, \quad \text{а} \quad \ln\left(\frac{W_{k_0}(t_0)}{W_0}\right) =$$

$= A$ порядка кулоновского логарифма.

С точностью до членов $\Delta_{k_y}(t)/k_m(t)$ величина $k_m(t)$ равна $\bar{k}_y(t)$.

Найдем закон изменения $k_m(t)$ и $\Delta_{k_y}(t)/k_m(t)$. Чтобы не задавать конкретного вида $W_k(t_0)$ в области $|k_y - k_0| > \Delta_{k_0}$, рассмотрим процесс начиная с того момента, когда центр пакета сдвинулся на расстояние, большее Δ_k , и находится в области $k_m^2 \rho^2 \gg 1$. Дифференцируя показатель экспоненты в формуле (2.149) по k_y , приравнявая результат к нулю и полагая k_y равным $k_m(t)$, получаем уравнение для определения положения центра пакета $k_m(t)$ в k -пространстве:

$$k_m^2(t - t_0) = 3 \int_{t_0}^t k_m^2 dt'. \quad (2.152)$$

Решение этого уравнения имеет вид $k_m \rho = c(t - t_0)$, где $c = \text{const}$.

Определим c и закон изменения $\Delta_{k_y}(t)/k_m(t)$. Для этого разложим W_k вблизи точки $k_y = k_m(t)$ с учетом соотношения (2.152):

$$W_k = W_0 \exp \left\{ 2\gamma_0(v_z) \left[\frac{2}{3} \frac{t - t_0}{k_m \rho} - \frac{t - t_0}{k_m \rho} \frac{(k_y - k_m)^2}{k_m^2} \right] \right\}. \quad (2.153)$$

Для определения c положим в формуле (2.153) $k_y = k_m = c(t - t_0)$. В результате получим $c = (4/3) \gamma_0(v_z) / \ln(W_{k_m}/W_0)$. Теперь можно определить ширину пакета $\Delta_{k_y}(t)$:

$$\frac{\Delta_{k_y}^2(t)}{k_m^2(t)} = \frac{k_m \rho}{2\gamma_0(t - t_0)} = \frac{c}{2\gamma_0(v_z)} = \frac{2/3}{\ln(W_{k_m}/W_0)}.$$

Таким образом, пакет, оставаясь узким, смещается в сторону больших k_y по закону

$$k_m(t) \rho = \frac{2/3}{\ln(W_{k_m}/W_0)} (t - t_0). \quad (2.154)$$

С большой точностью в формуле (2.154) можно заменить $\ln(W_{k_m}/W_0)$ на Λ .

Чтобы найти закон движения центра пакета $k_m(t)$ в области $k_m^2 \rho^2 \geq 1$, необходимо задать вид функции $W_k(t_0)$. Вообще говоря,

$$W_k(t_0) = W_0 \exp \left\{ 2\gamma_0(v_z) \frac{k_y^3 \rho^3}{(1 + k_y^2 \rho^2)^2} \tau \right\}.$$

Тогда вместо уравнения (2.152) получим следующее соотношение для определения $k_m(t)$:

$$(t - t_0 + \tau) \frac{(k_m \rho)^4 - 3(k_m \rho)^2}{3(k_m \rho)^2 - 1} = \int_{t_0}^t k_m^2 \rho^2 dt'. \quad (2.155)$$

Продифференцируем полученное уравнение по t :

$$(t - t_0 + \tau) \frac{dx}{dt} = \frac{2(x+1)(3x-1)}{3x^2 - 2x + 3}; \quad x = k_m^2 \rho^2.$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$(x+1)(3x-1)/x^{3/2} = c(t - t_0 + \tau), \quad (2.156)$$

где $c = \text{const}$. При $t = t_0$ $x = x_0$, где x_0 определяется из уравнения $\partial \varepsilon_k(t_0)/\partial k_y = 0$ (в нашем случае $x_0 = 3$). Итак, окончательно

$$(x+1)(3x-1)/x^{3/2} = [(x_0+1)(3x_0-1)/x_0^{3/2}] (t - t_0 + \tau). \quad (2.157)$$

Можно утверждать, что длительность квазилинейной релаксации, приводящей к установлению соотношения (2.147) в окрестности точки $v_z = \omega/k_z$, порядка $1/\gamma_0(v_z)$, если энергия шумов по порядку величины равна конечной. Поэтому t_0 с точностью до величины порядка $1/A$ можно приравнять τ . Следовательно, формула (2.157) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} (x+1)(3x-1)/x^{3/2} &= [(x_0+1)(3x_0-1)/x_0^{3/2}] t/t_0; \\ t_0 &= [1/\gamma_0(v_z)] \ln(W_{k_m}/W_0) \approx \tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

Проведя аналогичные выкладки для начальной функции распределения резонансных частиц, у которой $\partial F/\partial v_z = 0$, получим, что

$$W_k(t_0) = W_0 \exp \left\{ 2\gamma_0(v_z) \frac{\tau k_y \rho}{1 + k_y^2 \rho^2} \right\}; \quad t_0 \approx \tau,$$

а уравнение для определения зависимости $k_m(t)$ имеет вид равенства (2.155), в котором $\tau = t_0$. Окончательный результат совпадает с формулой (2.158). Различие состоит лишь в том, что теперь $\kappa_0 = 1$. Из формулы (2.158) следует, что уже при $\kappa = 3$, $\tau = t_0$ с хорошей точностью $k_m \rho \sim t$. Разлагая спектральную плотность энергии шумов

$$W_k = W_0 \exp \left\{ 2\gamma_0(v_z) \left[\frac{k_y^3 \rho^3}{(1+k_y^2 \rho^2)^2} \tau + \int_{t_0}^t \frac{k_y \rho (k_y^2 - \bar{k}_y^2) \rho^2}{(1+k_y^2 \rho^2)^2} dt' \right] \right\}$$

вблизи точки $k_y = k_m(t) = \bar{k}_y(t)$ с учетом закона движения (2.155), можно показать, что в любой момент относительная ширина пакета мала, т. е. $\Delta_{ky}^2 / k_m(t) \ll 1$.

§ 2.10. Распространение шумов в пространстве волновых чисел

Рассмотрим теперь начальную стадию квазилинейного процесса, приводящую к возникновению шумов во всем интервале значений фазовых скоростей ω/k_z . Пусть в момент $t = 0$ начальная энергия шумов W_0 мала и плавно распределена по всем k , а начальная функция распределения резонансных электронов имеет вид $F_0 = n_0(x) / \sqrt{\pi v_{Te}}$.

Результат, который будет получен ниже, можно без принципиальных осложнений обобщить на случай любой начальной функции. Будем по-прежнему считать, что нерезонансные электроны имеют распределение Максвелла с температурой T (рис. 41).

В этом случае можно считать, что функция распределения в области $v_{z1} \leq v_z \leq v_{z2}$ неустойчива относительно возбуждения потенциальных дрейфовых волн, частота и волновой вектор которых

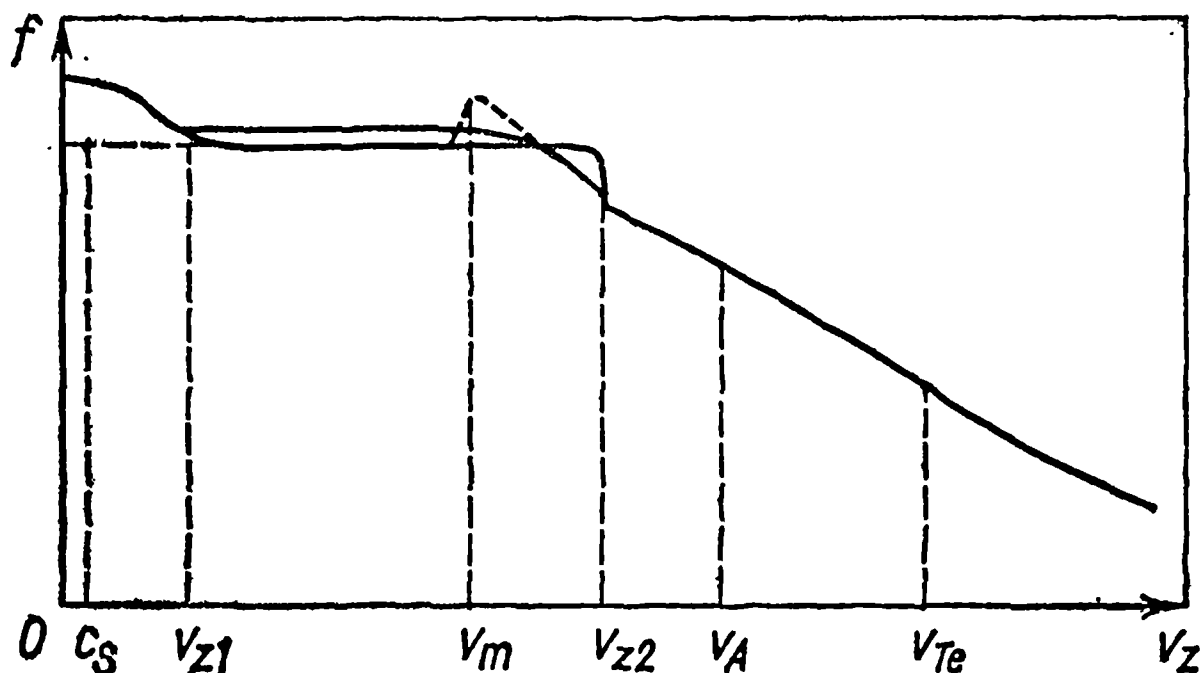


Рис. 41

удовлетворяют соотношению (2.134), а инкремент определяется по формуле (2.135), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\gamma_{0k} = \gamma_0(v_{z2}) \frac{v_z}{v_{z2}} \frac{k_y \rho}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2}; \quad \gamma_0 = \frac{\pi |v_z|}{\rho} \frac{cT}{eH} \left| \frac{1}{n_0} \frac{\partial F_0}{\partial x} \right|. \quad (2.159)$$

Отсюда следует, что инкремент максимален при $k_y \rho = 1$, $k_x \ll k_y$, $v_z = v_{z2}$. Следовательно, быстрее всего нарастают шумы с $k_y = 1/\rho$, $k_x = 0$, $v_z = v_{z2}$. По истечении линейной фазы неустойчивости, которая длится примерно $(1/\gamma_{\text{макс}})\Lambda$, в окрестности точки $v_z = v_{z2}$ произойдет релаксация функции распределения. В гл. 1 показано, что функция распределения имеет вид ступеньки, фронт которой распространяется в области меньших значений скоростей. Поэтому и в нашем случае в пространстве v_z должна распространяться некая волна. Так как распределение частиц по x при этом фактически не меняется, эта волна движется в пространстве скоростей v_z . За фронтом ее будет выполняться соотношение (2.147), в то время как перед фронтом функция распределения равна начальной. Поэтому из закона сохранения частиц следует, что функция распределения в некоторый момент имеет вид, изображенный на рис. 41 пунктиром. Можно было бы вычислить скорость движения фронта $v_m(t)$. Однако этого делать не следует, так как в действительности релаксация происходит несколько иначе. Если на функции распределения образуется участок с $\partial F/\partial v_z > 0$ (а он должен образоваться), то тут же на фронте волны вблизи $v_z = v_m(t)$ возбуждается ионно-звуковая волна, частота которой лежит в интервале $\omega_{H1} < \omega_s < \omega_{H0}$, и, следовательно, $\omega_s \gg \omega_k$ [ионно-звуковые колебания с $k_{\perp} \gg k_z$, ионы незамагничены в колебаниях с $\omega_s/k_z \approx v_z = v_m(t)$]. Соответственно $\gamma_s \gg \gamma_k$. Так как эта в.ч.-неустойчивость приводит к образованию плато в пространстве v_z , то появившийся было пучок (см. пунктир на рис. 41) в масштабах рассматриваемого времени мгновенно распространится на всю область неустойчивости. Поэтому функция распределения будет иметь вид, изображенный на рис. 41 сплошной линией.

Определим теперь, как зависит v_m от времени, т. е. закон движения фронта. В области $v_{z1} \leq v_z \leq v_m(t)$ происходит экспоненциальное нарастание энергии дрейфовых шумов с начальным инкрементом

$$\gamma_k = \gamma_0(v_{z2})(v_z/v_{z2}) k_y \rho / (1 + k_{\perp}^2 \rho^2).$$

Время нарастания энергии дрейфовых шумов до конечного значения, таким образом, определяется длительностью линейной стадии $(1/\gamma_k)\Lambda$, так как последующая квазилинейная стадия, в течение которой функция распределения меняет угол наклона от нуля до конечного значения $\partial F/\partial v_z = (k_y v_z / \omega_k \omega_{He}) \partial F_0/\partial x$, занимает время порядка $1/\gamma_k(v_z)$. Итак, закон движения фронта дрейфовых шумов и точки изменения производной на функции распределения (см. рис. 41) можно записать в виде

$$v_m(t) = [v_{z2}/2\gamma_k(v_{z2})](1/t) \ln (W_{\bar{k}_y} / W_0); \quad \bar{k}_y = 1/\rho; \quad k_x = 0, \quad (2.160)$$

где $\gamma_{\bar{k}}(v_{z2}) = \gamma_0(v_{z2}) \bar{k}_y \rho / (1 + \bar{k}_y^2 \rho^2)$. Отсюда можно определить время, за которое фронт пройдет область неустойчивости [81]:

$$t - t_0(v_{z2}) = \frac{1}{2\gamma_k(v_{z2})} \frac{v_{z2} - v_{z1}}{v_{z1}} \ln \frac{W_{\bar{k}_y}}{W_0};$$

$$\bar{k}_y = \frac{1}{\rho}; \quad \bar{k}_x = 0. \quad (2.161)$$

Закон движения $v_m(t)$, как показано, можно установить, не решая сложной системы уравнений. Интересно отметить, что ионно-звуковые колебания, определяющие форму и скорость движения фронта волны в v_z -пространстве, исчезают сразу за фронтом там, где $\partial F / \partial v_z^2 < 0$. За промежуток времени, определяемый формулой (2.161), $k_m(t)$ в окрестности точки v_{z2} сместится от $1/\rho$ до значения, определяемого из уравнения $(k_m^2 \rho^2 + 1) \times (3k_m^2 \rho^2 - 1) / 4k_m^3 \rho^3 = v_{z2} / v_{z1}$, так как $t/t_0(v_{z2}) = [v_{z2} \Lambda / 2v_{z1} \gamma_{\bar{k}}(v_{z2})] \times 2\gamma_{\bar{k}}(v_{z2}) / A = v_{z2} / v_{z1}$ при $\bar{k}_y = 1/\rho$, $\bar{k}_x = 0$. Отсюда следует, что центр волнового пакета сместится до $k_m \sim (1/\rho) v_{z2} / v_{z1}$. Так как v_{z2} и v_{z1} одного порядка, то смещение центра пакета несущественно скажется на изменении функции распределения перед фронтом из-за малого параметра v_{z2}^2 / v_{Te}^2 . Поэтому инкремент перед фронтом по-прежнему определяется начальной функцией распределения, а закон движения фронта — формулой (2.160).

Итак, перед фронтом в области $v_{z1} \leq v_z \leq v_m(t)$ нарастает энергия дрейфовых шумов с линейным инкрементом. Инкремент максимален при $k_y = 1/\rho$, $k_x \approx 0$, $v_z = v_m(t)$. Справа от точки $v_m(t)$ энергия шумов примерно равна конечной, но центр пакета уже сместился в сторону больших значений k_y , причем чем дальше от точки $v_m(t)$, тем сильнее. Когда, например, фронт достигнет точки v_{z1} , то в окрестности точки v_{z1} центр пакета будет при $k_y = 1/\rho$, в то время как в точке v_{z2} центр успеет сместиться до $k_y \sim (1/\rho) v_{z2} / v_{z1}$.

Остановимся на критерии локальности. Для рассмотренного типа дрейфовой неустойчивости его можно записать в виде

$$\frac{n_0}{|dn_0/dx| \rho} \gg \frac{k_x \rho}{1 + k_y^2 \rho^2} \sqrt{\frac{\beta M}{m}}.$$

Это условие выполняется автоматически, так как во все моменты при $k_x \ll k_y$ инкремент максимален.

В заключение обсудим следствия из полученных решений. Во-первых, если вначале, при $k_m \sim 1/\rho$, частицы по x практически не смещались, то через время $t \sim 1/\gamma_k(v_{z2}) (v_{Te} / v_{z2}) \Lambda$ $k_m^2 \rho^2$ станет порядка v_{Te}^2 / v_{z2}^2 , а следовательно, смещение резонансных

частиц будет порядка a . Во-вторых, отмеченное выше свойство нелинейного инкремента, состоящее в том, что возникшее возмущение с данным значением волнового вектора подавляет неустойчивость более длинноволновых колебаний и, напротив, слабо влияет на коротковолновую часть спектра, должно иметь место и для других типов дрейфовой неустойчивости, в частности при $T_e = T_i$.

§ 2.11. Равновесие плазмы в магнитном поле

Общие условия равновесия можно найти в работах [80, 81]. Покажем на простых примерах, какие дополнительные эффекты не-

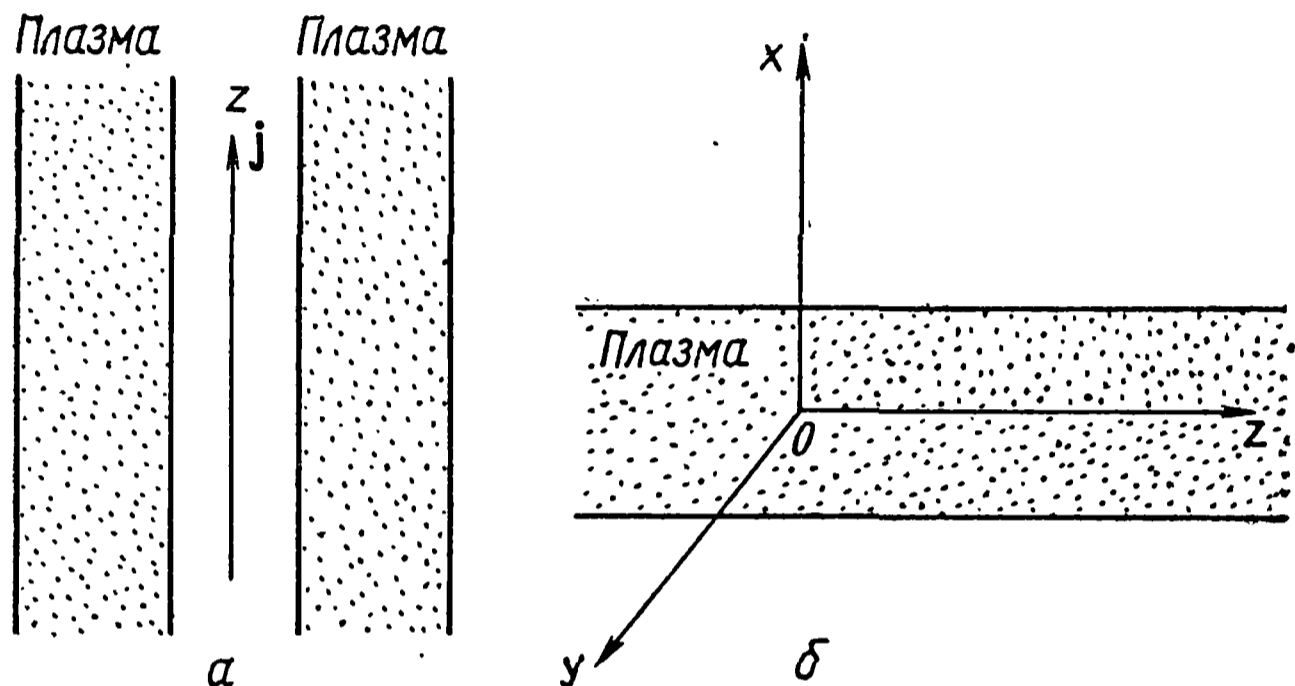


Рис. 42

обходимо учитывать при исследовании дрейфовых колебаний в конфигурации с минимумом $|H|$.

Выберем наиболее простую геометрию: плазма в поле прямой бесконечной линии с током, плотность которого равна j . Если рассматривать внутреннюю границу плазмы, можно считать, что поле нарастает по направлению к границе, т. е. имеет место конфигурация с минимумом $|H|$ (рис. 42, а).

Запишем уравнения равновесия плазмы [82, 83] в виде

$$\nabla p = (1/c) [jH]; \operatorname{rot} H = (4\pi/c) j; \operatorname{div} H = 0. \quad (2.162)$$

Будем решать их методом последовательных приближений, считая, что в нулевом приближении плотность плазмы равна нулю. Тогда

$$H_0 = \nabla \psi; \Delta \psi = 0. \quad (2.163)$$

Это означает, что в случае цилиндрической геометрии (см. рис. 42, а) $H_0 = \{0, H_{0\theta}, 0\}$; $H_{0\theta} = \text{const}/r = A/r$, а в случае плоской геометрии (см. рис. 42, б) $H_0 = \{0, 0, H_{0z}\}$; $H_{0z} = \text{const} = c$, где A и c — константы. В следующем приближении

$$\nabla p = (1/c) [jH]; \operatorname{rot} H_1 = (4\pi/c) j; \operatorname{div} H_1 = 0, \quad (2.164)$$

где \mathbf{H}_1 — малая добавка к \mathbf{H}_0 . Так как в случае цилиндрической геометрии все величины зависят только от r , а $\mathbf{H}_0 = \{0, H_{0\theta}, 0\}$, то из первых двух уравнений (2.164) следует, что

$$\partial p / \partial r = - (1/4\pi) H_{0\theta} (1/r) (\partial / \partial r) (r H_{1\theta}). \quad (2.165)$$

Соответственно для плоской геометрии

$$\partial p / \partial x = - (1/4\pi) H_{0z} (\partial / \partial x) H_{1z}. \quad (2.166)$$

Так как для плоской геометрии $H_{0z} = c \gg H_{1z}$, то уравнение (2.166) примет вид $\partial p / \partial x = - (1/8\pi) \partial H^2 / \partial x$, где $H^2 = (H_{0z} + H_{1z})^2$. Проведя тождественные преобразования, получим соотношение $(1/p) \partial p / \partial x = -\beta (1/H^2) \partial H^2 / \partial x$ ($\beta = p / (H^2 / 8\pi) \ll 1$); из него видно, что длина, на которой заметно меняется магнитное поле, $|(1/H^2) \partial H^2 / \partial x|^{-1} = l_H$ в $1/\beta$ раз больше соответствующей длины для давления $|(1/p) \partial p / \partial x|^{-1} = l_p$.

В цилиндрической геометрии из уравнения (2.165) и условия $H_{0\theta} = A/r \gg H_{1\theta}$ следует, что $\partial p / \partial r = - (1/8\pi) (1/r^2) (\partial / \partial r) [(rH)^2]$, где $H^2 = (H_{0\theta} + H_{1\theta})^2$, т. е. $l_p = \beta l_{rH}$. Здесь $l_{rH} = \left| \frac{1}{r^2 H^2} \frac{\partial}{\partial r} [(rH)^2] \right|^{-1}$.

Таким образом, длина, на которой $(rH)^2$ меняется в $1/\beta$ раз, больше $|(1/p) \partial p / \partial x|^{-1}$. Величина же $l_H = |(1/H^2) \partial H^2 / \partial x|^{-1}$ может быть порядка $|(1/p) \partial p / \partial x|^{-1}$, если длина, на которой меняется плотность, сравнима с радиусом кривизны.

§ 2.12. Стабилизация дрейфовой неустойчивости в ловушках с минимумом $|H|$ при $T_e \gg T_i$

Известно, что желобковая неустойчивость не возбуждается в ловушках с нарастающим к границе плазмы магнитным полем при $\beta \ll 1$, так как частицам невыгодно переходить в область больших магнитных полей. Естественно было бы предположить, что нарастающее к границе плазмы магнитное поле должно стабилизировать по той же причине и дрейфовую неустойчивость (в линейном приближении).

Рассмотрим сначала случай, когда $T_e \gg T_i$. Выберем наиболее простую геометрию: редкая плазма ($\beta \ll 1$) в поле прямой бесконечной нити, причем наружной границей плазмы служит диэлектрический цилиндр (см. рис. 42, а).

Будем считать, что давление плазмы не слишком мало ($m/M \ll \beta \ll 1$). В этом случае дисперсионное соотношение для дрейфовых волн наиболее просто получить из совместного решения следующей системы уравнений: уравнений движения и непрерывности для ионной компоненты (2.126), дрейфового кинетического уравнения для электронов

$$\partial F / \partial t + \dot{\mathbf{R}} \partial F / \partial \mathbf{r} + (\partial v_{\parallel} / \partial t) \partial F_0 / \partial v_{\parallel} = 0, \quad (2.167)$$

где $F_0 = (m/T_{\perp})(m/2\pi T_{\parallel})^{1/2} n_0 \exp[-m\mu H/T_{\perp} - mv_{\parallel}^2/2T_{\parallel}]$, и условия квазинейтральности

$$n_i = \int F dv_{\parallel} H d\mu. \quad (2.168)$$

Здесь $\mu = v_{\perp}^2/2H$ — поперечный адиабатический инвариант; T_{\perp} и T_{\parallel} — поперечная и продольная температуры электронов ($T_{\parallel} = \text{const}$, T_{\perp} может зависеть от r). В нашем случае $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $H_z = H_r = 0$, $H_{\theta} \approx 1/r$. Поэтому [82]

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= v_{\parallel} \mathbf{e}_{\theta} + (c/H_0)[\mathbf{E}\mathbf{e}_{\theta}] + (H'/H_0) \times \\ &\quad \times (1/\omega_{He})(\mu H + v_{\parallel}^2) \mathbf{e}_z; \\ dv_{\parallel}/dt &= -(e/m) E_{\theta} - (e/m\omega_{He}) v_{\parallel} E_z H'/H_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.169)$$

где \mathbf{e}_{θ} и \mathbf{e}_z — единичные векторы, направленные вдоль магнитного поля и оси z ; $H' = dH/dr$. Решая уравнения (2.126), как и в § 2.7, методом последовательных приближений, получаем

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div} \left\{ n_i \left(\frac{c}{H_0} \left[\mathbf{e}_{\theta} \nabla \varphi \right] + \frac{Mc^2}{eH_0^2} \left[\mathbf{e}_{\theta} \left[\mathbf{e}_{\theta} \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} \right] \right] \right) \right\} = 0. \quad (2.170)$$

Рассмотрим поведение во времени возмущений равновесного состояния вида $A_{km}(r) \exp(ik_z z + im\theta - i\omega_k t)$. Тогда из уравнений (2.167) — (2.170) получим дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{Mc^2}{e} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{n_0 r}{H_0} \frac{d\varphi_{km}}{dr} \right) - k_z^2 \frac{Mc^2}{eH_0} n_0 \varphi_{km} + \\ &\quad + \frac{k_z}{\omega_k} \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{n_0 r}{H_0} \right) \varphi_{km} - \varphi_{km} \times \\ &\quad \times \int H_0 \frac{(c/H_0) \partial F_0 / \partial r + (e/m) (\partial F_0 / \partial v_{\parallel}) [k_{\parallel} + k_z (H'/H_0) v_{\parallel} / \omega_{He}]}{\omega_k - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_z (1/\omega_{He}) (\mu H + v_{\parallel}^2) H'/H_0} \times \\ &\quad \times dv_{\parallel} d\mu = 0, \end{aligned} \quad (2.171)$$

где $k_{\parallel} = m/r$.

В точности такое же дисперсионное соотношение можно получить без использования дрейфового кинетического уравнения, а с помощью метода интегрирования по траекториям, как это сделано в работе [73].

Знаменатель подинтегрального выражения в уравнении (2.171) обращается в нуль в точках v_1 и v_2 :

$$v_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{k_{\parallel} \omega_{He}}{k_z H_1 / H_0} \left[-1 \pm \right]$$

$$\pm \sqrt{1 - \frac{4\mu H_0 (k_z H'/H_0)^2}{(k_{\parallel} \omega_{He})^2} + \frac{\omega_k \omega_{He}}{k_z H'/H_0} \frac{4 (k_z H'/H_0)}{(k_{\perp} \omega_{He})^2}}.$$

Так как $\mu H_0 \leq T_{\perp}/m$, $\omega_k \sim (T/m\omega_{He}) k_z H'/H_0$, то

$$4\mu H_0 (k_z H'/H_0)^2 / k_{\perp}^2 \omega_e^2 \ll 1, \quad \frac{\omega_k \omega_{He}}{k_z H'/H_0} \frac{4 (k_z H'/H_0)^2}{(k_{\parallel} \omega_{He})^2} \sim 4 \frac{\omega_k^2}{k_{\perp}^2 v_{Te}^2} \ll 1$$

и, следовательно, $v_1 \approx \omega_k / k_{\parallel} - \mu H' k_z \omega_{He} k_{\parallel} \ll v_{Te}$, $v_2 \approx \approx v_{Te}^2 k_{\parallel} / \omega_k \gg v_{Te} \gg \omega / k_{\parallel}$, $v_{Te} = \sqrt{2T_{\parallel}/m}$. Поэтому при интегрировании по v_{\parallel} можно пренебречь вычетом в точке v_2 , так как он экспоненциально мал. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{H^2}{n_0 r} \frac{d}{dr} \left(\frac{n_0 r}{H^2} \frac{d\varphi_{km}}{dr} \right) - \rho^2 k_z^2 \varphi_{km} + \\ & + \frac{k_z}{\omega_k} \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{d \ln (n_0 r / H)}{dr} \varphi_{km} - \varphi_{km} + \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_{\parallel}| v_{Te}} \times \\ & \times \left(\frac{cT_{\parallel}}{eH} k_z \frac{d \ln (n_0 / H_0)}{dr} - \omega_k + \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} k_z \frac{d \ln H_0}{dr} \right) \varphi_{km} = 0. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Решая это уравнение методом ВКБ [78, 80], т. е. считая $R_{k_r} \gg 1$ и $(R/k_r) dk_r/dr \ll 1$, где R — характерный размер неоднородности, $k_r = \frac{1}{\rho} \left(-k_z^2 \rho^2 + \frac{k_z}{\omega_k} \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{d \ln (n_0 r / H_0)}{dr} - 1 \right)^{1/2}$, получим, воспользовавшись тем, что $\omega_k / k_{\parallel} v_{Te}$ и γ_k / ω_k малы:

$$\pi l = \int_a^b \frac{1}{\rho} \left(-k_z^2 \rho^2 + \frac{k_z}{\omega_k} \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{d \ln (n_0 r / H_0)}{dr} - 1 \right)^{1/2} dr; \quad (2.173)$$

$$\gamma_k = \frac{\sqrt{\pi}}{v_{Te}} \omega_k^2 \times$$

$$\times \frac{\int_a^b \left(\frac{cT_{\parallel}}{eH_0} k_z \frac{d \ln (n_0 r / H_0)}{dr} \frac{1}{\omega_k} - 1 + \frac{cT_{\perp}}{eH_0} k_z \frac{H'}{\omega_k H_0} \right) \frac{dr}{\rho^2 k_r^2 |k_{\parallel}|}}{\int_a^b [(1 + k_{\perp}^2 \rho^2) / k_r^2 \rho^2] dr}. \quad (2.174)$$

Здесь $l \gg 1$ — целое число; a и b — точки поворота, определяемые из условия $k_r = 0$. При достаточно малых r , когда $k_z^2 \rho^2 < 1$, точка a определяется из условия $1 \approx \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{d \ln (n_0 r / H_0)}{dr} \frac{k_z}{\omega_k}$; вторая точка поворота лежит в области, где $k_z^2 \rho^2 \gg 1$, и определяет

ся из условия $k_z^2 \rho^2 \approx \frac{k_z}{\omega_k} \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{d \ln(n_0 r/H_0)}{dr}$.

Достаточное условие возбуждения колебаний, следующее из соотношения (2.174), совпадает с необходимым и достаточным условием, полученным при помощи «локальной теории»:

$$\omega_k \left(\frac{cT_{\parallel}}{eH_0} k_z \frac{d \ln(n_0 r/H_0)}{dr} - \omega_k - \frac{cT_{\perp}}{eH_0} k_z \frac{H'}{H_0} \right) > 0. \quad (2.175)$$

В случае $T_{\parallel} = T_{\perp}$ это условие принимает вид

$$\omega_k \left(\frac{cT_{\parallel}}{eH_0} k_z \frac{d \ln(n_0 r)}{dr} - \omega_k \right) = 0. \quad (2.176)$$

Из дисперсионного соотношения (2.173) следует оценка сверху для частоты

$$\omega_k \leq \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} k_z \frac{d \ln(n_0 r/H_0)}{dr} \frac{1}{1 + k_z^2 \rho^2}.$$

Подставляя ее в соотношение (2.176), получаем достаточное условие неустойчивости при $T_{\parallel} = T_{\perp}$ [83]:

$$k_z^2 \rho^2 > \frac{d \ln(n_0 r/H_0)}{d \ln(n_0 r)}. \quad (2.177)$$

Таким образом, при $T_{\parallel} = T_{\perp}$ нарастающее к границе плазмы магнитное поле не приводит к стабилизации дрейфовых волн.

Для выяснения физического смысла этого результата рассмотрим работу резонансных частиц по изменению энергии волны \mathcal{E}_k в единицу времени. По определению $\partial \mathcal{E}_k / \partial t = -(1/2)[(\mathbf{j}_k \mathbf{E}_k) + \text{к.с.}]$, где \mathbf{j}_k — фурье-компонента плотности тока резонансных частиц. Так как резонансными частицами являются электроны, движущиеся вдоль поля \mathbf{H}_0 со скоростью $v_1 = \omega_k / k_{\parallel} = \mu H' k_z / \omega_e$ и вдоль оси z со скоростью v_z , то

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = \frac{1}{2} e \int (E_{\parallel k}^* v_1 + E_{zk}^* v_z + \text{к.с.}) \delta n_k(v_1, \mu) H d\mu, \quad (2.178)$$

где $H \delta n_k(v_1, \mu)$ — плотность резонансных частиц в интервале $d\mu$. Второе слагаемое в правой части равенства (2.178) должно приводить к затуханию возмущения, так как оно связано с работой по перемещению резонансной частицы в область большего магнитного поля. Действительно,

$$e E_{zk}^* v_z \tau = - (e \mu H' \omega_{He}) E_{zk}^* \tau = - m \mu H' (c/H_0) E_{zk}^* \tau = m \mu \Delta H,$$

где ΔH — изменение напряженности магнитного поля при перемещении на расстояние $\Delta r = -(c/H_0) E_{zk}^* \tau$, равное смещению резонансной частицы в поле волны за время взаимодействия с волной

$\tau = 1/\gamma$. Увеличение энергии колебаний происходит за счет энергии теплового движения резонансных электронов вдоль магнитного поля, причем избыток работы в точности компенсирует энергию, затраченную волной на перемещение резонансной частицы в область большего магнитного поля, т. е.

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = e (\omega/k_{\parallel}) \int \delta n_k(v_{\perp}, \mu) H d\mu (1/2) (E_{\parallel k}^* + \text{к. с.}). \quad (2.179)$$

Подставляя в формулу (2.179) выражение для

$$\begin{aligned} \delta n_k(v_{\perp}, \mu) = \\ = \text{Im} \int \frac{(c/H_0) \partial F_0 / \partial r + (e/m) (\partial F_0 / \partial v_{\parallel}) [k_{\parallel} + k_z (H'/H_0) v_{\parallel} / \omega_{He}]}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_z (1/\omega_{He}) (\mu H + v_{\parallel}^2) H'/H_0} \times \\ \times \varphi_k dv_{\parallel}, \end{aligned}$$

получаем условие возбуждения колебаний (2.175).

Рассмотрим теперь более общее условие неустойчивости (2.175). Из него следует, что при выполнении равенства

$$T_{\parallel} dn_0/dr = n_0 [(T_{\perp} - T_{\parallel})/H_0] dH_0/dr \quad (2.180)$$

дрейфовые колебания устойчивы, $\gamma_k < 0$. Так как в нашем случае T_{\parallel} — постоянная величина, то соотношение (2.180) можно переписать в виде [84]

$$dp_{\parallel}/dr = [(p_{\perp} - p_{\parallel})/H_0] dH/dr, \quad (2.181)$$

где $p_{\parallel} = n_0 T_{\parallel}$, $p_{\perp} = n_0 T_{\perp}$. Таким образом, начальная функция распределения, параметры которой удовлетворяют соотношению (2.181), устойчива относительно возбуждения дрейфовых волн. Если давление неизотропно:

$$p_{ik} = p_{\parallel} H_i H_k / H_0^2 + p_{\perp} (\delta_{ik} - H_i H_k / H^2),$$

то одно из условий равновесия $(\mathbf{H} \nabla p_{ik}) = 0$, следующее из уравнения (2.162), можно записать в виде

$$\left(\mathbf{h} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{|\mathbf{H}|} \left(\mathbf{h} \frac{\partial |\mathbf{H}|}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0, \quad (2.182)$$

где \mathbf{h} — единичный вектор, направленный вдоль силовой линии [81]. Тейлором было показано [80], что в поле с минимумом $|\mathbf{H}|$ равновесная функция распределения может зависеть от интегралов движения $\varepsilon = (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/2$, $\mu = v_{\perp}^2/2H$, а также от номера силовой линии L . При этом оказалось, что если $F = F(\varepsilon, \mu)$, т. е. функция распределения не зависит от L , то соотношение (2.182) выполняется автоматически.

В нашем случае равенство (2.182) уже не является условием равновесия, так как $(\mathbf{h} \partial p_{\parallel} / \partial \mathbf{r}) = 0$, $(\mathbf{h} \partial |\mathbf{H}| / \partial \mathbf{r}) = 0$. Тем не менее, вводя, как обычно,

$$\rho_{\parallel} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\varepsilon/|H|} m \sqrt{\varepsilon - \mu} |H| F(\varepsilon, \mu, L) |H| d\mu d\varepsilon;$$

$$\rho_{\perp} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\varepsilon/|H|} m F(\varepsilon, \mu, L) \mu |H| / 2 |H| d\mu d\varepsilon / \sqrt{\varepsilon - \mu H}$$

и помня, что от r зависит лишь $|H|$, можно убедиться в том, что равенство (2.181) выполняется, когда $F(\varepsilon, \mu, L) = F(\varepsilon, \mu)$. С помощью энергетического принципа, обобщенного на случай $\rho_{\parallel} \neq \rho_{\perp}$ [80], было показано, что плазма с такой функцией распределения устойчива относительно возбуждения желобковых колебаний. Однако в работе [80] не учитывались резонансные частицы и связанные с ними эффекты возбуждения колебаний. Проведенное нами исследование показывает, что вывод Тейлора можно, по-видимому, распространить и на дрейфовые волны. При этом плазма оказывается устойчивой относительно возбуждения дрейфовых волн любой длины.

Такой же результат получили независимо Розенблют и Кролл [85]. Отличие состоит лишь в способе моделирования ловушки с минимумом $|H|$. В работе [85] рассматривалась плазма, в которую были введены прямые жесткие проводники с током, текущим вдоль оси y (см. рис. 42, б), причем число проводников, приходящихся на единицу площади плоскости zox , зависело от x . В результате $H = \{0, 0, H_z(x)\}$, причем можно было так распределить проводники и токи в них, что характерная длина, на которой менялось магнитное поле, была порядка $|(1/\rho)d\rho/dx|^{-1}$, т. е. выполнялось основное требование к модели ловушки с минимумом $|H|$. Несмотря на некоторую искусственность такой модели, она весьма удачна, так как в прямом поле не нужно учитывать эффекты, связанные с кривизной силовых линий.

§ 2.13. О стабилизации неустойчивости слабонеоднородной изотермической плазмы в ловушке

Помимо дрейфовых волн, распространяющихся почти поперек магнитного поля со скоростью $\omega_k/k_y = -v_{др}$, в плазме могут возбуждаться электростатические н.ч.-колебания, описываемые дисперсионным уравнением

$$\omega_k^3 = - (k_z^2 T_e / m_i) k_y v_{0i} \quad (2.183)$$

при $d \ln T_e / dx \gg d \ln n_0 / dx$; $k_z^2 T_e / m_i \ll \omega^2$ [62, 63]. Здесь $v_{др} = (c T_e / e H_0) d \ln n_0 / dx$; $v_{0i} = (c T_i / e H) d \ln (n_0 T_i) / dx$; $m_i = M$, $m_e = m$, а $T_i \sim T_e$. Система координат здесь выбрана, как обычно: магнитное поле направлено вдоль оси z , в то время как все величины зависят от x . При исследовании этих неустойчивостей дрейф частиц из-за неоднородности магнитного поля считался малым, так как отношение β газового давления к магнитному много меньше единицы.

Решая аналогичные задачи для ловушек, необходимо учитывать дрейф частиц из-за неоднородности и кривизны магнитного поля даже при $\beta \ll 1$. При этом, как показано в § 2.12, дрейфовые волны устойчивы, когда средняя энергия электронов много больше энергии ионов ($T_e \gg T_i$), а функция распределения электронов зависит лишь от $\varepsilon - (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/2$ и $\mu = v_{\perp}^2/2H$.

Когда $T_e \sim T_i$, появляются два дополнительных механизма возбуждения: во-первых, диамагнитный и центробежный дрейф ионов (скорость последнего теперь сравнима с $v_{др}$), во-вторых, новая ветвь колебаний, описываемая дисперсионным соотношением (2.183). Поэтому интересно проанализировать устойчивость плазмы относительно потенциальных возмущений ($\omega/k_z \ll v_A$), когда функция распределения электронов и ионов зависит лишь от ε и μ , а $T_e = T_i = T$.

Пусть $\beta \ll 1$, а длина волны возмущения значительно превосходит ларморовский радиус ионов, но много меньше характерного размера неоднородности. Тогда дисперсионное уравнение можно получить, воспользовавшись дрейфовым кинетическим уравнением и условием квазинейтральности. Следуя работе Розенблюта и Кролла [85], будем считать геометрию плоской. Это означает, что рассматривается плоский слой плазмы, границы которого параллельны плоскости yOz . В плазму помещены проводники с током таким образом, что $\mathbf{j} = \{0, j_y, 0\}$ создает магнитное поле. Расположим проводники так, чтобы они не препятствовали распространению возмущений в плоскости yOz (как обычно, считаем, что волна локализована вблизи некоторого значения x). Для плоской геометрии дрейфовое кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{dv_{\alpha}}{dt} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial v_z} = 0, \quad (2.184)$$

причем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_z \mathbf{e}_z + \frac{e}{H_0^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}] + \frac{\mu m_{\alpha} c}{e_{\alpha}} \frac{[\mathbf{H}\nabla|\mathbf{H}|]}{H^2}; \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_z;$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{e_{\alpha} H}{m_{\alpha} c}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi; \quad n = \int H F d\mu dv_z; \quad F = F(\mu, v_z, x).$$

Здесь α — сорт частиц; \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z . Будем искать возмущение величин в виде $A_k(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$, тогда

$$F_{\alpha k} = \frac{(e_{\alpha}/m_{\alpha}) \partial F_{\alpha} / \partial v_z + (c/H) k_y \partial F_{\alpha} / \partial x}{-\omega_k + k_z v_z + k_y (m_{\alpha} \mu c / e_{\alpha}) H' / H_0}. \quad (2.185)$$

Интегрируя выражение (2.185) по v_z и μ , а затем используя условие квазинейтральности, получим дисперсионное уравнение

$$\int_0^{\infty} H d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \left[\frac{-(e/m_e) k_z \partial F_e / \partial v_z + (c/H_0) k_y \partial F_e / \partial x}{-\omega_k + k_z v_z - k_y (\mu m c / e) H' / H_0} - \frac{(e/m) k_z \partial F_i / \partial v_z + (c/H_0) k_y \partial F_i / \partial x}{-\omega_k + k_z v_z + k_y (\mu M c / e) H' / H_0} \right] = 0. \quad (2.186)$$

В отличие от случая $T_e \gg T_i$ главную часть интеграла для ионов уже нельзя вычислить, разлагая выражение (2.186) по параметрам $k_z \sqrt{2T_i/M}/\omega \ll 1$; $(k_y \mu M_e / e \omega_k) H' / H_0 \ll 1$, так как может оказаться, что $k_y (M \mu c / e) H' / H \sim \omega_k$. Пусть $F_\alpha = F_\alpha(\varepsilon, \mu)$; тогда $\partial F_\alpha / \partial v_z = (\partial F_\alpha / \partial \varepsilon) v_z$; $\partial F_\alpha / \partial x = -(\partial F_\alpha / \partial \varepsilon) \mu H'$, так как $v_z^2/2 = \varepsilon - \mu H$. Уравнение (2.186) при этом существенно упрощается:

$$\int_0^{\infty} H d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \left[-\frac{\partial F_e}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\omega_k \partial F_e / \partial \varepsilon}{-\omega_k + k_z v_z - k_y (\mu m c / e) H' / H_0} - \frac{\omega_k \partial F_i / \partial \varepsilon}{\omega_k + k_z v_z - k_y (\mu M c / e) H' / H_0} \right] = 0. \quad (2.187)$$

Пусть $F_\alpha(\varepsilon, \mu) \sim \exp\{-m_\alpha \varepsilon T - \mu/\mu_0 d\}$, т. е. функция распределения $F_\alpha(\varepsilon, \mu)$ есть локальная максвелловская функция с различными продольной и поперечной температурами: $T_{\parallel} = T$; $T_{\perp} = T/(1 + T/\mu_{0\alpha} m_\alpha H)$, $n_0 = Q(1 + T/\mu_{0\alpha} m_\alpha H)$. Здесь T , $\mu_{0\alpha}$, Q — константы. Будем считать для определенности, что H растет с

увеличением x . Тогда, введя обозначения: $\left| k_y \frac{T_{\parallel}}{m_\alpha \omega_\alpha} \frac{H'}{H_0} \right| = \Omega$;

$$\frac{\omega_k}{\Omega} = \tilde{z}; \quad \frac{|k_z| \sqrt{2T_{\parallel}/m}}{\Omega} = x; \quad \tilde{x} = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2T_{\parallel}/m}}; \quad \tilde{y} = \frac{\mu m H_0}{T_{\perp}}, \quad \text{пере-}$$

пишем уравнение (2.187) следующим образом:

$$F(\tilde{z}) = 2 + \frac{\tilde{z}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\tilde{y} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \exp(-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) \times \\ \times \left[\frac{1}{-\tilde{z} + x \tilde{x} - (T_{\perp}/T_{\parallel}) \tilde{y}} + \frac{1}{-\tilde{z} + x \sqrt{m/M} \tilde{x} + (T_{\perp}/T_{\parallel}) \tilde{y}} \right] = 0. \quad (2.188)$$

Как в работе [86], будем исследовать это уравнение с помощью метода Найквиста [18]. Колебания устойчивы, если уравнение (2.188) не имеет корней в той части плоскости комплексного переменного \tilde{z} , где $\text{Im} \tilde{z} > 0$. Так как функция $F(\tilde{z})$ выше действительной оси полюсов не имеет, число нулей в верхней полуплоскости $N \equiv \equiv (1/2\pi i) \int (dF/\tilde{d}\tilde{z}) \tilde{d}\tilde{z}/F$. Контур интегрирования s изображен на рис. 43.

При больших \tilde{z} $F(\tilde{z})$ имеет вид $F(\tilde{z}) = -A/\tilde{z}^2 + \dots$, $A > 0$. Поэтому интеграл по дуге c равен $-2\pi i$, а интеграл вдоль действительной оси есть

$$(1/2\pi i) \{ \ln [F(\infty)/F(-\infty)] + i(\arg F(\infty) - \arg F(-\infty)) \} = \\ = (1/2\pi i) [\arg F(\infty) - \arg F(-\infty)],$$

т. е.

$$N = -1 + (1/2\pi) [\arg F(\infty) - \arg F(-\infty)]. \quad (2.189)$$

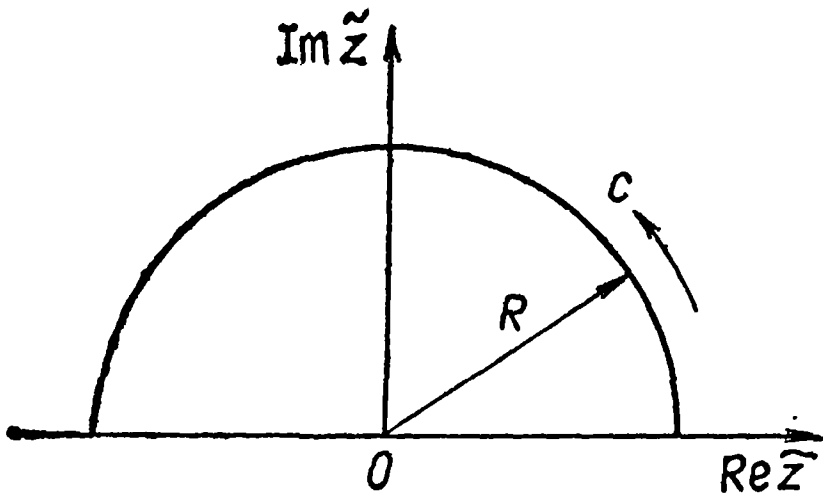


Рис. 43

Таким образом, чтобы найти число нулей в верхней полуплоскости, необходимо определить приращение аргумента $F(\tilde{z})$ при изменении \tilde{z} вдоль действительной оси от $-\infty$ до ∞ . Определим $\text{Im}F(\tilde{z})$ и $\text{Re}F(\tilde{z})$ при действительных значениях \tilde{z} . Вычислим сначала действительную и мнимую части первого слагаемого в квадратных скобках уравнения (2.188), обязанного своим происхождением электронам. Пусть

$$F_e = \int_0^{\infty} d\tilde{y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)}{-\tilde{z} + \tilde{x} - (T_{\perp}/T_{\parallel})\tilde{y}} d\tilde{x}.$$

Заменяя согласно правилу Ландау \tilde{z} на $\tilde{z} + i\nu$, отделим в F_e мнимую часть от действительной [17]:

$$F_e = (1/\kappa) \int_0^{\infty} \exp(-\tilde{y}) d\tilde{y} \left[i\pi \exp \left\{ - \left[\tilde{z} + (T_{\perp}/T_{\parallel})\tilde{y} \right]^2 / \kappa^2 \right\} - \right. \\ \left. - 2\pi \exp \left\{ - \left[\tilde{z} + (T_{\perp}/T_{\parallel})\tilde{y} \right]^2 / \kappa^2 \right\} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\left[\tilde{z} + (T_{\perp}/T_{\parallel})\tilde{y} \right] / \kappa} \exp(t^2) dt \right] = (1/\kappa) \left[i\pi \exp \left(\tilde{z} T_{\parallel} / T_{\perp} \right) \times \right. \\ \left. \times \int_{\tilde{z} T_{\parallel} / T_{\perp}}^{\infty} \exp \left\{ - (u + (T_{\perp}/T_{\parallel}\kappa)^2 u^2) \right\} du - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2\sqrt{\pi} \exp\left(\tilde{z} T_{\parallel}/T_{\perp}\right) \int_{\tilde{z} T_{\parallel}/T_{\perp}}^{\infty} du \left\{ \exp\left[-u - (T_{\perp}/T_{\parallel} x)^2 u^2\right] \times \right. \\
& \quad \left. u \left(T_{\perp}/T_{\parallel}\right)^{x-1} \right. \\
& \quad \times \int_0^{\infty} \exp(t^2) dt \left. \right\}. \quad (2.190)
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляется F_i . Наконец, выпишем мнимую часть:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} F_e + \operatorname{Im} F_i = & \left(\tilde{z}/\sqrt{\pi}\right) (T_{\parallel}/T_{\perp}) \left[\exp\left\{\tilde{z} T_{\parallel}/T_{\perp} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (x T_{\parallel}/2T_{\perp})^2\right\} \int_{\frac{\tilde{z}}{x} + \frac{x T_{\parallel}}{2T_{\perp}}}^{\infty} \exp(-t^2) dt + \exp\left\{\tilde{z} T_{\parallel}/T_{\perp} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (x T_{\parallel}/2T_{\perp})^2 m/M\right\} \int_{-\frac{\tilde{z}}{x} - \frac{x T_{\parallel}}{2T_{\perp}}}^{\infty} \exp(-t^2) dt \right] \quad (2.191) \\
& - \frac{\tilde{z}}{x} \sqrt{\frac{M}{m}} + \frac{x T_{\parallel}}{2T_{\perp}} \sqrt{\frac{m}{M}}
\end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что $\operatorname{Im} F$ обращается в нуль при $\tilde{z} = 0$, $\tilde{z} = \infty$ и $\tilde{z} = -\infty$, причем при $\tilde{z} = \pm \infty$ $\operatorname{Im} F \sim \sim \exp(-|\tilde{z}| T_{\parallel}/T_{\perp})$, а при $\tilde{z} \rightarrow 0$ $\operatorname{Im} F \sim \tilde{z}$. Поэтому, зная лишь, что $\operatorname{Re} F(\tilde{z}) \sim -A/\tilde{z}^2 + \dots$ ($A > 0$), $\operatorname{Re} F(\tilde{z}) \approx 2 + \dots$, $\tilde{z} \rightarrow 0$, можно найти приращение аргумента $F(\tilde{z})$ при изменении \tilde{z} от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 44). Видно, что как бы ни вела себя действительная часть $\operatorname{Re} F(\tilde{z})$ при $\tilde{z} \approx \approx 1$, $\arg F(\infty) - \arg F(-\infty) = = \pi - (-\pi) = 2\pi$. Отсюда число нулей в верхней полуплоскости комплексной переменной $N = -1 + (1/2\pi)[\arg F(\infty) - - \arg F(-\infty)] = 0$, т. е. равновесие устойчиво.

Покажем, что результат остается в силе и для более общего вида функций распределения $F_{\alpha} = F_{\alpha}(\varepsilon, \mu)$, чем использованный нами. Действительно, чтобы амплитуда колебаний не нарастала во времени, величина

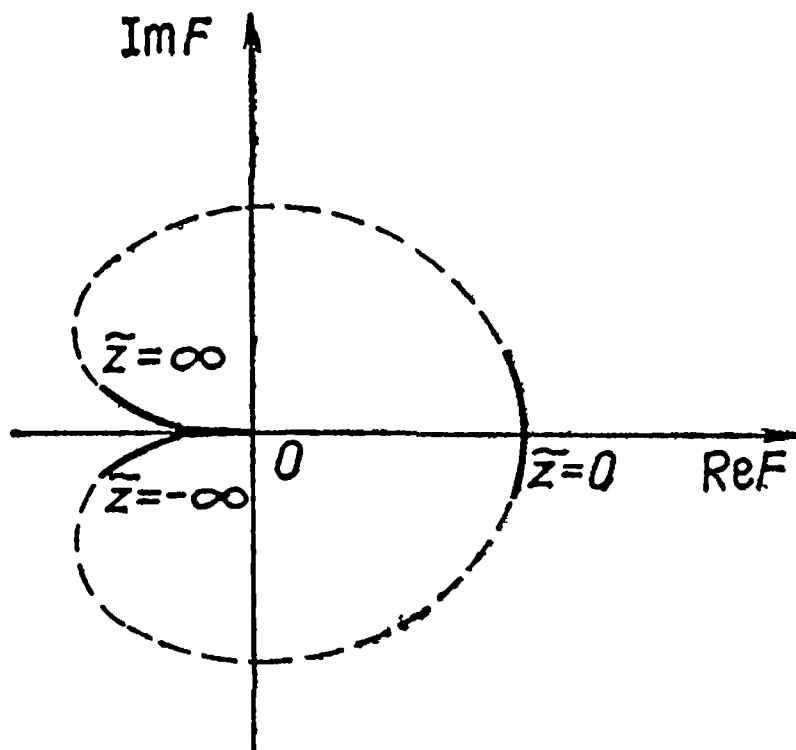


Рис. 44

$$\Phi(\omega_k) = \text{Im} \int_0^\infty H d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_z \left[\frac{\partial F_e / \partial \varepsilon}{\omega_k - k_z v_z + k_y (\mu m c / e) H' / H_0} + \frac{\partial F_i / \partial \varepsilon}{\omega - k_z v_z + k_y (\mu M c / e) H' H_0} \right] \quad (2.192)$$

должна сохранять знак при всех конечных значениях ω_k и стремиться к нулю быстрее, чем $1/\omega_k^2$. Последнее требование связано со следующим обстоятельством: диаграмма Найквиста имеет вид, изображенный на рис. 44, но только в том случае, если мнимая часть дисперсионного уравнения при $\omega_k \rightarrow \pm\infty$ обращается в нуль быстрее, чем действительная. Действительная часть уравнения (2.187)

при $\omega \rightarrow \pm\infty$ $(1/\omega^2) \int_0^\infty H d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_z (B \partial F_e / \partial \varepsilon + C \partial F_i / \partial \varepsilon)$, где $B > 0$, $C > 0$. Перепишем соотношение (2.192) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\omega_k) &= -(\pi / |k_z|) \int_0^\infty H d\mu \left(\partial F_e / \partial \varepsilon \Big|_{v_z^-} + \partial F_e / \partial \varepsilon \Big|_{v_z^+} \right); \\ v_z^- &= \frac{\omega_k}{k_z} \frac{k_y (\mu m_e c / e) H' / H_0}{k_z}; \\ v_z^+ &= \frac{\omega_k}{k_z} \frac{k_y (\mu M c / e) H' / H_0}{k_z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.193)$$

Отсюда следует, что достаточным условием устойчивости является требование $\partial F_\alpha / \partial \varepsilon < 0$ для всех μ, ε , а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ $F(\varepsilon, \mu) \sim 1/\varepsilon^{1/2+\delta}$. Последнее условие выполняется всегда, так как требование сходимости интегралов при вычислении средней энергии частицы накладывает на вид $F(\varepsilon, \mu)$ более жесткие ограничения [87].

§ 2.14. Квазилинейная релаксация неустойчивой функции распределения частиц в поле с минимумом $|H|$ [88]

В § 2.12 и 2.13 показано, что если в поле с минимумом $|H|$ функция распределения F зависит от интегралов движения ε и μ и не зависит от номера силовой линии L , то плазма оказывается устойчивой относительно возбуждения дрейфовых волн. С другой стороны, в § 2.7—2.10 исследована динамика квазилинейной релаксации функции распределения, неустойчивой относительно возбуждения дрейфовых волн.

Возникает естественный вопрос, не переходит ли произвольная неустойчивая функция распределения в поле с минимумом $|H|$ течением времени в функцию, зависящую лишь от ε и μ .

Для упрощения выкладок будем использовать, как и в § 2.13, плоскую модель ловушки с минимумом $|H|$. Оговоримся заранее,

что для внутренней границы плазмы, находящейся в поле прямой бесконечной нити с током (см. § 2.12), получается тот же результат.

Итак, рассмотрим плоский слой плазмы низкой плотности ($m/M \ll \beta \ll 1$), зависящий от x , магнитное поле направлено вдоль оси z , причем $|(1/H^2)\partial H^2/\partial x| \sim |(1/n_0)\partial n_0/\partial x|$. Будем считать, что $T_e > T_i$. Как и ранее, будем изучать колебания, фазовая скорость которых лежит в интервале $c_s \ll \omega_k/k_z \ll v_A$. Пользуясь уравнениями гидродинамики для ионов, дрейфово-кинетическим уравнением для электронов и условием квазинейтральности, можно получить дисперсионное соотношение для дрейфовых волн в «локальном» приближении:

$$\omega_k = -k_y (cT_{\parallel} / eH_0) [d \ln (n_0/H_0) / dx] / (1 + k_{\perp}^2 \rho^2). \quad (2.194)$$

Здесь, как и в § 2.12, T_{\parallel} — продольная температура электронов; $\rho = c \sqrt{T_{\parallel} M} / eH_0$.

При получении уравнения (2.194) считали, что функция распределения нерезонансных электронов имеет вид

$$F(\mu, v_z, x) = n_0(x) (m/2\pi T_{\parallel})^{1/2} \times \\ \times (m/T_{\perp}) \exp\{-mv_z^2/2T_{\parallel} - m\mu H_0/T_{\perp}\}; \quad T_{\parallel} = \text{const.} \quad (2.195)$$

Локальный инкремент дрейфовых волн, частота и волновой вектор которых удовлетворяют уравнению (2.194), можно записать следующим образом:

$$\gamma_k(x, t) = -\pi \frac{\omega_k^2}{(cT_{\parallel}/eH_0) k_y d \ln (n_0/H_0) / dx} \frac{T_{\parallel}}{en_0} \times \\ \times \iint dv_z H d\mu \left(\frac{e}{m} k_z \frac{\partial F}{\partial v_z} - k_y \frac{c}{H_0} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \times \\ \times \delta(\omega_k - k_z v_z + k_y \frac{\mu mc}{e} \frac{H'}{H_0}). \quad (2.196)$$

Если считать, что функция распределения резонансных электронов также описывается функцией (2.195), то

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \frac{\omega_k^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2} \left[-1 - \frac{k_y}{\omega_k} \frac{cT_{\parallel}}{eH_0} \frac{d \ln n_0}{dx} - \right. \\ \left. - \frac{k_y}{\omega_k} \frac{c(T_{\perp} - T_{\parallel})}{eH_0} \frac{d \ln H_0}{dx} \right].$$

Из этой формулы следует, что при $T_{\parallel} = T_{\perp}$ ($d \ln H_0 / d \ln n_0 < 0$) для достаточно коротких волн $\gamma_0 > 0$, т. е. плазма неустойчива. При этом максимум инкремента при заданном k_z расположен в точке $k_y \sim 1/\rho$; $k_x \ll k_y$.

Проследим, как меняется во времени максвелловская функция с $T_{\parallel} = T_{\perp}$. Для этого воспользуемся квазилинейными уравнениями. В нашем случае одним из них является уравнение (2.196). Урав-

нение для функции распределения резонансных частиц проще всего получить при помощи обычной процедуры усреднения по фазам дрейфового кинетического уравнения (см. § 2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \int dk_x dk_y dk_z \left[\frac{e}{m} k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial}{\partial x} \right] \times \\ & \times \frac{\pi 2T_{\parallel} W_k}{(1 + k^2 \rho^2) n_0 e^2} \delta \left(\omega_k - k_z v_z + k_y \frac{\mu m c}{e} \frac{H'}{H_0} \right) \times \\ & \times \left(\frac{e}{m} k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial}{\partial x} \right) F, \end{aligned} \quad (2.197)$$

где $W_k = k_D^2 (1 + k^2 \rho^2) (|\Phi_k|^2 / 8\pi) (2\pi)^2 / G$ — спектральная плотность энергии шумов $F = F(\mu, v_z, x, t)$.

Кроме уравнений (2.196) и (2.197) необходимо записать еще одно уравнение, выражающее собой закон сохранения адиабатического инварианта электрона (длина волны много больше ларморовского радиуса электрона, $\omega_k \ll \omega_{He}$):

$$d\mu/dt = 0. \quad (2.198)$$

Отсюда следует, что траектория частицы в конфигурационном пространстве μ, v_z, x во все моменты должна оставаться в плоскости $\mu = \mu_0$, где μ_0 — значение μ для данной частицы в начальный момент.

Проводя интегрирование в уравнении (2.196) по v_z , а в уравнении (2.197) по k_z и учитывая, что по определению $2\gamma_k = (1/W_k) \partial W_k / \partial t$, получаем полную систему квазилинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \int dk_x dk_y \hat{L}_{k\mu} \left(\frac{2T_{\parallel}}{m^2} \pi \times \right. \\ & \times \frac{W_{k_x, k_y, \omega_k/v_z + (k_y/v_z) (\mu m c/e) H'/H_0}}{n_0 |v_z|^3 (1 + k^2 \rho^2)} \omega_k^2 \hat{L}_{k\mu} F \Big); \\ & \frac{1}{W_{k_x, k_y, k_z}} \frac{\partial W_{k_x, k_y, k_z}}{\partial t} = \\ & = -2\pi \frac{\omega_k^2}{k_y (cT_{\parallel}/eH_0) d \ln(n_0/H)/dx} \frac{T_{\parallel}}{mn_0} \frac{1}{|k_z|} \times \\ & \times \int Hd\mu \left[k_z \frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_e} \frac{\partial F}{\partial x} \right] \Big|_{v_z=v_z^+}; \\ & d\mu/dt = 0, \end{aligned} \quad (2.199)$$

$$\text{где } \hat{L}_{k_x} = \left(1 + \frac{k_y \mu_0 m c}{e \omega_k} \frac{H'}{H_0} \right) \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y v_z}{\omega_e \omega_k} \frac{\partial}{\partial x}; \quad v_z^+ = \frac{\omega_k}{k_z} +$$

$$+ \frac{k_y}{k_z} \frac{\mu_0 m c}{e} \frac{H'}{H_0}.$$

Рассмотрим сначала специальный вид начальной функции распределения резонансных электронов, а именно

$$F(\mu, v_z, x, 0) = (1/H) \Gamma(\mu, v_z, x, 0) \delta(\mu - \mu_0); \quad \mu_0 \sim T_{\perp} / mH.$$

Тогда в силу второго равенства (2.199)

$$F(\mu, v_z, x, t) = (1/H) \Gamma(\mu, v_z, x, t) \delta(\mu - \mu_0).$$

Поэтому из уравнений (2.199) следует

$$\frac{\partial \Gamma(\mu_0, v_z, x, t)}{\partial t} = \int dk_x dk_y H \hat{L}_{k \mu_0} \times$$

$$\times \left(\frac{2T_{\parallel}}{m^2} \pi \frac{W_{k_x, k_y, \omega_k/v_z + (k_y \mu_0 m c / v_z e) H' / H_0}}{n_0 |v_z|^3 (1 + k^2 \rho^2)} \omega_k^2 \hat{L}_{k \mu_0} \frac{1}{H} \Gamma \right); \quad (2.200)$$

$$\frac{1}{W_{k_x, k_y, \omega_k/v_z + (k_y \mu_0 m c / v_z e) H' / H_0}} \frac{\partial W_{k_x, k_y, \omega_k/v_z + (k_y \mu_0 m c / v_z e) H' / H_0}}{\partial t} =$$

$$= \pi \frac{|\omega_k|}{1 + k_{\perp}^2 \rho^2} \frac{2T_{\parallel}}{m n_0} \frac{1}{|1 + (k_y \mu_0 m c / e \omega_k) H' / H|} \times$$

$$\times \frac{|v_z|}{v_z} H \hat{L}_{k \mu_0} \left[\frac{1}{H} \Gamma(\mu_0, v_z, x, t) \right]. \quad (2.201)$$

Здесь волновое число k_z выражено через v_z в силу однозначности связи $k_z = \omega_k / v_z + (k_y / v_z) (\mu_0 m c / e) H' / H_0$. Исследуем систему (2.200), (2.201) с помощью метода, развитого в § 2.8. В течение времени порядка $A/2\gamma_{\text{макс}}$ будет происходить линейное нарастание шумов и затем, примерно за время $1/\gamma_{\text{макс}}$, произойдет изменение функции распределения в окрестности той точки v_z , где инкремент максимален. Если считать, что $\Gamma(\mu_0, v_z, x, 0) = (m/2\pi T_{\parallel})^{1/2} \times n_0(x) \exp(-mv_z^2/2T_{\parallel})$, то в начальный момент инкремент максимален в окрестности максимально допустимого значения v_z при $k_y \sim 1/\rho$, $k_x \ll k_y$. Отсюда следует, что к моменту начала изменения функции распределения функция распределения спектральной плотности энергии шумов W_k будет представлять собой функцию с резким максимумом вблизи $k_y = \bar{k}_y \sim 1/\rho$, $\bar{k}_x \ll \bar{k}_y$. Поэтому в уравнении (2.200) можно провести интегрирование по k_x и k_y , а уравнение (2.201) записать для $k_x = \bar{k}_x$, $k_y = \bar{k}_y$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= H \hat{L}_{\bar{k}, \mu_0} \left(\frac{2T_{\parallel}}{m^2} \pi \times \right. \\
&\times \frac{W_{\bar{k}_x, \bar{k}_y, \omega_{\bar{k}}/v_z + (\bar{k}_y \mu_0 mc/v_z e) H'/H_0}}{(1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2) |v_z|^3 n_0} \times \\
&\times \left. \omega_{\bar{k}}^2 \Delta_{\bar{k}_x} \Delta_{\bar{k}_y} \hat{L}_{\bar{k}, \mu_0} \frac{1}{H} \Gamma \right); \quad (2.202) \\
&\frac{i}{W_{\bar{k}_x, \bar{k}_y, \omega_{\bar{k}}/v_z + (\bar{k}_y \mu_0 mc/e v_z) H'/H_0}} \times \\
&\times \frac{\partial W_{\bar{k}_x, \bar{k}_y, \omega_{\bar{k}}/v_z + (\bar{k}_y \mu_0 mc/v_z e) H'/H_0}}{\partial t} = \\
&= \pi \frac{|\omega_{\bar{k}}|}{(1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2)} \frac{2T_{\parallel}}{m n_0} \frac{1}{|1 + (\bar{k}_y \mu_0 mc/e \omega_{\bar{k}}) H'/H_0|} \times \\
&\times \frac{|v_z|}{v_z} H \left(\hat{L}_{\bar{k}, \mu_0} \frac{1}{H} \Gamma \right). \quad (2.203)
\end{aligned}$$

Здесь, как и в соотношении (2.144), $\Delta_{\bar{k}_x}$ и $\Delta_{\bar{k}_y}$ — величины, определяющие ширину пакета по k_x и k_y . Если сделать замену переменных

$$\xi = v_z^2/2 + x \omega_{\bar{k}} \omega_e / \bar{k}_y + \mu_0 H; \quad \zeta = v_z, \quad (2.204)$$

то получим, что в системе (2.202), (2.203) оператор $\hat{L}_{\bar{k}, \mu_0}$ можно заменить на $\partial/\partial \zeta$ [ср. с уравнениями (2.145), (2.146)]. Отсюда следует, что, во-первых, функция распределения изменяется так, что производная $\partial \Gamma/\partial \zeta$ стремится к нулю. Во-вторых, в течение этого процесса ξ остается постоянной. Это означает, что движение частицы описывается уравнением $\xi = \text{const}$. Отсюда можно оценить смещение частиц по x . Так как $v_z \ll v_A$, $\Delta v_z \ll v_A$, то

$$\Delta x | (1/n_0) dn_0/dx | \ll \frac{v_A^2}{(T_{\parallel}/m)/(1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2) + \mu_0 |d \ln H_0/d \ln n_0|}.$$

Так как $v_A^2 \ll 2T_{\parallel}/m$, то $(\Delta x/n_0) |dn_0/dx| \ll 1$. В отличие от случая, рассмотренного в § 2.8, смещение частиц мало по сравнению с $| (1/n_0) dn_0/dx |^{-1}$ при всех значениях $k_{\perp}^2 \rho^2$.

В результате квазилинейной релаксации под действием колебаний с $k_y = \bar{k}_y$, $k_x = \bar{k}_x$ функция распределения в окрестности точки v_z становится такой, что $\partial \Gamma/\partial \zeta = 0$, т. е.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial v_z} = \frac{\bar{k}_y v_z}{\left[\omega_{\bar{k}} + \bar{k}_y (\mu_0 m c / e) H' / H_0 \right] \omega_e} H \frac{\partial (\Gamma / H)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\bar{k}_y v_z}{\left[\omega_{\bar{k}} + \bar{k}_y (\mu_0 m c / e) H' / H_0 \right] \omega_e} H \frac{\partial (\Gamma_0 / H_0)}{\partial x}. \quad (2.205)$$

Здесь сделана замена $\partial \Gamma / \partial x$ на $\partial \Gamma_0 / \partial x$ [$\Gamma_0 = \Gamma(\mu, v_z, x, 0)$], так как смещения частиц практически не произошло.

Установившееся состояние для $k_y = \bar{k}_y$, $k_x = \bar{k}_x$ не является стационарным в полном смысле слова, так как при $k_{\perp}^2 > \bar{k}_{\perp}^2$ инкремент $\gamma_k > 0$. В этом легко убедиться, подставив в уравнение (2.201) значение $\partial \Gamma / \partial v_z$ из формулы (2.205). Действительно,

$$\frac{\partial \ln W_{k_x, k_y, \omega_k / v_z + (k_y \mu_0 m c / v_z e) H' / H_0}}{\partial t} =$$

$$= 2\pi \frac{|\omega_k|}{(1 + k^2 \rho^2)} \frac{|v_z|}{[1 + \theta (1 + k^2 \rho^2)]} \frac{H_0}{n_0} \frac{\partial (\Gamma_0 / H_0)}{\partial x} \times$$

$$\times \frac{1}{d \ln (n_0 / H_0) / dx} \left[\frac{1}{1 / (1 + k_{\perp}^2 \rho^2) + \theta} - \frac{1}{1 / (1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2) + \theta} \right], \quad (2.206)$$

где $\theta = -(\mu_0 m H T_{\parallel}) [d \ln H_0 / d \ln (n_0 / H)] > 0$; θ — порядка 1.

Из соотношения (2.206) следует, что волны с $k_{\perp}^2 > \bar{k}_{\perp}^2$ возбуждаются, а волны с $k_{\perp}^2 < \bar{k}_{\perp}^2$ затухают. Так как инкремент максимален по-прежнему при $k_x \ll k_y$, где $k_y > \bar{k}_y$, то можно пренебречь k_x по сравнению с k_y .

Итак, как и в задаче, рассмотренной в § 2.9, решение должно описывать пакет волн по k_y , центр которого смещается в область больших k_y . Предполагая, что пакет узкий, можно найти закон движения $k_m(t)$ и показать, что относительная ширина пакета мала ($\Delta \bar{k}_y / k_m(t) \ll 1$) во все моменты. Не будем останавливаться на определении точной зависимости $k_m(t)$. Для нас достаточно лишь того, что пакет остается узким, а центр его $k_m(t) = \bar{k}_y(t)$ смещается в область больших k_y . В конце концов при $t \rightarrow \infty$, $\bar{k}_y \rightarrow \infty$ (в действительности достаточно $\bar{k}_y \rho^2 \gg 1/\theta$) окажется, что установилось стационарное состояние, так как $\gamma_k \leq 0$ для всех k . Функция распределения будет при этом такой, что $\partial \Gamma / \partial \zeta = 0$, причем ζ и ξ соответствуют $k_y = \infty$. Это означает, что Γ может зависеть лишь от $\xi(\bar{k}_y)$ при $\bar{k}_y = \infty$. Полагая в выражении (2.204) $k_y = \infty$, получаем

$$\xi = v_z^2 / 2 + \mu_0 H = \varepsilon. \quad (2.207)$$

Следовательно, начальная функция распределения резонансных частиц выбранного нами вида с течением времени переходит в

$F(\epsilon, \mu)$. При этом частицы практически не смещаются по x , а характерное время, за которое происходит этот переход, порядка $(1/\theta)A/\gamma_{\text{макс}}^0$.

Покажем, что полученные результаты верны и для более широкого класса начальных функций распределения. Для этого обратимся к исходной системе уравнений (2.199). К моменту начала изменения функции распределения в плазме образуется узкий пакет волн с $k_y \sim 1/\rho$, $\bar{k}_x \ll \bar{k}_y$, $\bar{k}_z = k_{z\text{мин}}$. Проинтегрировав по k_z и v_z в уравнениях (2.199), получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(\mu, v_z, x, t)}{\partial t} &= \hat{L}_{\bar{k}, \mu} \left(\frac{2T_{\parallel}}{m^2} \Delta_{\bar{k}_x} \Delta_{\bar{k}_y} \times \right. \\ &\times \left. \frac{W_{\bar{k}_x, \bar{k}_y, \omega_{\bar{k}}/v_z + (\bar{k}_y \mu mc / e v_z) H' / H}}{n_0 |v_z|^3 (1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2)} \omega_{\bar{k}}^2 \hat{L}_{\bar{k}, \mu} F \right); \\ \frac{\partial \ln W_{\bar{k}_x, \bar{k}_y, \bar{k}_z}}{\partial t} &= -2\pi \frac{\omega_{\bar{k}}^2}{(cT_{\parallel} / eH_0) k_y d \ln(n_0/H_0) / dx} \times \\ &\times \frac{T_{\parallel}}{mn_0} \frac{k_z}{|k_z|} \int H d\mu' \left(\hat{L}_{\bar{k}, \mu'} F \right) \Big|_{v_z = \frac{\omega_{\bar{k}}}{\bar{k}_z} + \frac{\bar{k}_y \mu' mc}{k_z e} \frac{H'}{H_0}}; \\ \frac{d\mu}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} (2.208)$$

Из выписанной системы уравнений следует, что $F(\mu, v_z, x, t)$ меняется в окрестности точки v_z , определяемой для каждого значения μ из формулы

$$v_z = \omega_{\bar{k}} / \bar{k}_z + (\bar{k}_y / \bar{k}_z) (\mu mc / e) H' / H_0. \quad (2.209)$$

Далее, из первого уравнения (2.208) можно получить одно важное соотношение. Для этого умножим обе части уравнения на F и проинтегрируем его по v_z и x с учетом того, что энергия шумов на границе области v_z, x обращается в нуль. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int F^2 dv_z dx &= - \int \frac{2T_{\parallel}}{m^2} \pi \Delta_{\bar{k}_x} \Delta_{\bar{k}_y} \times \\ &\times \frac{W_{\bar{k}_x, k_y, \omega_{\bar{k}}/v_z + (\bar{k}_y \mu mc / v_z e) H' / H_0}}{n_0 |v_z|^3 (1 + \bar{k}_{\perp}^2 \rho^2)} \left(\hat{L}_{\bar{k}, \mu} F \right)^2 dv_z dx. \end{aligned} \quad (2.210)$$

Таким образом, решение первого уравнения (2.208) обладает важным свойством необратимости.

Введя переменные $\xi_{\mu, \bar{k}} = v_z^2 / 2 + \mu H_0 + x \omega_{\bar{k}} \omega_{He} / \bar{k}_y$, $\zeta_{\mu, \bar{k}} = v_z$, получим, что в уравнениях (2.208) можно заменить оператор $\hat{L}_{\bar{k}, \mu}$

на $\partial/\partial\zeta_{\mu,\bar{k}}$. Тогда из первого уравнения (2.208) следует, что, во-первых, движение частиц будет описываться уравнением $\xi_{\bar{k},\mu} = \text{const}$, во-вторых, функция распределения будет меняться таким образом, чтобы $\partial F/\partial\zeta_{\mu,\bar{k}} \rightarrow 0$. При этом вследствие диффузионного характера уравнения производная $\partial F/\partial\zeta_{\mu,\bar{k}}$ в окрестности рассматриваемой точки v_z стремится к нулю монотонно, без изменения знака.

Из уравнения (2.198) следует, что частица сохраняет магнитный момент, т. е. движется по линии $\mu = \text{const}$, $\xi_{\bar{k},\mu} = \text{const}$, которая, как уже было показано, почти совпадает с линией $x = \text{const}$, $\mu = \text{const}$.

Предположим, что в начальный момент $\hat{L}_{\bar{k},\mu} F = 0$ для всех возможных μ . В результате смещения частиц может оказаться, что для некоторого значения $\mu = \tilde{\mu}$ $\hat{L}_{\bar{k},\tilde{\mu}} F = 0$, в то время как для $\mu \neq \tilde{\mu}$ $\hat{L}_{\bar{k},\mu} F > 0$. Тогда функция распределения для $\mu = \tilde{\mu}$ уже не будет меняться, однако шумы с $k_y = \bar{k}_y$, $k_x = \bar{k}_x$, $k_z = k_{z\text{мин}}$ будут продолжать нарастать до тех пор, пока $\hat{L}_{\bar{k},\mu} F$ не обратится в нуль для каждого μ в окрестности линии $v_z(\mu)$, определяемой вторым уравнением (2.208). Так как энергия шумов к началу процесса изменения функции примерно равна конечной, этот процесс произойдет для всех μ за время порядка $1/\gamma_{\text{макс}}^0$ после начала изменения функции распределения. После этого функция распределения будет зависеть лишь от $\xi_{\bar{k},\mu}$ и μ в окрестности линии $\bar{k}_z v_z = \omega_k + + (k_y \mu mc/e)H'/H_0$ в плоскости μ, v_z . Рассмотрим дальнейшую эволюцию функции распределения в окрестности этой линии. Как и в предыдущих случаях, воспользовавшись тем, что частицы смещаются лишь по v_z , можно заменить $\partial F/\partial x$ на $\partial F_0/\partial x$, где $\partial F_0/\partial x$ — производная функции распределения в начальный момент, и убедиться в том, что волны с $k_{\perp}^2 > \bar{k}_{\perp}^2$ нарастают для всех μ , а с $k_{\perp}^2 < \bar{k}_{\perp}^2$ — затухают. Поэтому центр узкого пакета волн должен смещаться в сторону больших k_y . Следовательно, $\bar{k}_y = \bar{k}_y(t)$, причем при $t \rightarrow \infty$ $\bar{k}_y(t) \rightarrow \infty$. Функция распределения резонансных электронов в каждый момент будет зависеть от μ и следующей комбинации x и v_z :

$$\xi_{\bar{k}_y(t),\mu} = v_z^2/2 + x\omega_{\bar{k}(t)}\omega_e/\bar{k}_y(t) + \mu H.$$

В пределе при $t \rightarrow \infty$, $\bar{k}_y \rightarrow \infty$ (достаточно выполнения условия $\bar{k}_y^2 \rho^2 \gg 1/\theta$)

$$\xi_{t=\infty} = v_z^2/2 + \mu H = \varepsilon.$$

Это означает, что функция распределения переходит в функцию, зависящую лишь от энергии частицы и магнитного момента. Подобно тому, как это сделано в § 2.10, можно показать, что шумы рас-

пространятся по всей области неустойчивых значений k_z , причем характерное время здесь также равно $A/2\gamma_{\text{макс}}^0$.

Остановимся еще на одном обстоятельстве. Пусть в начальный момент для некоторых значений μ $\hat{L}_{\vec{k},\mu} F > 0$, для других $\hat{L}_{\vec{k},\mu} F < 0$. Тогда в процессе релаксации $\hat{L}_{\vec{k},\mu} F$ будет уменьшаться по абсолютному значению для всех μ , и может оказаться, что в некоторый момент $\gamma_{\vec{k}} = 0$. Однако энергия шумов при этом не равна нулю, т. е. отличен от нуля коэффициент диффузии в первом уравнении (2.208). Поэтому функция распределения будет меняться, а следовательно, изменится и инкремент. Может оказаться, что при этом $\gamma_{\vec{k}}$ станет меньше нуля, тогда шумы затухнут и установится стационарное состояние, при котором $\gamma_{\vec{k}} < 0$. Когда функция распределения пропорциональна $\delta(\mu - \mu_0)$, такой возможности нет.

Действительно, система (2.200), (2.201) обладает квазилинейным интегралом, из которого следует, что, когда энергия шумов равна начальной, функция распределения может быть только начальной. Поэтому если начальная функция распределения была неустойчивой, то она превратится со временем в устойчивую, а энергия шумов в конечном состоянии будет отлична от нуля. Полная система (2.208) не имеет такого интеграла, поэтому нельзя исключить возможность установления указанного стационарного состояния. В заключение отметим, что если начальная функция распределения частиц является максвелловской с $T_{\parallel} = T_{\perp}$ или не зависит от v_z , то $\hat{L}_{k\mu} \geq 0$ для всех μ , поэтому такие функции должны со временем превратиться в устойчивые, зависящие лишь от ϵ и μ .

§ 2.15. Устойчивость плазменного шнура

До сих пор рассматривались неустойчивости плазмы низкого давления, когда протекающие по плазме токи не искажают конфигурации внешних магнитных полей. Такая ситуация имеет место, например, для ловушек типа пробкотрон. Однако в настоящее время наиболее перспективными системами считаются системы типа Токамак, представляющие собой тор с продольным магнитным полем и с током, текущим вдоль магнитного поля. Конфигурация магнитного поля из-за тока плазмы при этом заметно изменяется, а наличие металлического лайнера, окружающего плазму, приводит к тому, что плазма становится более устойчивой. Чтобы разобраться в проблемах, стоящих перед ловушками такого типа, обратимся к изучению пинча, послужившего основным отправным пунктом для создания систем типа Токамак.

Пинч представляет собой плазменный шнур, сжатый протекающим по нему собственным током, и в первых же работах по проблеме управляемых термоядерных реакций была изучена устойчивость такой системы [89, 90]. Экспериментально такой шнур создавался при разряде достаточно большой мощности через газ. При теоре-

тическом исследовании неустойчивостей можно пользоваться уравнениями гидродинамики, решая их в линейном приближении с учетом граничных условий. Другой подход связан с применением энергетического принципа, согласно которому достаточно рассмотреть

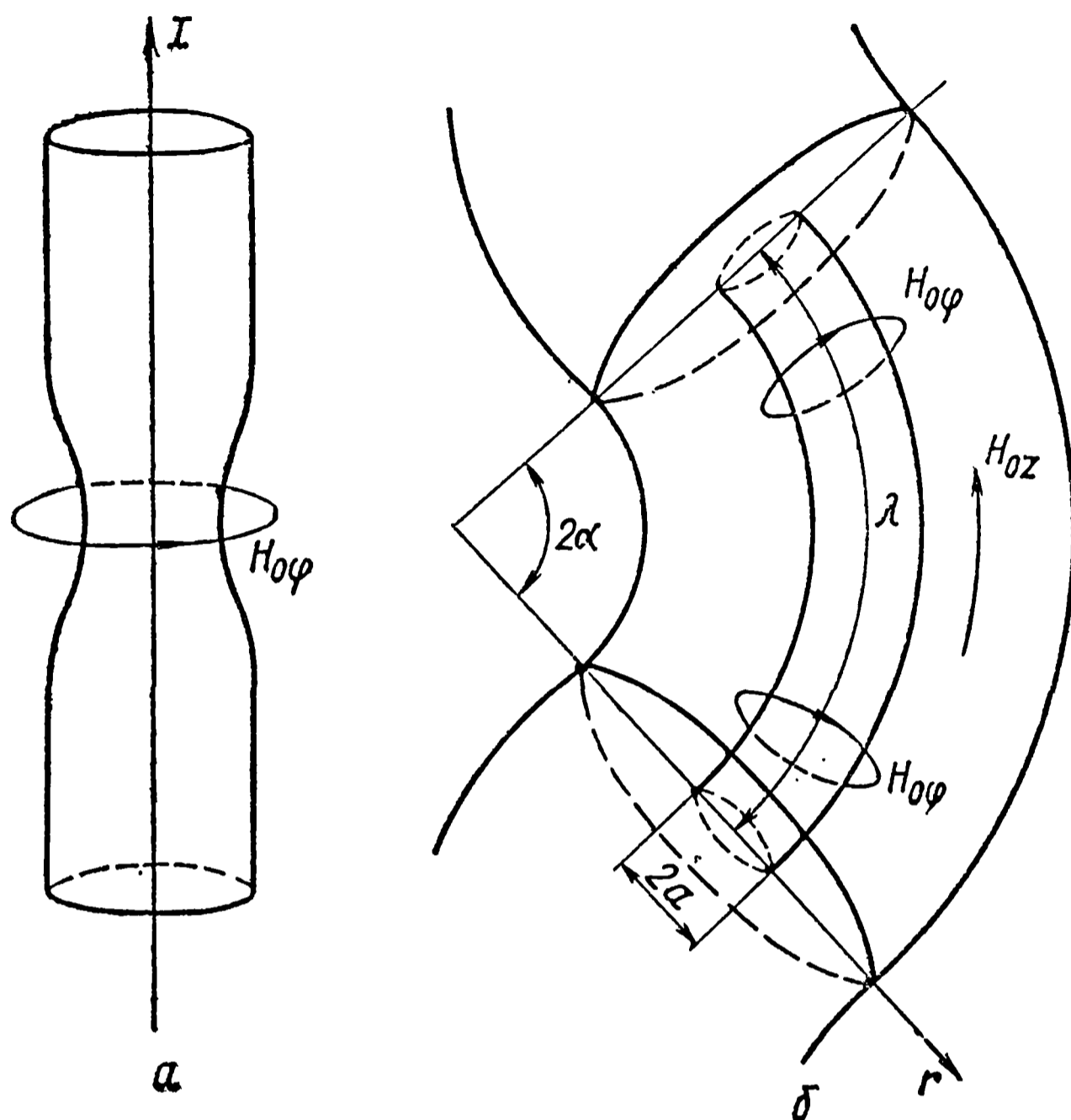


Рис. 45

лишь потенциальную энергию малых колебаний. Подробный обзор гидродинамической теории устойчивости плазмы в магнитных ловушках различного типа можно найти в работе [92]. Остановимся на наиболее важном для приложений примере: рассмотрим устойчивость шнура.

Плазменный шнур с протекающим по нему током неустойчив относительно «перетяжек» (рис. 45, а) и «змеек» (рис. 45, б). Рассмотрим сначала возмущения типа змеек.

Пусть внутри шнура имеется «вмороженное» магнитное осевое поле H_{0z} , а снаружи азимутальное магнитное поле тока $H_{0\phi}$. Будем считать для простоты, что пинч полностью скинирован (ток течет только по поверхности шнура). Такое приближение вполне оправдано, так как за время быстрого разряда магнитное поле $H_{0\phi}$ не успевает достичь центра шнура. Если шнур изгибается (длина изгиба λ), силовые линии азимутального поля сгущаются с внутренней стороны и разрежаются снаружи. Поэтому на внутреннюю часть шнура, обращенную к центру кривизны, действует бóльшая сила.

С другой стороны, за счет поля H_{0z} возникает сила, препятствующая изгибу. Таким образом, на единицу длины шнура действуют две силы в противоположном направлении. Силу, стремящуюся увеличить деформацию, можно найти следующим образом. Выделяя цилиндрический объем длиной λ , который образован плоскостями, проходящими через центр кривизны, найдем (см. рис. 45, б), что сила, возникающая из-за поля $H_{0\varphi}$, определяется соответствующей составляющей магнитного давления на торцах. Результирующая сила равна составляющей, перпендикулярной оси z , т. е. $2\alpha \int (H_{0\varphi}^2/8\pi) 2\pi r dr$, где интеграл берется от радиуса шнура до расстояния, на котором поле $H_{0\varphi}$ заметно убывает. Так как в вакууме магнитное поле можно задать в виде градиента скалярной функции Φ (поскольку $\text{rot}\mathbf{H} = 0$), то из уравнения $\text{div}\mathbf{H} = 0$ следует, что

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2.211)$$

Так как возмущение вдоль оси z имеет вид $\Phi = \Phi(r)\exp(izk)$, то, например, в двумерном случае из уравнения Лапласа следует, что $\partial^2\Phi(r)/\partial r^2 = (2\pi/\lambda)\Phi(r)$, т. е. на расстояниях порядка длины волны поле экспоненциально убывает. Поэтому в качестве пределов интегрирования можно поставить значения a и λ , где a — радиус пинча. Тогда полная сила, действующая со стороны азимутального поля, есть

$$2\alpha \int_a^\lambda (H_{0\varphi}^2/8\pi) 2\pi r dr = \lambda [a^2 H_{0\varphi}^2(a)/4R] \ln(\lambda/a).$$

Так как $a = \lambda/2R \ll 1$, поле $H_{0\varphi}(a)$ берется на поверхности шнура, $H_{0\varphi}(r) = H_{0\varphi} a/r$.

Найдем силу, обязанную своим происхождением замороженному полю H_{0z} . Ее можно подсчитать следующим образом. Объемная сила, действующая на плазму, есть $(1/c)[\mathbf{j}_0\mathbf{H}_{0z}] = (1/4\pi)[\text{rot}\mathbf{H}_{0z}\mathbf{H}_{0z}] = -\nabla H_{0z}^2/8\pi + (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{H}_{0z}/4\pi$. Так как изменения радиуса шнура не происходит (плазма несжимаема), то $\nabla(H_0^2/8\pi) = 0$, а сила натяжения $(\mathbf{H}_{0z}\nabla)\mathbf{H}_{0z}/4\pi = H_0^2/4\pi R$ (R — радиус кривизны силовой линии). Полная квазиупругая сила, действующая на единицу длины, равна $(H_{0z}^2/4\pi R)a$. Таким образом, полная сила, действующая на единицу длины,

$$\delta F = (a^2/4R) [H_{0\varphi}^2 \ln(\lambda/a) - H_{0z}^2]. \quad (2.212)$$

Из условия равновесия шнура следует, что $p + H_{0z}^2/8\pi = H_{0\varphi}^2/8\pi$. Таким образом, $H_{0\varphi}^2 > H_{0z}^2$, поэтому достаточно длинноволновые возмущения не стабилизируются [при $\lambda \gg a \ln(\lambda_0/a) \gg 1$]. Как показано в работе [90], такая неустойчивость может быть стабилизирована проводящим кожухом, расположенным достаточно близко к шнуру. В проводящем кожухе при этом

наводится ток, текущий в противоположном току плазмы направлении. Наведенный ток «отталкивает» ток плазмы от стенки и, как показывают расчеты [92], пинч с замороженным продольным полем устойчив, если $b < 5a$, где b — радиус кожуха.

Если внутри и вне шнура имеется продольное магнитное поле, то внешнее поле оказывается винтовым. В этом случае наиболее опасны возмущения винтового типа, пропорциональные $A(r)\exp(i\varphi + ikz)$. В таком поле шнур, искривившись вдоль силовой линии, может выйти наружу, не возмущая магнитного поля. Это произойдет, если шаг магнитного поля на поверхности шнура совпадает с шагом возмущения или меньше его, т. е. при

$$\lambda > 2\pi a H_{0z} / H_{0\varphi}. \quad (2.213)$$

Если длина возмущения ограничена сверху, например, длиной тороидального пинча, как в Токамаке, то критерий неустойчивости принимает следующий вид:

$$q > 1; \quad q = (H_{0\varphi} / H_{0z}) R / r, \quad (2.214)$$

где R — большой, а r — малый радиус Токамака. Условие (2.214) называется критерием Крускала — Шафранова [83, 93] и является в сущности ограничением на допустимое значение тока I в системе, так как $H_{0\varphi} \sim I$.

Найдем еще условие устойчивости относительно перетяжек, т. е. возмущений, не зависящих от z и φ , а зависящих лишь от радиуса (см. рис. 45, а). Пусть радиус шнура изменился на δa . Тогда из-за сохранения магнитного потока ($H_{0z} a^2 = \text{const}$) внутри шнура $\delta H_{0z} = -2H_{0z} \delta a / a$. С другой стороны, изменение азимутального поля $H_{0\varphi}(r) = H_{0\varphi}(a) a / r$ вне шнура $\delta H_{0\varphi} = -H_{0\varphi} \delta a / a$.

Полное изменение разности магнитных давлений внутри и снаружи пинча равно

$$\delta p_H = - (H_{0z}^2 / 4\pi) 2 \delta a / a + (H_{0\varphi}^2 / 4\pi) \delta a / a. \quad (2.215)$$

Если пренебречь давлением плазмы ($p \ll H_0^2 / 8\pi$), то условие устойчивости относительно перетяжек примет вид

$$H_{0z}^2 > H_{0\varphi}^2 / 2. \quad (2.216)$$

Видно, что достаточно сильное продольное магнитное поле подавляет перетяжки. Таким образом, оптимально устойчивая система должна представлять собой тороидальный пинч с проводящим кожухом, причем ток в плазме должен быть меньше определяемого критерием Крускала — Шафранова.

Выше рассмотрен случай полностью скинированного пинча. Если же ток распределен по сечению шнура, ситуация осложняется. Для исследования пинча с распределенным током обычно используется энергетический принцип [92], однако некоторые важные результаты можно получить из простых соображений [94]. В системе с распределенным током шаг магнитной силовой линии различен.

Чтобы возмущение не искривляло силовой линии на каком-либо радиусе, волновой вектор возмущения должен быть перпендикулярен силовой линии. Именно в этом случае токовый шнур мог «пройти» между силовыми линиями магнитного поля, не искривляя их, и система становилась неустойчивой. Таким образом, если искать возмущения в виде $\exp(im\varphi + ikz)$, то

$$(kH_0) = (m/r_0) H_{0\varphi} + kH_0 = 0. \quad (2.217)$$

Отметим, что при $m = 1$ отсюда следует условие Крускала — Шафранова. Однако в случае пинча с распределенным током для возмущений внутри шнура это условие может выполняться для данных m и k при радиусе r_0 . Если масштаб возмущения таков, что $kr_0 \gg 1$, то уравнения движения можно разложить вблизи r_0 , определяемого условием (2.217) по $1/kr_0 \ll 1$. При этом будем следить за устойчивостью данной токовой трубки с радиусом r_0 . Условие равновесия имеет вид

$$\nabla(p + H^2/8\pi) + (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}/4\pi = 0; \quad p + H^2/8\pi = \chi; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Линеаризуем эти уравнения, полагая $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1(r) \exp(im\varphi + ikr)$; $\chi = \chi_0 + \chi_1(r) \exp(im\varphi + ikr)$ и пользуясь формулой $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = (1/2) \text{grad } H^2 - [\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}]$:

$$\left. \begin{aligned} i(kH_0) H_{1r} - 2H_{0\varphi}/r - \chi' &= 0; \\ i(kH_0) H_{1\varphi} + (H'_{0\varphi} + H_{0\varphi}/r) H_{1r} - (im/r) \chi &= 0; \\ i(kH_0) H_{1z} - ik\Phi_1 &= 0; \\ (1/r) (\partial/\partial r) (rH_{1r}) + i(kH_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.218)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r , а $k = \{0, m/r, k\}$. Обратим внимание на то, что (kH_0) близка согласно формуле (2.217) нулю, и, вводя $x = (r - r_0)/r_0$, разложим (kH_0) вблизи $r = r_0$. Тогда

$$(kH_0) = s_x; \quad s = r_0 (kH_0)' |_{r=r_0}. \quad (2.219)$$

Выражая все величины через H_{1r} , получим дифференциальное уравнение

$$H''_{1r} + (-k^2 + x^2/x^2) H_{1r} = 0, \quad (2.220)$$

где $x^2 = 2H_{0\varphi} (H'_{0\varphi} + H_{0\varphi}/r) k^2 r_0 / s^2 = -8\pi p' / [r H'_{0z} (\mu'/\mu)^2]$; $\mu = B_\varphi / r B_z$ — величина, определяющая шир, т. е. перекрещенность силовых линий в системе. Как показано в § 2.5, перекрещенность силовых линий может стабилизировать дрейфовую неустойчивость. Решение, убывающее на бесконечности, есть

$$H_r = \text{const } \sqrt{x} K_{\nu}(kx), \quad (2.221)$$

где $\nu = \sqrt{x^2 - 1/4}$. При $\nu^2 = 0$ функция имеет бесконечно много

нулей вблизи $x = 0$, поэтому решения, затухающие на бесконечности, можно сшить с любым решением вблизи $x = 0$, где уравнение (2.200), вообще говоря, не справедливо. При $v^2 < 0$ этого сделать нельзя. Таким образом, критерий устойчивости есть $v^2 < 0$, т. е.

$$8\pi r_0 dp/dr|_{r=r_0} < (H_{0z}^2/4) (d \ln \mu / d \ln r)^2|_{r=0}. \quad (2.222)$$

Это условие конвективной устойчивости плазменного шнура с током получил Сайдем [95]. Из критерия (2.222) следует, что чем больше относительное изменение перекрещенности силовых линий в радиальном направлении, тем больший градиент давления может удерживать магнитное поле.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ С ПЛАЗМОЙ

§ 3.1. Основные понятия и качественные оценки

В настоящее время большое внимание уделяется изучению поведения плазмы в в.ч.-полях. При этом наиболее интересно подавление опасных неустойчивостей, например, таких, как дрейфовые, полями сравнительно малых амплитуд и нагрев плазмы этими полями. Если частота внешнего в. ч.-поля близка к одной из собственных частот плазмы, в плазме могут возбуждаться неустойчивости, получившие название параметрических или распадных, которые способны привести к нагреву плазмы.

Таким образом, взаимодействие в.ч.-полей с плазмой может приводить как к стабилизации длинноволновых, опасных для удержания неустойчивостей, так и к возбуждению коротковолновых неустойчивостей, приводящих к нагреву плазмы. Чтобы взаимодействие было эффективным, тип электромагнитной в.ч.-волны, запускаемой в систему, необходимо выбрать таким образом, чтобы в соответствующем интервале частот волна могла проникать в плазму. Так, в отсутствие постоянного магнитного поля частота должна удовлетворять условию $\Omega > \omega_{pe}$; если плазма удерживается магнитным полем, в. ч.-волна представляет собой геликон с частотой $\Omega < \omega_{He}$ и волновым числом k_0 , проникающий в плазму без затухания, или же магнитно-звуковую волну, распространяющуюся строго поперек магнитного поля. Естественно, что фаза в. ч.-волны при этом фиксирована. Поэтому решить задачу на устойчивость можно следующим образом: найти траектории заряженных частиц во внешних высокочастотных полях, а затем решить линеаризованное кинетическое уравнение с найденными интегралами движения. Определенные в линейном приближении поправки к функции распределения электронов и ионов используются затем для нахождения возмущения плотности. Наконец, подставляя полученные величины в уравнение Пуассона, можно получить дисперсионное соотношение для собственных колебаний плазмы в в. ч.-поле. В имеющихся обзорах по взаимодействию в. ч.-полей с плазмой достаточно подробно освещаются проблемы стабилизации параметрического возбуждения волн [96, 97].

Начнем с постановки задачи. Пусть в плазме имеется электрическое поле с амплитудой E_0 , осциллирующее с частотой Ω , т. е.

$$E = E_0 \cos \Omega t. \quad (3.1)$$

Тогда, считая, что в нулевом приближении движение электронов и ионов задано, можно исследовать такую плазму на устойчивость относительно малых возмущений. Именно так ставилась задача в работах [98, 99]. Частота Ω считалась много большей ω_{pe} . Было обнаружено, что в гидродинамическом приближении пучковая неустойчивость стабилизируется [98]. При кинетическом рассмотрении оказалось, что в тех же условиях возбуждаются новые неустойчивости [99]. В появившейся ранее работе [100] методами теории слабой турбулентности показано, что если частота Ω равна сумме двух собственных частот плазмы, то система неустойчива. Это соответствовало распадной неустойчивости, которая, строго говоря, возникала при выполнении следующих условий:

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2; \quad k_0 = k_1 + k_2, \quad (3.2)$$

где $\omega_1 = \omega_1(k_1)$ и $\omega_2 = \omega_2(k_2)$ — частоты собственных колебаний плазмы. Поэтому при приближении Ω к ω_{pe} можно ожидать появления распадной или параметрической неустойчивости, если $\Omega = \omega_{pe} + \omega_s$, а $k_s = -k_{\omega_{pe}}$ при $k_0 \ll k_s$. Кажется совершенно естественным, что в присутствии в.ч.-поля в такой плазме должны существовать неустойчивости. Действительно, в каждый момент электроны и ионы движутся в противоположных направлениях, и, несмотря на то, что направление скорости электронов относительно ионов меняется с частотой Ω , при достаточно большом значении амплитуды $v_{0e} = eE/m\Omega$ плазма может оказаться неустойчивой. Иными словами, пользуясь методом интегрирования по траектории в в.ч.-поле, можно получить результат теории слабой турбулентности — распадную неустойчивость [101, 102]. При этом оказалось, что при достаточно больших амплитудах внешнего поля неустойчивость может иметь место и при невыполнении условий распада [101]. Это связано с тем, что достаточно большие внешние в.ч.-поля могут искажать первоначальный спектр собственных колебаний и даже приводить к возникновению новых ветвей колебаний [103]. В этом отношении метод интегрирования по траекториям частиц во внешнем в.ч.-поле имеет некоторое преимущество перед методами теории слабой турбулентности, так как позволяет рассматривать поля относительно большой амплитуды. Однако, с другой стороны, для получения результатов в компактном виде при интегрировании по траекториям частиц в в.ч.-поле необходимо производить усреднение по частоте внешнего поля Ω и считать, что волновой вектор внешней волны k_0 много меньше волновых векторов возбуждаемых в плазме колебаний. Последнее необходимо, чтобы внешнее поле было однородным в пространстве. Поэтому методы теории слабой турбулентности, не имеющие таких ограничений, в ряде случаев более предпочтительны.

В случае же, когда речь идет о стабилизации н.ч.-неустойчивостей плазмы, метод интегрирования по траекториям удобнее. На возможность стабилизации дрейфовых неустойчивостей электрическим в.ч.-полем, направленным вдоль постоянного магнитного поля, впер-

вые указали авторы работы [104]. Они обратили внимание на то, что вследствие осцилляций электронов вдоль магнитной силовой линии под действием электрического в.ч.-поля происходит увеличение эффективной температуры электронов T_e . В результате растет частота дрейфовых колебаний, так как $\omega^* \sim T_e$. С увеличением частоты колебаний в инкременте возрастает стабилизирующий член, в результате чего сужается область неустойчивости. К сожалению, практическое использование такого метода стабилизации наталкивается на серьезные трудности, так как частота внешнего поля Ω должна быть много больше ω_{Hi} и амплитуда поля также не слишком мала, а мощность в.ч.-генератора при этом оказывается слишком большой.

Поэтому были предприняты попытки найти другой способ стабилизации, который позволил бы снизить частоту Ω при использовании тех же или даже меньших амплитуд в.ч.-полей. Такой способ предложен в работе [105]. Остановимся на физической картине этого метода стабилизации. Для изучаемых неустойчивостей проекция волнового вектора \mathbf{k} на направление магнитного поля \mathbf{H}_0 мала: $k_z \ll k$. Следовательно, возмущения равновесных значений плотности, потенциала и т.п. имеют вид желобков, сильно вытянутых вдоль магнитных силовых линий. Когда к основному полю $H_z = H_0$ добавляется поперечное магнитное в.ч.-поле $H_y = H_1$, $H_y \ll H_z$, изменяющееся с частотой $\Omega \gg \omega$, то в определенные моменты направление магнитной силовой линии может стать таким, что соседние желобки возмущений окажутся связанными силовой линией. Если электроны или ионы, двигаясь в замагниченной плазме с тепловыми скоростями вдоль силовых линий, смогут пройти поперек постоянного магнитного поля расстояние порядка поперечной длины волны $\lambda \sim k_{\perp}^{-1}$ (поперечная скорость частиц равна $v_{T\alpha} H_1 / H_0$), то они уменьшат электрические поля возмущений, и неустойчивость может исчезнуть. Условие заметного влияния магнитного в.ч.-поля на неустойчивость можно, таким образом, записать в виде [105, 106]

$$(k_{\perp} v_{T\alpha} / \Omega) H_1 / H_0 \geq 1. \quad (3.3)$$

Индекс $\alpha = i, e$ намеренно не расшифрован, так как для одних неустойчивостей существенно движение электронов, для других — движение ионов. Например, для дрейфовой неустойчивости, обязанной своим происхождением затуханию Ландау на электронах при минимально допустимой частоте $\Omega \sim \omega_e^* = -(cT_e / eH_0) k_y / a \sim \sim k_z v_{Te}$, получаем критерий (3.3) в виде

$$H_1 \geq H_0 \rho_e / a. \quad (3.4)$$

Для дрейфово-температурной неустойчивости, появление которой связано с движением ионов, получаем, что

$$H_1 \geq H_0 \rho_i / a, \quad (3.5)$$

где a — в данном случае характерная длина неоднородности

ионной температуры. Видно, что критерий (3.5) более жесткий, чем (3.4). Это связано с тем, что к стабилизации дрейфово-температурной неустойчивости приводит движение ионов, а не электронов. Влияние осцилляций силовых линий на различные типы неустойчивостей в плазме подробно изучено в работе [96].

В плазме помимо описанных выше бесстолкновительных неустойчивостей существует ряд диссипативных неустойчивостей, обязанных своим происхождением столкновениям. В этом случае условие (3.3) имеет другой вид, так как частицы вдоль силовой линии движутся не с тепловой, а с диффузионной скоростью $v \sim (T_e/m\nu)k_{\parallel}$, где ν — частота столкновений электронов с ионами, а $k_{\parallel} = (kH)/H_0 \approx k_y H_1/H_0$ (положим для простоты $k_y H_1/H_0 > k_z$). При этом условие влияния в.ч.-поля на дрейфово-диссипативную неустойчивость (которая будет рассмотрена позднее) принимает вид [106]

$$(k_{\perp}^2 v_{Te}^2 / \nu \Omega) (H_1/H_0)^2 = (k_{\perp}^2 D_e / \Omega) (H_1/H_0)^2 > 1, \quad (3.6)$$

где D_e — коэффициент диффузии электронов вдоль силовой линии, связанный с подвижностью $b_e = e/m\nu$ обычной формулой: $D_e = (b/e) T_e$.

Из критериев (3.3) и (3.6) следует, что чем ниже частота в.ч.-поля, тем эффективнее данный метод. Минимально возможная частота $\Omega \geq \max\{k_z v_{Te}, \omega\}$, где ω — частота стабилизируемой неустойчивости. Например, на дрейфовые неустойчивости можно влиять, используя частоту Ω , меньшую ионно-циклотронной ω_{Hi} . Необходимо только, чтобы магнитное поле в.ч.-волны было перпендикулярно основному полю H_0 и волна не возмущала плотности плазмы. Здесь специально разграничены понятия волны и просто в.ч.-поля, так как для низких частот $\Omega < \omega_{Hi}$ длина волны в вакууме, соответствующая частоте Ω , может быть много больше размеров плазмы. В этом случае нельзя, например, говорить о волне, проникающей в плазму, а можно говорить лишь о внешних в.ч.-полях. Направленная скорость электронов, определяемая из соотношения

$$H_1/\delta \sim (\text{rot } \mathbf{H})_z = (4\pi e/c) n_0 v_z, \quad (3.7)$$

зависит от толщины скин-слоя δ . При этом можно выбрать условия стабилизации, позволяющие пренебречь движением электронов вдоль оси z ($v_z \ll v_{Te}$). Для воздействия на дрейфовые неустойчивости можно использовать магнитное поле переменного тока, текущего по плазме вдоль оси z , или магнитное поле токонесущих проводов, уложенных вдоль плазменного шнура. Второй способ предпочтительнее, так как пропустить через плазму большой ток для создания нужного магнитного поля трудно из-за малой по сравнению с металлом концентрации электронов. В любом из этих случаев магнитное поле проникает в плазму только на глубину скин-слоя. В бесстолкновительной плазме глубину проникновения переменного поля в плазму можно найти следующим образом. Известно, что из-за сильной поляризации плазмы ее диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1 - \omega_{pe}^2/\Omega^2$ на частоте $\Omega < \omega_{pe}$ может стать отрица-

тельной. Таким образом, показатель преломления $kc/\Omega = \sqrt{\epsilon}$ становится мнимым. Это означает, что мнимо волновое число $k = i/\delta$, т. е. в. ч.-поле ведет себя в плазме следующим образом: $H_1 \sim \exp(-x/\delta - i\omega t)$, где x отсчитывается от границы в глубь плазмы. В бесстолкновительном случае $k \approx (c/\Omega)i\Omega/\omega_{pe} = ic/\omega_{pe}$ и, следовательно, глубина проникновения поля очень мала: $\delta \sim c/\omega_{pe}$. В системах типа Q-машины, где плотность плазмы порядка 10^{10} см^{-3} , δ может быть больше радиуса системы $a \approx 1 \text{ см}$, и проблемы скинирования в. ч.-поля не возникает. При бóльших плотностях c/ω_{pe} много меньше размеров плазмы. Тем не менее в некоторых условиях в. ч.-поле может проникать на большую глубину. Так, в работах [107, 108] показано, что если за счет развития в плазме ионно-звуковой неустойчивости, вызванной осцилляциями электронов вдоль оси z , происходит ограничение амплитуды скорости $v_{ze} \leq c_s$, то глубина проникновения волны δ может быть много больше $\delta \sim c/\omega_{pe}$. Действительно, скорость электронов в в. ч.-волне, как это следует из формулы (3.7), $v_z \sim H_1/(\delta 4\pi e N_0)$, больше c_s при $H_1^2/(4\pi n_0 T_e) > m/M$. При этом, если $\omega_{pi} \gg \Omega$, неустойчивость ионно-звуковых колебаний успеет развиваться за один период $2\pi/\Omega$, что в принципе может привести к ограничению $v_z < c_s$. Подставляя в формулу (3.7) $v_z = c_s$, получаем, что

$$\delta \sim (c/\omega_{pi}) 1/\sqrt{\beta_{в.ч}}; \quad \beta_{в.ч} = 8\pi n_0 T_e / H_1^2; \quad M/m > \beta_{в.ч} > 1. \quad (3.8)$$

Таким образом, магнитное поле может проникать на глубину, большую c/ω_{pe} , вплоть до c/ω_{pi} , так как $\beta_{в.ч}$ определяется из условий стабилизации (3.3) или (3.6). Ограничение скорости осцилляций электронов можно трактовать как появление эффективной частоты столкновений $\nu_{эф}$, которая не влияет, например, на дрейфово-температурную неустойчивость, но приводит к тому, что другие типы дрейфовой неустойчивости переходят в дрейфово-диссипативную неустойчивость.

Казалось бы, для объемного воздействия на дрейфовые колебания таким способом можно использовать альфвеновскую волну, в частности основную симметричную моду с полями H_ϕ и E_r . К сожалению, переменное магнитное поле н. ч.-колебаний ($\Omega \ll \omega_{Hi}$) не подходит для этого. Действительно, стабилизирующий эффект имеет место только тогда, когда магнитная силовая линия поворачивается относительно возмущения плотности, а в силу вмороженности магнитного поля в плазму возмущения плотности будут перемещаться вместе с магнитной силовой линией.

Таким образом, воздействовать на дрейфовую неустойчивость можно лишь в области скин-слоя, где силовые линии не вморожены в плазму. Для объемного воздействия на дрейфовые волны можно использовать магнитно-звуковую волну с частотой $\omega_{Hi} < \Omega < \sqrt{\omega_{Hi}\omega_{He}}$, распространяющуюся строго поперек магнитного поля. В цилиндрической геометрии такая волна распространяется по

радиусу плазмы к центру. Дисперсионное соотношение для нее можно получить следующим образом. Так как $\Omega \ll \omega_{He}$ и электроны замагничены в колебаниях, то скорость их равна $c[\mathbf{E}_{1k}\mathbf{H}_0]/H_0^2$. Из условия квазинейтральности следует, что плазма заморожена, так как при замагниченных электронах $n_{ek}/n_0 = H_{1k}/H_0 = n_{ik}/n_0$ ($\mathbf{H}_{1k} \parallel \mathbf{H}_0$). Уравнение движения для плазмы в линейном приближении

$$n_0 \partial \mathbf{v}_{ik} / \partial t = (1/c) [\mathbf{jH}] = -\nabla (H_0 H_{1k}) / 4\pi. \quad (3.9)$$

Поддействуем оператором div на обе части уравнения (3.9), тогда

$$-i\Omega \text{div} (n_0 \mathbf{v}_{ik}) = -\Delta H_0 H_{1k} / 4\pi = k_0^2 (H_0 / 4\pi) H_{1k}. \quad (3.10)$$

Однако согласно уравнению непрерывности для ионов $\text{div} (n_0 \mathbf{v}_{ik}) = = i\Omega n_{ik} = i\Omega n_e$. Подставляя последнее соотношение в (3.10), получим дисперсионное соотношение

$$\Omega = k_0 v_A. \quad (3.11)$$

Как показано в гл. 1, такое дисперсионное соотношение получается и при $\Omega < \omega_{Hi}$ для магнитно-звуковых волн. Магнитное поле волны, как и прежде, направлено вдоль оси z , вихревое электрическое поле, согласно уравнению Максвелла $\text{rot} \mathbf{E} = = -(1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t$, — вдоль оси y . Кроме того, волна создает еще электрическое поле вдоль направления своего распространения — оси x . Поле E_{1x} есть поле разделения зарядов. Различие магнитно-звуковых волн в области частот $\Omega \ll \omega_{Hi}$ и $\omega_{Hi} < \Omega < < \sqrt{\omega_{Hi} \omega_{He}}$ состоит в том, что в первой области поле $E_{1x} \ll E_{1y}$, а во второй области $E_{1x} \gg E_{1y}$. Во второй области ток электронов, текущий вдоль оси y , взаимодействуя с полем H_0 , создает силу, которая действует на плазму как целое в направлении оси x .

Исследование влияния магнитно-звуковых волн на дрейфовые колебания плазмы стимулировано тем, что, как показано в настоящее время, создание магнитно-звукового резонанса может приводить к эффективному нагреву плазмы в системах Токамак [109]. Результаты эксперимента свидетельствуют об увеличении энергетического времени жизни. Это может быть связано с эффективным нагревом. С другой стороны, энергетическое время жизни может увеличиваться за счет стабилизации магнитно-звуковой волной наиболее опасных неустойчивостей, приводящих к выносу тепла на стенки системы, например дрейфовых неустойчивостей. Возможно также одновременное действие этих факторов. Поэтому интересно провести специальное исследование влияния магнитно-звуковой волны на дрейфовые неустойчивости плазмы в диапазоне $\omega_{Hi} < \Omega < \sqrt{\omega_{Hi} \omega_{He}}$. Предполагается, что все параметры плазмы зависят только от x .

Основные физические соображения, позволяющие надеяться на эффективность стабилизации длинноволновых возмущений магнит-

но-звуковой волной, можно пояснить следующими наглядными рассуждениями. Пусть внешнее постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z . Наличие в системе дрейфовой волны приведет к тому,

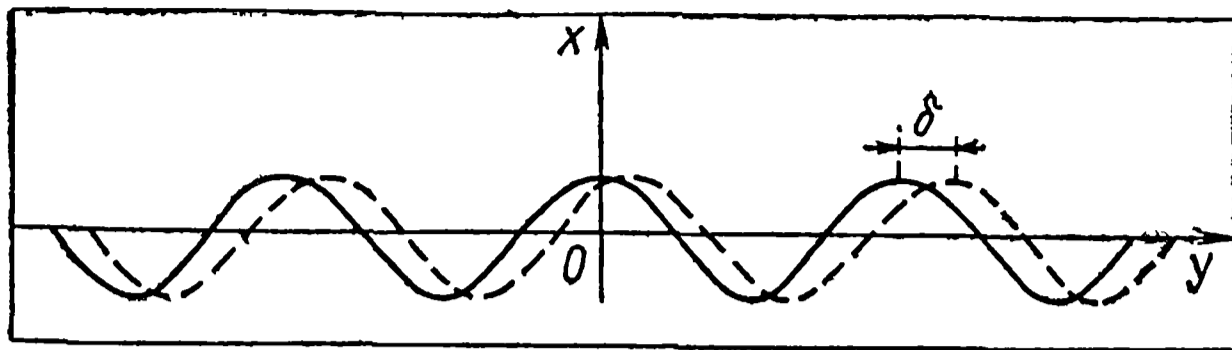


Рис. 46

что появится зависимость концентрации от y (рис. 46, сплошная линия). Распространяясь вдоль оси x , магнитно-звуковая волна создаст смещение электронов вдоль оси y (пунктирная линия). Если потенциал, возникающий в результате разделения зарядов, достаточен для искажения потенциала дрейфовой волны, влияние магнитно-звуковой волны на дрейфовую неустойчивость реально.

Рассматриваемую магнитно-звуковую волну, имеющую волновой вектор $\mathbf{k} = \{k_0, 0, 0\}$, можно представить в виде $H_1(t) = H_1 \cos(k_0 x - \Omega t)$. Электрическое поле магнитно-звуковой волны направлено вдоль оси x , поэтому при $\Omega > \omega_{Hi}$ скорость электронов определяется соотношением $\mathbf{v}_e = \mathbf{e}_y v_{ye}$; $v_{ye}(t) = (c/H_0) E_{1z}(t) = (\Omega^2/\omega_{Hi} k_0 H_0) H_1 \cos(k_0 x - \Omega t)$.

Поскольку $\omega < k_z v_{Te}$, электроны в дрейфовой волне распределены по закону Больцмана, и концентрация электронов, смещающихся под действием магнитно-звуковой волны, определится соотношением $n_e = n_0 (e/T) \varphi_{др} \exp(i\omega t)$, где $\varphi_{др}$ — потенциал дрейфовой волны. За время порядка периода колебания магнитно-звуковой волны электроны сместятся на расстояние $\delta = (\Omega/\omega_{Hi} k_0 H_0) \times H_1 \cos(k_0 x - \Omega t)$ и создадут потенциал $\varphi' = (4\pi e^2 n_0 / T) \times [\varphi_{др} \exp(i\omega t) / \varepsilon(\Omega)] \delta_{\max}^2 \cos^2(k_0 x - \Omega t)$, где $\varepsilon(\Omega)$ — диэлектрическая проницаемость среды при частоте Ω . Условие влияния магнитно-звуковой волны на дрейфовую неустойчивость $\varphi_{др} \exp(i\omega t) < [\varphi_{др} \exp(i\omega t) / r_D^2 \varepsilon(\Omega)] \delta_{\max}^2 \cos^2(k_0 x - \Omega t)$ после усреднения по частоте Ω приводит к окончательному соотношению $\delta^2 > r_D^2 \varepsilon(\Omega)$.

Дисперсионное соотношение, описывающее влияние в. ч.-поля магнитно-звуковой волны на дрейфовые неустойчивости, имеет вид [110]

$$\varepsilon(\omega) / [1 + \delta\varepsilon_e(\omega)] \delta\varepsilon_i(\omega) + (a^2/2) \varphi(\Omega) = 0, \quad (3.12)$$

где $\varepsilon(\omega) = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega) + \delta\varepsilon_i(\omega)$; $\varphi(\Omega) = (1/2) \{1/\varepsilon(\omega + \Omega) + 1/\varepsilon(\omega - \Omega)\}$; $a = (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) k_y/k_0$; $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$ — вклад в диэлектрическую проницаемость от электронов и ионов. Для универсальной дрейфовой неустойчивости, обязанной своим происхо-

ждением затуханию Ландау на электронах, критерий полной стабилизации имеет вид

$$a \geq [kr_D / \sqrt{\varphi(\Omega)}] |\eta|. \quad (3.13)$$

Поскольку $kr_D < 1$ и $\omega_{Hi} < \Omega$, условие полной стабилизации легко выполняется при $H_1/H_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ даже для малых $\varphi(\Omega)$. (В интересующей нас области частот, как показали Я. Б. Файнберг и В. Д. Шапиро [104], $\varphi(\Omega)$ положительна и может достигать 1 при $\Omega \sim \omega_{Hi}$). Столь же просто выполняется условие полной стабилизации дрейфово-температурной неустойчивости [110]:

$$H_1/H_0 \geq 5v_{Ti}/c \sqrt{\varphi(\Omega)}. \quad (3.14)$$

Сравним предлагаемый способ стабилизации со способами, описанными ранее. Критерий стабилизации универсальной дрейфовой неустойчивости, полученный в работе [104], где стабилизация осуществлялась при помощи электрического в. ч.-поля, направленного вдоль постоянного магнитного поля, имеет вид $a^* \geq \geq kr_D / \sqrt{\varphi(\Omega)}$, где $a^* = (\tilde{u}/\Omega) k_z$; \tilde{u} — осцилляторная скорость электронов в переменном электрическом поле. Пользуясь соотношением $|\text{rot H}| = H/\delta = (4\pi/c) en_0 \tilde{u}$, где σ — толщина скин-слоя, которая, вообще говоря, больше c/ω_{pe} [111] и может достигать c/ω_{pi} , получим $a^* = = (k_z c/\Omega) (H_1/H_0) (\omega_{He}/\omega_{Hi}) (c/\omega_{pe} \delta)$. Напомним, что в рассматриваемом случае $a = (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) k_y/k_0$. Для одних и тех же значений частот и амплитуд в. ч.-полей имеем $a/a^* = (\omega_{pe} \delta/c) (k_y/k_z) \times \times \Omega / \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}} > 1$. Следовательно, для достижения одинаковой степени стабилизации в магнитно-звуковой волне требуется меньшее смещение электронов поперек внешнего магнитного поля и, значит, меньшая энергия от внешних источников. Кроме того, магнитно-звуковая волна не скинируется и стабилизация происходит по всему объему. Сравним теперь полученный критерий (3.13) с условием стабилизации дрейфовых неустойчивостей магнитным в. ч.-полем (3.3).

При $\Omega > k_z v_{Te} > \omega^*$ предыдущее неравенство можно привести к виду, удобному для сравнения с (3.11): $(k_y/k_z) H_1/H_0 \geq B \gg 1$. При выполнении этого условия инкремент уменьшается в B раз. Отношение амплитуды магнитно-звуковой волны к амплитуде магнитного в. ч.-поля $H_1/H_1^* = (v_{Te}/c) \sqrt{m/M} (k_y/k_z) / B \sqrt{\varphi(\Omega)}$. Таким образом, даже для $\sqrt{\varphi(\Omega)} \sim 1/B$ с учетом того, что $k_y/k_z \ll \ll \sqrt{M/m}$, получаем $H_1/H_1^* \ll 1$.

Следует заметить, что при стабилизации магнитно-звуковой волной происходит полное подавление неустойчивости. Оценки, проведенные для дрейфово-температурной неустойчивости при одинаковой температуре электронов и ионов, показывают, что отношение амплитуд уменьшается в $(M/m)^{1/2}$ раз.

§ 3.2. Интегрирование по траекториям в в. ч.-поле

Изложим подробно задачу о взаимодействии магнитно-звуковой волны с дрейфовыми колебаниями, так как она позволяет продемонстрировать основные методы в данной области и представляет интерес для приложения. Ряд общих формул, как будет показано, применим и для других типов волн, например таких, как электронная циклотронная волна, электромагнитная волна с частотой, близкой к электронной плазменной, и т. д. Кроме того, полученные уравнения позволят исследовать также распадные и параметрические неустойчивости, когда частота внешней волны много больше частоты одной из волн, на которые распадается первоначальная волна. Рассмотрим плазму с плотностью $n_0(x)$, помещенную в постоянное внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 , которое направлено вдоль оси z . Приложим к плазме также в направлении оси z переменное магнитное поле (магнитно-звуковую волну):

$$\mathbf{H}_1(x, t) = e_z H_1 \cos(k_0 x - \Omega t), \quad (3.15)$$

где \mathbf{H}_1 , $\mathbf{k} = \{k_0, 0, 0\}$, Ω — амплитуда, волновой вектор и частота магнитно-звуковой волны. Здесь и далее полагаем $H_1 \ll H_0$. Частота магнитно-звуковой волны лежит в диапазоне $\omega_{Hi} < \Omega < (\omega_{Hi} \omega_{He})^{1/2}$, если $\omega_{pi} > (\omega_{He} \omega_{Hi})^{1/2}$. Из уравнений движения для электронов и ионов

$$d\mathbf{v}_\alpha / dt = Ze\mathbf{E}/m_\alpha + (e/m_\alpha c) [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{H}], \quad (3.16)$$

где α — сорт частиц ($\alpha = i, e$ для ионов и электронов); z — заряд; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$, найдем следующие выражения для скоростей электронов и ионов:

$$\mathbf{v}_e = (c/H_0^2) [\mathbf{E}\mathbf{H}]; \quad \mathbf{v}_i = -e\mathbf{E}/i\Omega M. \quad (3.17)$$

Используя уравнения Максвелла, получаем:

$$\begin{aligned} -\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) + k^2\mathbf{E} = & -(\omega_{pi}^2/c^2)\mathbf{E} - i(\omega_{pi}^2/\omega_{Hi}) \times \\ & \times (\Omega/c^2) [\mathbf{E}\mathbf{h}] + (\Omega/c^2)\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Проектируя (3.18) на оси x и y , получаем выражения для компонент электрического поля магнитно-звуковой волны:

$$E_x = (\Omega/\omega_{Hi}) (\Omega/k_0 c) H_1 \sin(k_0 x - \Omega t); \quad (3.19)$$

$$E_y = (\Omega/k_0 c) H_1 \cos(k_0 x - \Omega t). \quad (3.20)$$

Подставляя (3.19) и (3.20) в выражение для скоростей электронов и ионов и интегрируя по времени, получаем для электронов и ионов соответственно:

$$\left. \begin{aligned} x &= - (H_1/H_0) (1/k_0) \sin (k_0 x - \Omega t) + x_0; \\ y &= - (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) (1/k_0) \cos (k_0 x - \Omega t) + y_0; \\ z &= v_{0z} t + z_0; \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (H_1/H_0) (1/k_0) \sin (k_0 x - \Omega t) + x_0; \\ y &= - (H_1/H_0) (1/k_0) (\omega_{Hi}/\Omega) \cos (k_0 x - \Omega t) + y_0; \\ z &= v_{0z} t + z_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Из сравнения (3.21) и (3.22) видно, что для поперечного смещения заряженных частиц следует учитывать лишь смещение электронов вдоль оси y , поскольку оно в Ω/ω_{Hi} раз превышает смещение электронов и ионов вдоль оси x и в Ω^2/ω_{Hi}^2 раз — смещение ионов вдоль оси y .

Поскольку рассматриваемые дрейфовые неустойчивости являются низкочастотными ($\omega < \omega_{Hi}$), для описания поведения электронов и ионов воспользуемся кинетическим уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \{ \mathbf{E}_\Sigma + (1/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}_\Sigma] + (1/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \} \times \\ \times (e_\alpha/m_\alpha) \partial f_\alpha / \partial \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Электрическое \mathbf{E}_Σ и магнитное \mathbf{H}_Σ поля являются суммой высокочастотных $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и самосогласованных \mathbf{E}, \mathbf{H} полей: $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}$, $\mathbf{H}_\Sigma = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}$. В нулевом приближении ($\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$) кинетическое уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} + (e_\alpha/m_\alpha) \{ \mathbf{E}_1 + \\ + (1/c) [\mathbf{v} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)] \} \partial f_{\alpha 0} / \partial \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Его решение — произвольная функция характеристик

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}; \quad d\mathbf{v}/dt = (e_\alpha/m_\alpha) \{ \mathbf{E}_1 + (1/c) [\mathbf{v} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)] \}. \quad (3.25)$$

Равновесная функция $f_{\alpha 0}$ зависит от интегралов движения — постоянных, получившихся при интегрировании уравнений движения заряженной частицы в заданных полях, зависящих от времени. В рассматриваемом случае такими постоянными являются

$$x_0 = x + (H_1/H_0) (1/k_0) \sin(k_0 x - \Omega t); \quad v_{0z} = v_z.$$

Поскольку рассматривается случай $\Omega \ll \omega_{He}$, будет сохраняться также $\mu = p_\perp^2/2H$. Вторым членом в выражении для x_0 можно пренебречь, поскольку $x \gg (1/k_0) H_1/H_0 \sim x H_1/H_0$. Таким образом, равновесная функция распределения имеет вид

$$f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(x_0, v_{0z}, \mu). \quad (3.26)$$

Линеаризуем кинетическое уравнение (3.23), считая $f = f_0 + f'$:

$$\begin{aligned} & \partial f'_\alpha / \partial t + \mathbf{v} \partial f'_\alpha / \partial \mathbf{r} + (c/H_0) [\mathbf{Eh}]_x \partial f'_{\alpha 0} / \partial x + \\ & + (e_\alpha / m_\alpha) E_z \partial f'_{\alpha 0} / \partial v_{0z} + (e_\alpha / m_\alpha) \{ \mathbf{E}_{1z} + \\ & + \frac{1}{c} [\mathbf{v} (H_0 + H_1)]_z \} \partial f'_\alpha / \partial v_{0z} = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) можно переписать в виде

$$df'_\alpha / dt = - (c/H_0) [\mathbf{Eh}]_x \partial f'_{0\alpha} / \partial x - (e_\alpha / m_\alpha) E_z \partial f'_{0\alpha} / \partial v_{0z}. \quad (3.28)$$

Проинтегрировав (3.29) по времени, получим

$$f'_\alpha = \int_{-\infty}^t \{ - (c/H_0) [\mathbf{Eh}]_x \partial f'_{0\alpha} / \partial x - (e_\alpha / m_\alpha) E_z \partial f'_{0\alpha} / \partial v_{0z} \} dt'. \quad (3.29)$$

Будем считать, что колебания в плазме потенциальные, т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. В присутствии в. ч.-поля f' и Φ зависят от времени и координаты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f'(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \exp \{ -i\omega t + i(kr) + in(k_0x - \Omega t) \} dk; \\ \Phi(x, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m \exp \{ -i\omega t + i(kr) + im(k_0x - \Omega t) \} dk. \end{aligned} \right\} (3.30)$$

Пользуясь условием потенциальности и соотношениями (3.30), перепишем (3.29) в виде

$$\begin{aligned} f'_{n\alpha} &= i \int_{-\infty}^t \sum_m \Phi_m [- (e_\alpha / m_\alpha) k_z \partial f'_{0\alpha} / \partial v_{0z} - (c/H_0) k_y \partial f'_{0\alpha} / \partial x] \times \\ & \times \exp \{ i\omega(t - t') - ik(r - r') - in(k_0x - \Omega t) - im(k_0x - \\ & - \Omega t') \} dt'. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Выражения для $k(r - r')$ согласно (3.21) и (3.22) имеют для электронов и ионов следующий вид:

$$\begin{aligned} k(r - r')_e &= k_y (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) (1/k_0) \{ \cos(k_0x - \Omega t') - \\ & - \cos(k_0x - \Omega t) \} + k_z v_{0z} (t - t'); \quad k(r - r')_i = k_z v_{0z} (t - t'). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением $\exp(ip \sin \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(p) \exp is\varphi$ и интегрируя по времени, для поправок к функции распределения электронов и ионов получим следующие выражения:

$$f'_{ne} = \left(\frac{e}{m} k_z \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{0z}} - \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \right) \sum_{p, s} \frac{\Phi_p J_s(a) J_{s+n-p}(a)}{(p-s)\Omega + \omega - k_z v_{0z}}; \quad (3.32)$$

$$f'_{ni} = - \frac{(e/M) k_z \partial f_{0i} / \partial v_{0z} + (c/H_0) k_y \partial f_{0i} / \partial x}{\omega - k_z v_{0z} + n\Omega}, \quad (3.33)$$

где $a = (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) k_y/k_0$.

Используя уравнение Пуассона $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e)$, получаем бесконечную систему уравнений относительно Φ_n :

$$-\Phi_n = \delta\varepsilon_i (\omega + n\Omega) \Phi_n + \sum_{p, s} \delta\varepsilon_e [\omega + (p-s)\Omega] \times \\ \times \Phi_p J_s(a) J_{s-n+p}(a), \quad (3.34)$$

где $\delta\varepsilon_i$ и $\delta\varepsilon_e$ — парциальные вклады в диэлектрическую проницаемость от ионов и электронов. Поскольку $\omega < \omega_{Hi}$, для области частот $\Omega \gg \omega$, $k_z v_{Te}$, $\omega_{Hi} < \Omega < (\omega_{He} \omega_{Hi})^{1/2}$ $\delta\varepsilon_i$ и $\delta\varepsilon_e$ имеют следующий вид:

$$\delta\varepsilon_i(\omega) = \frac{4\pi e}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(e/M) k_z \partial f_{0i} / \partial v_{0z} - (c/H_0) k_y \partial f_{0i} / \partial x}{\omega - k_z v_{0z}} dv_{0z}; \quad (3.35)$$

$$\delta\varepsilon_e [\omega + (p-s)\Omega] = \sum_n \frac{4\pi e}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e}{m} k_z \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{0z}} - \frac{c}{H_0} k_y \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \right) \times \\ \times I_n(z_e) \exp(-z_e) \frac{dv_{0z}}{\omega - k_z v_{0z} + (p-s)\Omega + n\omega_{He}}, \quad (3.36)$$

где $z_e = k_{\perp}^2 \rho_e^2$; ρ_e — ларморовский радиус электронов; I — функция Бесселя мнимого аргумента. При определении $\delta\varepsilon_i(\omega + n\Omega)$ для $n \neq 0$ уже нельзя пользоваться дрейфовым приближением, поскольку по условию $\Omega > \omega_{Hi}$ ионы не замагничены:

$$\delta\varepsilon_i(\omega + n\Omega) = \frac{4\pi e}{Mk^2} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \frac{dv}{\omega - (kv) + n\Omega}. \quad (3.37)$$

Умножая обе части системы (3.36) на J_{n-q} и суммируя по n , получаем

$$-\Phi_0 = \delta\varepsilon_i(\omega + n\Omega) \Phi_n + \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + q\Omega)} J_{n-q} \times \\ \times [\delta\varepsilon_i(\omega) J_{-q} J_0 \Phi_0 + \delta\varepsilon_i(\omega + r\Omega) \Phi_r J_{r-q} + \\ + \delta\varepsilon_i(\omega - r\Omega) \Phi_{-r} J_{-r-q}]. \quad (3.38)$$

В рассматриваемой области частот для $kr_{De} \ll 1$ при решении данной системы учитываются только гармоники с частотами $\omega +$

+ $n\Omega$ при $n=0, \pm 1$, так как вклад от остальных мал ($\Omega \gg \omega$). Разложение функций Бесселя берется до членов порядка $O(a^2)$, где a — аргумент функции Бесселя. В этих условиях бесконечная система уравнений (3.38) сводится к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} & \Phi_0 \left[-1 - \delta\varepsilon_i(\omega) + \delta\varepsilon_i(\omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q^2 \right] + \\ & + \Phi_1 \delta\varepsilon_i(\omega - \Omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q J_{q-1} + \\ & + \Phi_1 \delta\varepsilon_i(\omega + \Omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q J_{q+1} = 0; \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_0 \delta\varepsilon_i(\omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + q\Omega)} J_{q-1} J_q + \\ & + \Phi_1 \left[-1 - \delta\varepsilon_i(\omega - \Omega) + \delta\varepsilon_i(\omega - \Omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q-1}^2 \right] + \\ & + \Phi_{-1} \delta\varepsilon_i(\omega + \Omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q+1} J_{q-1} = 0; \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_0 \delta\varepsilon_i(\omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q J_{q+1} + \\ & + \Phi_1 \delta\varepsilon_i(\omega - \Omega) \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q+1} J_{q-1} + \\ & + \Phi_{-1} \left[-1 - \delta\varepsilon_i(\omega + \Omega) + \delta\varepsilon_i(\omega + \Omega) \times \right. \\ & \left. \times \sum_q \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q+1}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Для решения данной системы воспользуемся условием $\Omega \gg \omega$, $k_z v_{Te}$; $k^2 r_D^2 \ll 1$. Систему уравнений (3.39) — (3.41) можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A_{11}\Phi_1 + A_{10}\Phi_0 + A_{1,-1}\Phi_{-1} &= 0; \\ A_{01}\Phi_1 + A_{00}\Phi_0 + A_{0,-1}\Phi_{-1} &= 0; \\ A_{-1,1}\Phi_1 + A_{-1,0}\Phi_0 + A_{-1,-1}\Phi_{-1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

где коэффициенты A_{ij} определяются из уравнений (3.39) — (3.41). Из условия разрешимости системы

$$A_{11}A_{00}A_{-1,-1} - A_{01}A_{10}A_{-1,-1} - A_{0,-1}A_{-1,0}A_{1,1} = 0$$

при указанных выше условиях получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{[1 - \delta\varepsilon_e(\omega)] \delta\varepsilon_i(\omega)} + \frac{a^2}{2} \varphi(\Omega) = 0, \quad (3.43)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \delta\varepsilon_i(\omega) + \delta\varepsilon_e(\omega); \quad (3.44)$$

$$\varphi(\Omega) = (1/2) \{1/\varepsilon(\omega + \Omega) + 1/\varepsilon(\omega - \Omega)\}. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.43) получено с точностью до $O(a^2/2)$. Как будет показано в дальнейшем, из критериев стабилизации дрейфовых неустойчивостей следует, что $a < 1$; следовательно, выбранная точность решения системы (3.42) достаточна. Отметим, что дисперсионное соотношение типа (3.43) получается также для случая стабилизации осциллирующим электрическим полем [104] и может быть использовано для исследования параметрических неустойчивостей [101]. Входящую в него величину $1/\varepsilon(\omega + \Omega) + 1/\varepsilon(\omega - \Omega)$, характеризующую диэлектрическую проницаемость плазмы на частоте Ω с волновыми векторами дрейфовых волн, необходимо при этом заменить значением, соответствующим рассматриваемой задаче [96].

§ 3.3. Универсальная дрейфовая неустойчивость

Одна из неустойчивостей такого типа, описанная в гл. 2, часто называется универсальной. Рассмотрим влияние магнитно-звуковой волны на эту неустойчивость. Предположим, что концентрация и температура зависят только от координаты x : $n_0 = n_0(x)$, $T_e = T_e(x)$, $T_i = T_i(x)$, также что $kr_D \ll 1$. Равновесная функция распределения электронов и ионов — максвелловская, нормированная на равновесную концентрацию частиц. Поскольку в соотношениях (3.35) — (3.37) уже произведено интегрирование по поперечным скоростям, $f_{0\alpha}$ в них следует подставлять в виде $f_{0\alpha} = n_0 (m_\alpha / 2\pi T_\alpha)^{1/2} \exp(-m_\alpha v_{0z}^2 / 2T_\alpha)$. В этих условиях значения $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$ определяются следующими соотношениями:

$$\delta\varepsilon_e = \frac{1}{k^2 r_D^2} \left(1 + \frac{i\sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \left\{ \omega - \omega^* \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) \right\} \right);$$

$$\delta\varepsilon_i = - \frac{1}{k^2 r_D^2} \frac{\omega^*}{\omega}, \quad (3.46)$$

где $\omega_{ei}^* = (cT_{ei}/eH_0) k_y (d \ln n_0/dx)$ — дрейфовая частота. Поскольку здесь $\delta\varepsilon_e(\omega) \gg 1$, дисперсионное соотношение (3.43) примет вид

$$1 + \delta\varepsilon_e(\omega) + \delta\varepsilon_i(\omega) + (a^2/2) \varphi(\Omega) \delta\varepsilon_e(\omega) \delta\varepsilon_i(\omega) = 0. \quad (3.47)$$

Подставив сюда выражения для $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$ их (3.46), получим дисперсионное соотношение для универсальной дрейфовой неустойчивости с учетом влияния в. ч.-поля магнитно-звуковой волны:

$$-\frac{\omega^*}{\omega} + 1 + \frac{i\sqrt{\pi}}{|k_z|v_{Te}} \left\{ \omega - \omega^* \left(1 - \frac{1}{2}\eta \right) \right\} - \frac{\omega^*}{\omega} \frac{a^2}{2} \frac{\varphi(\Omega)}{k^2 r_D^2} \times \\ \times \left[1 + \frac{i\sqrt{\pi}}{|k_z|v_{Te}} \left\{ \omega - \omega^* \left(1 - \frac{1}{2}\eta \right) \right\} \right] = 0. \quad (3.48)$$

Исследуем полученное дисперсионное соотношение. В отсутствии стабилизирующего поля, т. е. когда $H_1 = 0$, аргумент функции Бесселя $a = (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) k_y/k_0 = 0$, и дисперсионное соотношение приобретает обычный вид $\omega = \omega^* - (i\sqrt{\pi}/|k_z|v_{Te}) \omega^{*2}\eta/2$. Таким образом, неустойчивость имеет место, когда $\eta > 0$. Если амплитуда стабилизирующего поля достаточно велика, наблюдается полная стабилизация универсальной дрейфовой неустойчивости.

Порог стабилизации можно определить, полагая, что ω действительна ($\text{Im } \omega = 0$). Приравнявая отдельно действительную и мнимую части уравнения (3.48) нулю, получаем пороговые значения $\omega_{п}$ и $k_{zп}$. Приравнявая нулю действительную часть (3.48), получаем $\omega = \omega^* \{ 1 + (a^2/2) [\varphi(\Omega)/k^2 r_D^2] \}$. При полученном значении $\omega_{п}$ $\text{Im } \omega = 0$, если [110]

$$a^2 > [k^2 r_D^2 / \varphi(\Omega)] |\eta|. \quad (3.49)$$

Полученное неравенство (3.49) и есть условие стабилизации универсальной дрейфовой неустойчивости. Величина $\varphi(\Omega)$ полагается больше нуля; в § 3.6 указана область частот, для которой это допущение справедливо.

§ 3.4. Дрейфово-температурная неустойчивость

Как известно (см. гл. 2), эта неустойчивость возникает из-за затухания Ландау на ионах при

$$\eta = d \ln T_i / d \ln n_0 > 0.$$

Спектр неустойчивых колебаний при этом оказывается расположенным в области частот $\omega \approx k_z v_{Ti} \ll k_z v_{Te}$. В этих условиях электроны распределены по закону Больцмана: $n_e = n_0 e^{\Phi/T}$, и их вклад в диэлектрическую проницаемость определяется простым соотношением

$$\delta\varepsilon_e = -4\pi e^2 n_0 / k^2 T_e. \quad (3.50)$$

Пользуясь соотношением (3.35) с учетом ионного вычета, имеем

$$\delta\varepsilon_i = \frac{4\pi e}{k^2} \mathcal{P} \int \frac{\left\{ \omega^* \left[1 + \left(v_{0z}^2 / v_{Ti}^2 \right) \eta - (1/2) \eta \right] - k_z v_{0z} \right\}}{-\omega + k_z v_{0z}} f_{0i} dv_{0z} + \\ + i\pi \frac{f_{0i}(\omega/k)}{|k_z|} \left\{ \omega^* \left[1 - \frac{1}{2} \eta + \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2} \eta \right] - \omega \right\}. \quad (3.51)$$

где $\mathcal{P} \int$ — интеграл в смысле главного значения.

Подставляя полученные выражения для $\delta \varepsilon_e$ и $\delta \varepsilon_i$ в соотношение (3.43), получаем дисперсионное соотношение для дрейфово-температурной неустойчивости с учетом влияния в. ч.-поля магнитно-звуковой волны [110]:

$$1 = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} + \frac{A}{k^2 r_{Di}^2} \mathcal{P} \int \frac{\omega^* [1 - (1/2) \eta + (v_{0z}^2 / v_{Ti}^2) \eta] - k_z v_{0z}}{-\omega + k_z v_{0z}} \times \\ \times f_{0i} dv_{0z} + i\pi \frac{f_{0i}(\omega/k_z)}{|k_z|} \{ \omega^* [1 - (1/2) \eta + (\omega^2/k_s^2 v_{0z}^2) \eta] - \omega \}, \quad (3.52)$$

где $A = 1 + (a^2/2) \varphi(\Omega)/k^2 r_{De}^2$.

Приравнивая по отдельности действительную и мнимую части уравнения нулю, находим критерий неустойчивости по η . Значения $k_{zп}$ и $\omega_{п}$ на границе устойчивости определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{п} &= \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{r_{i\omega_i^*}} \left(1 + \frac{B}{A} \right); & k_{zп}^2 &= \frac{A}{B} \frac{(\eta/2 - 1)}{(1 + B/A)} \eta \frac{\omega_i^{*2}}{v_{Ti}^2}; \\ B &= k^2 r_{Di}^2 \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Условием неустойчивости является $k_{zп}^2 > 0$. В случае отсутствия стабилизирующего в. ч.-поля магнитно-звуковой волны, т. е. когда $H_1 = 0$, $A = 1 + (a^2/2) \varphi(\Omega) k^2 r_D^2$ обращается в единицу, $B = k^2 r_{Di}^2 + T_e/T_i$ при $T_e \sim T_i$ также порядка единицы. Тогда из выражения для $k_{zп}$ видно, что это условие выполняется при $\eta < 0$ или $\eta > 2$, т. е. неустойчивость остается при любых значениях A . Однако, как нетрудно видеть из соотношений (3.51), (3.52), $\omega/k_z v_{Ti} \sim A$. Это значит, что при увеличении амплитуды в.ч.-поля магнитно-звуковой волны фазовая скорость может стать большой по сравнению с тепловой скоростью ионов v_{Ti} . Условие $\omega \sim k_z v_{Ti}$ перестает выполняться, и дрейфово-температурная неустойчивость переходит в универсальную дрейфовую. Универсальная дрейфовая неустойчивость, как показано выше, подавляется магнитно-звуковой волной. Для этого учтем теперь электронный вычет и найдем, при каких A пренебрежение им становится некорректным. С учетом электронного вычета уравнение (3.52) приобретает вид

$$\frac{1}{k^2 r_{De}^2} \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \left\{ \omega - \omega_e^* \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) \right\} + (A - 1) \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \times \\ \times \left\{ \omega + \omega_e^* \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) \right\} \mathcal{P} \int \frac{\{ \omega^* [1 - (1/2) \eta + (v_{0z}^2 / v_{Ti}^2) \eta] - k_z v_{0z} \}}{\omega - k_z v_{0z}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{f_{0i}}{n_0} dv_{0z} + \frac{A}{k^2 r_{Di}^2} \frac{1}{|k_z| v_{Ti}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}\right) \times \\ & \times \left\{ \omega_i^* \left(1 - \frac{1}{2} \eta + \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2} \eta\right) - \omega \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Значит предположение о том, что электронный вычит мал по сравнению с ионным, справедливо, если выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5A^2} \left(\frac{m}{M} \frac{T_i^3}{T_e^3}\right)^{1/2} \left\{ \left[\frac{A^2}{2B(A+B)} \right]^{1/2} - \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{B}{A+B}\right)^{1/2} \right\} \times \\ & \times \exp\left\{ (A+B) \frac{\eta-2}{2B\eta} \right\} < \frac{A+B}{2B} \left(\frac{\eta-2}{\eta}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Из неравенства (3.55) следует, что при увеличении A левая часть неравенства может превысить правую, и неравенство нарушится. Это значит, что при больших A дрейфово-температурная неустойчивость переходит в универсальную дрейфовую. Оказывается, что условие перехода дрейфово-температурной неустойчивости в универсальную дрейфовую более жесткое, чем критерий стабилизации универсальной дрейфовой неустойчивости, поэтому оно и определяет амплитуду и частоту магнитно-звуковой волны, стабилизирующей дрейфово-температурную неустойчивость [110]:

$$H_1/H_0 \geq 5v_{Ti}/c \sqrt{\varphi(\Omega)}. \quad (3.56)$$

Возбуждение дрейфово-температурной неустойчивости при наличии градиентов плотности и температуры не обязательно связано с мнимыми членами дисперсионного уравнения (3.52). Так, в случае пренебрежения мнимыми членами в уравнении (3.52) при $\eta = d \ln T / d \ln n_0$ получаем $\omega^3 = -\omega^* (k_z^2 T_i / 2M) (1 + \eta)$. Один из трех корней имеет положительную мнимую добавку, что соответствует неустойчивости. Неустойчивость имеет место при $\eta < -5/3$. Учет влияния в.ч.-поля магнитно-звуковой волны приводит к дисперсионному соотношению

$$1 + \left\{ \frac{\omega^*}{\omega} - \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2} + \frac{\omega^*}{\omega^3} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{2} (1 + \eta) \right\} \left(1 + \frac{a^2}{2} \frac{\varphi(\Omega)}{k^2 r_D^2} \right) = 0.$$

Условие развития неустойчивости в данном случае имеет вид

$$\eta < -(1 + A); \quad A = 1 + (a^2/2) \varphi(\Omega)/k^2 r_D^2. \quad (3.57)$$

При больших A такое условие в реальных установках не выполняется.

§ 3.5. Дрейфово-диссипативная неустойчивость

Одной из наиболее точно идентифицированных неустойчивостей является дрейфово-диссипативная неустойчивость, которая наблюдалась при магнитном удержании плазмы в установках с плазмой щелочных металлов, называемых также Q-машинами.

Рассмотрим влияние магнитно-звуковой волны на дрейфово-диссипативную неустойчивость. Предполагаем, что в плазме имеется градиент плотности $n = n(x)$. Пусть длина пробега электронов $\lambda_e \sim v_{Te} \nu_e$ значительно меньше продольной длины волны λ_{\parallel} , а длина свободного пробега ионов λ_i больше размера неоднородности $a = \kappa^{-1} = [(1/n_0)dn_0/dx]^{-1}$. В этих условиях столкновениями ионов можно пренебречь и рассматривать только столкновения электронов. Здесь, как и ранее, будем предполагать, что $kr_{De} \ll 1$, и пользоваться дисперсионным соотношением (3.43). Для определения малой поправки к функции распределения электронов воспользуемся дрейфово-кинетическим уравнением в форме Батнагара — Гросса — Крука [112]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{c}{H_0^2} ([\mathbf{H}\nabla\Phi] \nabla) f + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = \text{St}(f); \\ \text{St}(f) = -\nu_e f + \nu_e (f_0/n_0) \int f dv_z, \end{aligned} \right\} (3.58)$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_e(\omega + n\Omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2} \sum_n \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega^*}{k_z v_{Te}} Y\left(\frac{n\Omega + \omega + i\nu}{k_z v_{Te}}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{i\nu}{k_z v_{Te}} Y\left(\frac{n\Omega + \omega + i\nu}{k_z v_{Te}}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где $Y(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2) dx}{z - x + i\nu}$; ν_e — частота столкновений элек-

тронов с ионами. С учетом «конечности» ларморовского радиуса вклад в диэлектрическую проницаемость от ионов имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_i(\omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2} \left\{ 1 - \frac{e}{M} \left(\frac{k_y}{\omega_{Hi}} \frac{\partial n_0}{\partial x} - \frac{M}{T} \omega \right) \times \right. \\ \left. \times A(\rho_i) \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{0z} \exp\left(-\frac{Mv_{0z}^2}{2T_i}\right) \frac{1}{k_z v_{0z} - \omega} \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Здесь $A(\rho_i) = I_0(k_{\perp}^2 \rho_i^2) \exp(-k_{\perp}^2 \rho_i^2)$. Для $\delta\varepsilon_i(\omega + n\Omega)$ при $n \neq 0$ справедлива формула (3.37), поскольку $\Omega > \omega_{Hi}$.

Предположим, что $\nu_e \gg \omega$, $\nu_e > k_z v_{Te}$ (как известно, k_z в дрейфовых волнах весьма мало), и рассмотрим частотную область

в диапазоне $k_z v_{Ti} < \omega < k_z v_{Te}$. Пользуясь разложением функции Крампа в ряд при больших значениях аргумента $Y(z) = 1/z + 1/2z^3 + \dots$, можно записать упрощенное выражение для $\delta\varepsilon_e(\omega)$:

$$\delta\varepsilon_e(\omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2} \frac{k_z^2 T/m v_e + i\omega^*}{-i\omega + k_z^2 T/m v_e}. \quad (3.61)$$

Вычислив $\delta\varepsilon_i(\omega)$ при $k_z v_{Ti} < \omega$, получим

$$\delta\varepsilon_i(\omega) = (1/k^2 r_D^2) [A(\rho_i) (\omega - \omega^*) \omega - 1]. \quad (3.62)$$

Подставляя $\delta\varepsilon_i(\omega)$ и $\delta\varepsilon_e(\omega)$ в соотношение (3.43), получаем дисперсионное соотношение для дрейфово-диссипативной неустойчивости с учетом влияния в.ч.-поля магнитно-звуковой волны:

$$A(\rho_i) \frac{\omega - \omega^*}{\omega} - 1 + \frac{i\omega^* + k_z^2 T/m v_e}{-i\omega + k_z^2 T/m v_e} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\varphi(\Omega)}{k^2 r_D^2} \left[A(\rho_i) \frac{\omega - \omega^*}{\omega} - 1 \right] \left[\frac{i\omega^* + k_z^2 T/m v_e}{-i\omega + k_z^2 T/m v_e} \right] = 0. \quad (3.63)$$

Когда напряженность стабилизирующего поля магнитно-звуковой волны $H_1 = 0$, имеем обычную дрейфово-диссипативную неустойчивость [113], инкремент которой равен $\gamma_{\max} = k c_s$. В другом предельном случае, когда H_1 настолько велико, что можно пренебречь первыми двумя слагаемыми дисперсионного соотношения (3.63), неустойчивость исчезает, так как ω всегда действительна.

Перепишем уравнение (3.63) в виде

$$\omega^2 + \omega \left[i\omega_s \frac{(\rho_i^2/2) [1 + \beta + 1/(1-A)]}{1 + \beta \rho_i^2/2} - \frac{\beta}{1 + \beta} \omega_e \left(1 + \frac{\beta \rho_i^2}{2} \right) \right] + i\omega_s \omega_e \frac{\rho_i^2/2}{1-A} - \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \omega_e^2 (1 + \beta \rho_i^2/2) = 0, \quad (3.64)$$

$$\text{где } \omega_s = \frac{k_z^2}{k_2} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{v_e} (1 + \beta \rho_i^2/2); \quad \omega_e = \omega^* \frac{1 + \beta}{1 + \beta \rho_i^2/2}.$$

Из соотношения (3.64) следует, что $\beta = (\alpha^2/2) \varphi(\Omega)/k^2 r_D^2$;

$$\text{Im}(\omega) = \pm \frac{\omega_s}{2} \frac{\rho_i^2/2 [1 + \beta + 1/(1-A)]}{1 + \beta \rho_i^2/2} \pm \left\{ \frac{(C^2 + D^2)^{1/2} - C}{2} \right\}^{1/2}, \quad (3.65)$$

где

$$C = -\frac{\omega_s^2}{4} \frac{\rho_i^4}{4} \frac{[1 + \beta + 1/(1 - A)]^2}{1 + \beta \rho_i^2 / 2} + \omega_e^2 \frac{(1 + \beta \rho_i^2 / 2)}{(1 + \beta)^2} \times$$

$$\times \left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{1 - A} \right); \quad (3.66)$$

$$D = -\frac{\omega_e \omega_s}{2} \beta \frac{\rho_i^2 / 2 [1 + \beta + 1/(1 + A)]^2}{(1 + \beta)} - \omega_e \omega_s \frac{\rho_i^2 / 2}{1 - A}. \quad (3.67)$$

Условием устойчивости системы относительно колебаний является $\text{Im}(\omega) < 0$.

Рассмотрим случай, когда $\rho_i \rightarrow 0$, тогда $A = I_0(z_i) \exp(-z_i) = (1 - z_i)$; $z_i = \beta \rho_i^2 / 2$. Кроме того, будем полагать, что β достаточно велико, так что выполняется неравенство

$$1 \ll \beta \rho_i^2 \ll \rho_i^2, \quad (3.68)$$

и решение (3.65) можно разложить по степеням параметра $2/\beta \rho_i^2$. При выводе дисперсионного соотношения было сделано предположение о том, что параметр $a = (H_1/H_0) (\Omega/\omega_{Hi}) k_y/k_0$ мал. Указанное ограничение на β не противоречит этому предположению, так как вытекающее из (3.68) условие

$$a^2 \varphi(\Omega) \gg \omega_{Hi}^2 / \omega_{pi}^2 \quad (3.69)$$

может выполняться и при $a \ll 1$, поскольку $\omega_{Hi} / \omega_{pi}$ — малый параметр.

Произведя указанные разложения в соотношении (3.65), получим

$$\text{Im}(\omega)_- = -i\omega_s \left\{ 1 - \frac{2}{\beta \rho_i^2} \frac{\omega_e^2}{\omega_s^2 + \omega_e^2 (\beta \rho_i^2 / 2)^2} \right\}; \quad (3.70)$$

$$\text{Im}(\omega)_+ = -i\omega_s \frac{2}{\beta \rho_i^2} \frac{\omega_e^2}{\omega_s^2 + \omega_e^2 (\beta \rho_i^2 / 2)^2}. \quad (3.71)$$

При $\beta \rho_i^2 \gg 1$ второе слагаемое в (3.70) мало, и в случае $\varphi(\Omega) > 0$ [104] для обеих корней $\text{Im}(\omega) < 0$, что соответствует устойчивости.

Таким образом, дрейфово-диссипативная неустойчивость также может быть стабилизирована в ч.-полем магнитно-звуковой волны, однако критерий стабилизации несколько более жесткий, чем в случае бесстолкновительной плазмы [114].

§ 3.6. Обсуждение результатов по стабилизации магнитно-звуковыми волнами

Выше показано, что если смещение электронов поперек внешнего магнитного поля в несколько раз больше $r_D/\sqrt{\varphi(\Omega)}$, то дрейфовые неустойчивости можно стабилизировать. При этом считалось, что $\varphi(\Omega) > 0$. Пренебрегая ω и $k_z v_{Te}$ по сравнению с частотой магнитно-звуковой волны Ω , получаем

$$\varepsilon(\Omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega \omega_{He}} \frac{k_y x}{k^2} - \frac{\omega_{pe}^2 k_z^2}{k^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega^2}. \quad (3.72)$$

Тогда выражение для $\varphi(\Omega)$ принимает вид [104]

$$\varphi(\Omega) = \frac{\Omega^2 \{N\Omega^2 - \omega_{pe}^2 k_{\perp}^2 / k^2 - \omega_{pi}^2\}}{\{N\Omega^2 - \omega_{pe}^2 k_{\perp}^2 / k^2 - \omega_{pi}^2\}^2 - \Omega^2 (\omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2) k_y^2 x^2 / k^4}, \quad (3.73)$$

где $N = 1 + (\omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2) k_{\perp}^2 / k^2$.

Из выражения (3.73) следует, что $\varphi(\Omega) > 0$ для [104]

$$\Omega_- < \Omega < (1/\sqrt{N}) (\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2};$$

$$\begin{aligned} \Omega_-^2 = & (1/N^2) [N (\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2 + \omega_{pi}^2) + (\omega_{pe}^4 / 2\omega_{He}^2) k_y^2 x^2 / k^4 - \\ & - \{[N (\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2 + \omega_{pi}^2) + (\omega_{pe}^4 / 2\omega_{He}^2) k_y^2 x^2 / k^4]^2 - \\ & - N^2 (\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2 + \omega_{pi}^2)^2\}^{1/2}]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Из выражения (3.74) видно, что для стабилизирующей частоты $\omega_{Hi} < \Omega < (\omega_{Hi} \omega_{He})^{1/2}$ $\varphi(\Omega)$ положительна. При $\Omega = (\omega_{He} \omega_{Hi})^{1/2}$ диэлектрическая проницаемость на частоте магнитно-звуковой волны $\varphi(\Omega) = 0$. В другом предельном случае, когда $\Omega = \omega_{Hi}$, $\varphi(\Omega) = \infty$. Для промежуточных значений $\Omega = k\omega_{Hi}$, где $1 < R < 40$ (для водородной плазмы), $\varphi(\Omega)$ можно определить из приближенного выражения

$$\varphi(\Omega) = \frac{R^2 \omega_{Hi}^2}{\omega_{pi}^2} \frac{[R^2 m/M - 1]}{[R^2 m/M - 1]^2 - R^2}. \quad (3.75)$$

Здесь предполагается, что $\omega_{pe} > \omega_{He}$.

Таким образом, соответствующий выбор Ω может существенно облегчить условия стабилизации.

На основании расчетов, приведенных в § 3.5, оценим частоту и амплитуду стабилизирующего поля магнитно-звуковой волны для обычных параметров Q-машины, если $H \approx 1$ кЭ, длина установки $L = 100$ см, плотность плазмы до 10^{11} см⁻³, температура 0,1 эВ, частота кулоновских столкновений 10^7 см⁻¹. Максимальная частота магнитно-звуковых колебаний, определяемая соотношением $\Omega =$

$= (\omega_{H_i} \omega_{H_e})^{1/2}$, составляет при указанных параметрах системы $6 \cdot 10^7$ с⁻¹. Чтобы магнитно-звуковая волна могла поместиться в системе, должно выполняться соотношение $c/\omega_{pe} < r$, где $r = 2$ см — радиус плазменного столба. Для определения $\varphi(\Omega)$ воспользуемся соотношением (3.73). При $k_z = 2\pi/L$, $k \approx k_y \approx 1/\rho_i$, $m = 4$ [68] и $\Omega > \nu_e$ получаем $\varphi(\Omega) \approx 0,005$. Подставляя полученное значение $\varphi(\Omega)$ в критерий стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости (3.69), получаем

$$H_1/H_0 \approx 10^{-3}. \quad (3.76)$$

Это соотношение получено для наиболее опасной в Q-машинах четвертой моды неустойчивых колебаний; более низкие моды можно стабилизировать еще более слабыми полями магнитно-звуковой волны.

Такого же порядка оценка получается для амплитуды магнитно-звуковой волны, стабилизирующей дрейфовую неустойчивость на установках типа Токамак с магнитно-звуковым нагревом [109]. В этом случае существует магнитно-звуковой резонанс на частоте $\Omega \approx v_A/r$, где r — малый радиус системы. Напряженность магнитного поля составляла порядка 15 кЭ, рабочим газом был водород, так что при радиусе камеры $r \approx 8$ см выполнялось неравенство $\omega_{H_i} < \Omega < (\omega_{H_i} \omega_{H_e})^{1/2}$.

Как показали измерения, добротность составляла порядка 10, что могло быть связано с возбуждением параметрической неустойчивости и нагревом плазмы. Поскольку $H_1 \approx 20-25$ Э, одновременно могла происходить стабилизация дрейфово-диссипативной неустойчивости. Окончательный ответ на вопрос, что является причиной увеличения температуры плазмы — возбуждение параметрических неустойчивостей или стабилизация дрейфовых неустойчивостей, а следовательно, уменьшение теплопроводности — может дать тщательное измерение спектров шумов плазмы. Возможно, что оба эти процесса происходят одновременно, и их роль можно установить только при проведении дальнейших экспериментов.

§ 3.7. Параметрические или распадные неустойчивости

Дисперсионное соотношение (3.43) справедливо не только в случае, когда внешняя волна магнитно-звуковая, но и во всех случаях, когда электроны осциллируют под действием внешнего в. ч.-поля, а частота $\Omega \gg \max\{\omega, k_z v_{Te}\}$ и $k^2 r_{De}^2 \ll 1$. Величину a , входящую в дисперсионное соотношение, в общем случае можно представить в виде $a = (k r_0)$, где r_0 есть амплитуда смещения под действием в. ч.-поля. Волновые числа при этом относятся к н. ч.-волне, которую подавляло в. ч.-поле. Так как при расчетах в. ч.-поле считалось однородным, формула (3.43) применима, если волновой вектор в. ч.-волны k_0 мал по сравнению с волновыми векторами дрейфовых волн. Такое условие выполняется обычно довольно легко,

поскольку, как правило, непотенциальные волны много длиннее потенциальных. Например, в условиях магнитно-звукового резонанса длина в. ч.-волны порядка размеров плазмы, в то время как дрейфовые волны, по определению, много короче. Таким образом, дисперсионное соотношение (3.43) можно использовать для изучения распада непотенциальной в. ч.-волны на потенциальные. Сам характер вывода уравнения (3.43) предполагает изучение устойчивости плазмы в области частот $\omega \ll \Omega$, находящейся в в. ч.-поле. Поэтому одна из потенциальных волн, на которые распадается первоначальная волна, должна быть низкочастотной. Вторая же волна согласно законам сохранения при распадах (3.2) должна иметь частоту, примерно равную Ω , точнее, равную $\Omega \pm \omega$. Если такое собственное колебание с частотой $\Omega \pm \omega$ и волновым вектором $\mathbf{k} = -\mathbf{k}_1$ (\mathbf{k}_1 — волновой вектор н. ч.-волны) существует, то формально это означает, что или $\varepsilon(\Omega + \omega)$, или $\varepsilon(\Omega - \omega)$ обратится в нуль [см. (3.35) и (3.37)], так как $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$ представляет собой дисперсионное соотношение. Действительно, если исследовать плазму без магнитного поля, запуская в нее волну с частотой, немного большей ω_{pe} , то согласно формуле (3.37)

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) = & 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})} + \\ & + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Если рассматривать собственные колебания с частотой много меньшей ленгмюровской при $T_e \gg T_i$, то

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pi}^2 / \omega^2 + 1 / k^2 r_{De}^2. \quad (3.78)$$

Равенство нулю $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ позволит найти дисперсионное соотношение для ионно-звуковых колебаний, частота которых при $k^2 r_{De}^2 \ll \ll 1$ $\omega = kc_s$. Таким образом, можно поставить вопрос о возбуждении ионно-звуковых колебаний в. ч.-волны, частота которой удовлетворяет условию $0 < \Omega - \omega_{pe} \ll \omega_{pe}$. Именно так ставилась задача в работе [101]. Получим дисперсионное соотношение и инкремент неустойчивости для этого случая, переписав уравнение (3.43) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \omega_{pi}^2 / \omega^2 + 1 / k^2 r_{De}^2}{(1 + 1 / k^2 r_{De}^2) (-\omega_{pi}^2 / \omega^2)} + \frac{a}{4} \left\{ \frac{1}{1 - \omega_{pe}^2 / (\Omega + \omega)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 - \omega_{pe}^2 / (\Omega - \omega)^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Здесь $a = k (eE_0 / m\Omega^2) \ll 1$, а все мнимые добавки к $\varepsilon(\omega)$ и $\varepsilon(\omega \pm \Omega)$ опущены. Выражение в фигурных скобках можно разло-

жить, учитывая, что $\Omega = \omega_{pe} + \Delta$, где Δ — расстройка. Тогда вместо (3.79) получим при $k^2 r_{De} \ll 1$

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_s^2 - (a^2/4) \omega_{pi} \omega_{pe} \Delta / (\Delta^2 - \omega^2) &= 0; \\ \omega_s &= \omega_{pi} k r_{De} = k c_s. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Решим уравнение (3.80) методом последовательных приближений, разлагая по $a^2 \ll 1$. Тогда в нулевом приближении имеем $\omega = \omega_s$. Далее, подставляя в (3.80) $\omega = \omega_s + \delta$, получаем

$$\omega_s 2\delta = (a^2/4) \omega_{pi}^2 \omega_{pe} \Delta / (\Delta^2 - \omega_s^2 - 2\delta\omega_s).$$

Из последнего уравнения следует, что поправка к частоте δ максимальна в том случае, если $\Delta = \omega_s$, т. е. при выполнении распадных условий $\Omega = \omega_{pe} + \omega_s$. Полагая $\Delta = \omega_s$, получим

$$\delta = \pm (a/4) (\omega_{pi} / \omega_s) \sqrt{\omega_{pe} \omega_s}.$$

Подставляя значение $a = (eE_1/m\Omega^2) k \approx (eE_1/m\omega_{pe}) k$, получаем

$$\gamma = (1/4) \sqrt{\omega_s \omega_{pe}} \sqrt{E_1^2 / (4\pi n_0 T_e)}, \quad (3.81)$$

где $\omega_s = \omega_{pi} k r_{De} = k c_s$, а k определяется из равенства $\Omega - \omega_{pe} = k c_s$.

Если учесть слабое затухание ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний, можно определить пороговое значение амплитуды в.ч.-волны E_0 , при котором начинает возбуждаться неустойчивость. Формально такой учет сводится к тому, что в выражения $\varepsilon(\omega)$ и $\varepsilon(\omega \pm \Omega)$ вводят соответствующие мнимые поправки из-за затухания Ландау. Точный расчет порогов довольно прост, хотя и громоздок [97]. При этом оказывается, что $E^2 / (4\pi n_0 T) \sim \sqrt{m/M}$ [115].

Отметим, что формулы (3.43) — (3.45) можно использовать для исследования еще одного весьма важного случая, а именно распада непотенциальной электронно-циклотронной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, на ионно-звуковую и потенциальную волны с частотой вблизи ω_{He} .

Рассмотрим сначала случай, когда частота непотенциальной волны много больше ионной циклотронной, но много меньше ω_{He} , причем k_z не слишком мала. Будем считать ионы неподвижными и рассмотрим волны с фазовыми скоростями, намного превышающими тепловые скорости заряженных частиц. Тогда для получения дисперсионного соотношения можно использовать уравнения гидродинамики. Поскольку $\omega \ll \omega_{He}$, из уравнения имеем

$$\mathbf{E}_1 + (1/c) [\mathbf{v}_{e1} \mathbf{H}_0] = 0, \quad (3.82)$$

где \mathbf{E}_1 — амплитуда в.ч.-волны. Уравнения Максвелла в линеаризованном виде записываются следующим образом:

$$i[\mathbf{kH}_1] = -(4\pi/c) en_0 \mathbf{v}_{e1}; \quad i[\mathbf{kE}_1] = (1/c) i\omega \mathbf{H}_1. \quad (3.83)$$

Будем рассматривать квазинейтральные колебания. Тогда в силу того, что $n_i \equiv n_0$, плотность электронов также будет постоянной, т. е. электронная жидкость оказывается несжимаемой ($\partial n_e / \partial t = 0$). Согласно уравнению непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{v}_{e1} = 0$. Подставляя выражение для \mathbf{E}_1 из (3.82) во второе уравнение (3.83), получаем

$$i\omega \mathbf{H}_1 = i(\mathbf{H}_0 \mathbf{k}) \mathbf{v}_{e1}. \quad (3.84)$$

Из уравнений (3.83) и (3.84) можно исключить \mathbf{v}_{e1} :

$$i[\mathbf{k} \mathbf{H}_1] = (\omega_{pe}^2 / c^2 \omega_{He}) (\omega / k_z) \mathbf{H}_1. \quad (3.85)$$

Умножая последнее уравнение векторно на \mathbf{k} и используя соотношение $(\mathbf{k} \mathbf{H}_1) = 0$, получаем

$$-ik^2 \mathbf{H}_1 = (\omega_{pe}^2 / c^2 \omega_{He}) (\omega / k_z) [\mathbf{k} \mathbf{H}_1]. \quad (3.86)$$

Из векторных уравнений (3.85) и (3.86) можно получить дисперсионное соотношение, подставив, например, \mathbf{H}_1 из (3.85) в (3.86). В результате запишем

$$\omega^2 = [(k_z k c^2 / \omega_{pe}) \omega_{He}]^2. \quad (3.87)$$

Для выполнения соотношения $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}$ необходимо, чтобы

$$\omega_{pi} / c \ll k \ll \omega_{pe} / c \quad \text{при} \quad k_z \sim k. \quad (3.88)$$

Нетрудно видеть, что волна с дисперсионным соотношением (3.87) будет иметь круговую поляризацию. Подставляя (3.87) в соотношение (3.85), получаем $i[\mathbf{k} \mathbf{H}_1] = k \mathbf{H}_1$, и для распространения вдоль постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$ получим $[(\mathbf{k} \mathbf{H}_1) = 0] \quad H_{1x} = -i H_{1y}$.

Для определения направления вращения выпишем действительные компоненты полей: $H_{1y} \sim \operatorname{Re} \exp(-i\omega t) = \cos \omega t$; $H_{1x} \sim \sim \operatorname{Re}[-i \exp(-i\omega t)] = -\sin \omega t$. Отсюда $\operatorname{tg} \varphi = H_{1x} / H_{1y} = -\operatorname{tg} \omega t$, т. е. $\varphi = -\omega t$. Таким образом, магнитное поле волны \mathbf{H}_1 вращается в направлении вращения электрона в магнитном поле. Траекторию движения электрона в волне можно найти, воспользовавшись уравнением (3.84). В результате получим, что электрон в волне вращается по окружности в направлении вращения электрона, имеющего некоторую поперечную скорость, в постоянном магнитном поле \mathbf{H}_0 .

Волну, описываемую дисперсионным соотношением (3.87), называют *геликоном* или *свистящим атмосфериком* (whistler); она распространяется в бесстолкновительной плазме, не затухая. Однако если частота волны ω начнет приближаться к циклотронной частоте электрона, то в принципе не исключено, что волна начнет сильно затухать из-за резонанса. Этот эффект, который будет обсуждаться подробно в следующей главе, используется в физике плазмы для нагрева электронов в ч.-полями. Здесь же рассмотрим распадную неустойчивость, которая может иметь место в этом слу-

чае. Рассмотрим случай, когда волна с частотой $\Omega \approx \omega_{He}$ распространяется вдоль постоянного магнитного поля, и найдем смещение электрона в такой волне, если амплитуда волны E_1 задана и волна имеет круговую поляризацию ($E_{1x} = -iE_{1y}$). В уравнении движения при этом уже нельзя пренебрегать инерцией электронов, поэтому вместо соотношения (3.82) имеем

$$-i\Omega m \mathbf{v}_{e1} = -e\mathbf{E}_1 - (e/c) [\mathbf{v}_{e1} H_0]. \quad (3.89)$$

Вводя величины $v_{e1} = v_{e1x} - iv_{e1y}$, $E_1 = E_{1x} - iE_{1y}$, $H_1 = H_{1x} - iH_{1y}$, получим из уравнения (3.89)

$$v_{e1} = eE_1 / [im(\Omega - \omega_{He})]. \quad (3.90)$$

Уравнения Максвелла с учетом тока смещения можно записать, исключив \mathbf{H} , в виде $[(kE_1) = 0]$

$$k^2 E_1 = (\Omega^2 / c^2) E_1 - (4\pi/c) i\Omega e n_0 v_{e1}.$$

Подставляя сюда выражение для скорости (3.90), получаем

$$k^2 c^2 / \Omega^2 = 1 - \omega_{pe}^2 / [\Omega (\Omega - \omega_{He})]. \quad (3.91)$$

Если $\Omega \ll \omega_{He}$, получаем дисперсионное соотношение для геликона, распространяющегося вдоль магнитного поля. Из дисперсионного соотношения (3.91) также следует, что волна может распространяться в случае, когда $\Omega \leq \omega_{He}$. Поэтому такие волны обычно вводятся в пробкотрон из области максимального поля и в какой-то точке системы попадают в область, где отдают энергию электронам плазмы. Поскольку $\Omega \leq \omega_{He}$, а $|\Omega - \omega_{He}| \ll \omega_{He}$, дисперсионное соотношение (3.91) принимает вид

$$k^2 c^2 / \Omega^2 = \omega_{pe}^2 / [\Omega (\omega_{He} - \Omega)]. \quad (3.92)$$

Посмотрим, на какие потенциальные волны может распасться найденная электромагнитная волна. Н. ч.-колебанием может быть ионно-звуковая волна. Что касается потенциального в. ч.-колебания, то исследуем, как изменится собственная частота ленгмюровских колебаний в магнитном поле. Воспользуемся гидродинамическим приближением. Для определения возмущения скорости электронов необходимо решить уравнение движения

$$-i\omega m \mathbf{v}_{ek} = -e\mathbf{E}_k - (e/c) [\mathbf{v}_{ek} H_0] \quad (3.93)$$

(такие уравнения решали в гл. 1). Решение запишется в виде

$$\mathbf{v}_{ek} = -i \frac{e\omega}{m(\omega^2 - \omega_{He}^2)} \left[\mathbf{E}_k - \frac{\omega_{He}^2}{\omega^2} \mathbf{h} (\mathbf{E}_k \mathbf{h}) \right] - \frac{e}{m} \frac{[\mathbf{E}_k \mathbf{h}] \omega_{He}}{\omega^2 - \omega_{He}^2}, \quad (3.94)$$

где \mathbf{h} — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. Пользуясь уравнением непрерывности, получаем $n_{ek} = (k\mathbf{v}_{ek})/\omega$. Подставляя результат в уравнение Пуассона, имеем окончательно

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2 k^2 / k^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2}. \quad (3.95)$$

Здесь k_z и k_\perp — компоненты волнового вектора вдоль и поперек магнитного поля. Решая это уравнение относительно ω^2 , получаем выражение для квадрата частоты гибридной волны ω_Γ^2 в зависимости от направления ее распространения по отношению к магнитному полю [116]:

$$\omega_\Gamma^2 = (1/2) (\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2) \pm \sqrt{(\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2)^2 / 4 - \omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.96)$$

где $\cos \theta = k_z / k$. Распад возможен для потенциальных волн, распространяющихся в узком конусе вдоль магнитного поля, таких, что

$$\sin^2 \theta \ll (1/4) \omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 / |\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2|. \quad (3.97)$$

Тогда

$$\omega_\Gamma = \omega_{He} [1 - (\omega_{pe}^2 / |\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2|) \sin^2 \theta]. \quad (3.98)$$

Чтобы воспользоваться формулами (3.43)—(3.45), необходимо найти $(k r_E)^2$. Из выражения для скорости (3.90) получаем

$$(k r_E)^2 = \frac{e^2}{m^2 \Omega^2} \frac{k^2 E_{1k}^2}{(\Omega - \omega_{He})^2} \sin^2 \theta, \quad (3.99)$$

а из формулы (3.95) имеем

$$\epsilon(\Omega) = \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{\Omega^2 - \omega_{He}^2} \left[\frac{(\omega_{He}^2 - \Omega^2) |\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2|}{\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 \sin^2 \theta} - 1 \right].$$

Для н.ч.-колебаний имеем, как и раньше, $\delta\epsilon_i(\omega) = -\omega_{pi}^2 / \omega^2$ и $\delta\epsilon_e(\omega) = 1/k^2 r_{De}^2$. Разлагая уравнения (3.43)—(3.45) по $\omega \ll \Omega$, получаем дисперсионное соотношение для н.ч.-волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} [117]:

$$\omega^4 - \omega^2 (\Delta^2 + \omega_s^2) + \omega_s^2 (\Delta^2 + \omega_{He} \Delta K^2) = 0, \quad (3.100)$$

где $K^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \frac{E_{1x}^2}{4\pi n_0 T_e}$, а расстройка Δ определяется формулой

$$\Delta = (\Omega - \omega_{He}) \left[\frac{2\omega_{He} |\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2|}{\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 \sin^2 \theta} (\Omega - \omega_{He}) - 1 \right].$$

Максимальный инкремент распадной неустойчивости можно определить так же, как в предыдущем случае, положив $\Delta = \omega_s$. В результате запишем

$$\omega = \omega_s + \frac{i}{2} \sqrt{\omega_s \omega_{He}} \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{2\Omega^2} \frac{E_{1x}^2}{4\pi n_0 T}}; \quad |\Omega \approx \omega_{He} - \omega_{pe}. \quad (3.101)$$

§ 3.8. Распадная неустойчивость магнитно-звуковых волн

Если рассматривать магнитно-звуковую волну в области частот $\omega_{Hi} \ll \Omega \ll \min\{\sqrt{\omega_{He}\omega_{Hi}}, \omega_{pi}\}$, то для исследования ее устойчивости необходимо, действуя по изложенной методике, найти два потенциальных колебания, сумма частот которых близка к Ω . Что касается закона сохранения импульса, то, учитывая, что волновой вектор непотенциальной магнитно-звуковой волны много меньше волновых векторов потенциальных колебаний, можно считать, что закон сохранения импульса выполняется. Действительно, при магнитно-звуковых резонансах длина резонансной волны порядка размеров системы R , в то время как можно найти потенциальные колебания с длинами волн, много меньшими R . В рассматриваемой области частот может распространяться большое количество потенциальных волн, однако многие из них, например дрейфовые, взаимодействующие друг с другом или с циклотронными, не соответствуют поставленным условиям. По закону сохранения энергии $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ необходимо найти такие потенциальные волны, частоты которых были бы порядка Ω . Если обратиться к изученным ранее дисперсионным соотношениям, то нетрудно увидеть, что ионно-звуковая волна, существующая в плазме без магнитного поля вплоть до частот порядка ионной плазменной, может представлять интерес для данной задачи.

Рассмотрим, как модифицируются ионно-звуковые колебания в случае, когда плазма помещена в магнитное поле. Будем считать, что частота ионно-звуковых колебаний много больше ω_{Hi} , но много меньше ω_{He} , $T_e > T_i$, $kr_i \gg 1$, $kr_e \ll 1$. Тогда вклад электронов в дисперсионное соотношение $\delta\varepsilon_e$ можно легко получить из формулы (3.95):

$$\delta\varepsilon_e = -(\omega_{pe}^2 / \omega^2) k_z^2 / k^2 + (\omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2) k_\perp^2 / k^2.$$

Формула (3.95) получена без учета температуры электронов. Такой учет существен для продольного движения и приводит к естественной модификации выражения для $\delta\varepsilon_e$:

$$\delta\varepsilon_e = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k_z^2 T/m} \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \frac{k_\perp^2}{k^2},$$

где рассматриваются колебания ионно-звукового типа, для которых $\omega \ll k_z v_{Te}$; поэтому в окончательном виде $\delta\varepsilon_e$ записывается следующим образом:

$$\delta\varepsilon_e = 1/k^2 r_{De}^2 + (\omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2) k_\perp^2 / k^2. \quad (3.102)$$

Вклад ионов в дисперсионное соотношение будет таким же, как для плазмы в отсутствие магнитного поля: $\delta \varepsilon_i = -\omega_{pi}^2 / \omega^2$. В результате дисперсионное соотношение принимает вид

$$1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2 = -1/k^2 r_{De}^2 + \omega_{pi}^2 / \omega^2. \quad (3.103)$$

Отсюда

$$\omega = \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2 + 1/k^2 r_{De}^2}}. \quad (3.104)$$

Таким образом, характер дисперсионной кривой при $k^2 r_{De}^2 \ll \ll 1 / (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2)$ остается прежним ($\omega = kc_s$), меняется лишь максимальная частота ионно-звуковых колебаний, которая раньше была равна ω_{pi} . Теперь при $k^2 r_{De}^2 \gg 1$

$$\omega_m = \omega_{pi} / \sqrt{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2}. \quad (3.105)$$

Если $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{He}^2$, $\omega_m = \sqrt{\omega_{Hi} \omega_{He}}$, в обратном предельном случае $\omega_m = \omega_{pi}$, как и прежде.

Если учесть теперь затухание ионно-звуковых колебаний на электронах, то появится малая отрицательная мнимая поправка к частоте. Затухание будет связано с движением электронов вдоль магнитного поля, и γ будет того же порядка, что и для плазмы без магнитного поля. Следует указать, что в отсутствие достаточно большого декремента нельзя считать ионы незамагниченными в колебаниях. Как показано в § 2.6, ионы не замагничены при выполнении неравенства $|\gamma| > \omega_{Hi}$, что налагает дополнительные условия на значения k_z и k_\perp . Так как декремент неустойчивости $\gamma \sim -\omega^2 / k_z v_{Te}$, при $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ условия незамагниченности и малости декремента по сравнению с частотой примут вид $1 > (k_\perp / k_z) \sqrt{m/M} \geq \omega_{Hi} / kc_s$. Подставляя сюда для оценки максимально возможное значение $k_\perp \leq \rho_e^{-1}$, получаем условие незамагниченности ионов и малости инкремента: $\rho_i^{-1} < k_z \leq k_\perp \sim \rho_e^{-1}$, где ρ_i — ларморовский радиус иона, определенный по электронной температуре. Следует заметить, что коротковолновые колебания могут иметь частоту, близкую к частоте магнитно-звуковой волны Ω или даже равную ей. В принципе при достаточно большой амплитуде магнитно-звуковой волны можно возбудить неустойчивость ионно-звуковой волны с частотой $\omega_s = \Omega$. Это произойдет, когда скорость электронов в магнитно-звуковой волне будет несколько больше скорости ионно-звуковых колебаний.

С другой стороны, можно рассмотреть распад магнитно-звуковой волны на ионно-звуковую и какую-либо потенциальную н. ч.-волну, например ионную циклотронную или дрейфовую. При этом, казалось бы, можно воспользоваться результатами предыдущего пара-

графа и искать н.ч.-неустойчивость, возбуждаемую волной конечной амплитуды с высокой частотой. Однако при выводе дисперсионного соотношения (3.43)—(3.45) предполагалось, что $\Omega \gg k_z v_{Te}$. В нашем случае $\Omega \approx \omega_s \ll k_z v_{Te}$. Следовательно, вывод должен быть изменен и вместо системы (3.43) — (3.45) необходимо получить другое дисперсионное соотношение.

Как показано в § 3.2, под действием поля магнитно-звуковой волны электроны будут двигаться вдоль оси y (или по азимуту в цилиндрическом случае) со скоростью $v_y = u \cos \Omega t = (E_{1x} c / H_0) \cos \Omega t$, где E_{1x} — амплитуда электрического поля в магнитно-звуковой волне. Определим поправку к функциям распределения электронов и ионов в в. ч.-поле, а затем возмущенные значения концентрации заряженных частиц. Поскольку частоты рассматриваемых колебаний много меньше электронной циклотронной ω_{He} , для нахождения поправки к функции распределения электронов можно воспользоваться дрейфовым кинетическим уравнением (см. § 3.2):

$$df_e^{(1)} / dt = i (e\varphi / T_e) (k_z v_z - \omega_e^*) f_{0e}. \quad (3.106)$$

Будем в дальнейшем считать выполненными неравенства $k_z \ll k_\perp$, $k_\perp \rho_e \ll 1$ и $\Omega \ll k_z v_{Te}$. Производная $df_e^{(1)} / dt$ является полной производной по времени, а связь координат со временем задается траекториями движения частиц в поле магнитно-звуковой волны (см. § 3.2). Поправку к функции распределения и потенциал можно разложить в ряд следующим образом:

$$f_e^{(1)} = \exp(-i\omega t) \sum_{p=-\infty}^{\infty} f_p \exp(i p \Omega t);$$

$$\varphi = \exp(-i\omega t) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi_p \exp(i p \Omega t).$$

Подставляя эти разложения в формулу (3.106) и интегрируя по траекториям, получаем

$$f_e^{(1)}(v_z) = \sum_q i \frac{e n_0 \varphi_q}{\sqrt{\pi} m v_{Te}^3} \int_{-\infty}^t (k_z v_z - \omega_e^*) \times \\ \times \exp \left[i \frac{k u}{\Omega} (\sin \Omega \tau - \sin \Omega t) + i q \Omega t - i \omega \tau + i k_z v_z \tau - \right. \\ \left. - v_z^2 / v_{Te}^2 \right] d\tau. \quad (3.107)$$

Для нахождения поправки к равновесной концентрации электронов проинтегрируем уравнение (3.107) по v_z :

$$n_e = \sum_q i \frac{e n_0 \varphi_q}{\sqrt{\pi} m v_{Te}^3} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^t (k_z v_z - \omega_e^*) \exp \left[i \frac{k u}{\Omega} (\sin \Omega \tau - \right.$$

$$- \sin \Omega t) + iq\Omega t - i\omega\tau + ik_z v_z \tau - v_z^2 / v_{Te}^2] d\tau. \quad (3.108)$$

Интегрирование по v_z провести легко, и после замены $\tau = t - \tau'$ и разложения $\sin \Omega (t - \tau')$ в окрестности точки $\tau' = 0$ ($k_z v_{Te} \gg \Omega$) запишем

$$n_e = i \frac{en_0 k_z}{mv_{Te}^3} \sum_q \int_0^\infty d\tau \left(i \frac{k_z v_{Te}}{2} \tau - \frac{\omega_e^*}{k_z v_{Te}} \right) \times \\ \times \exp \left[\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{4} \tau^2 + iku\tau \cos \Omega t - i\omega (t - \tau) + iq\Omega (t - \tau) \right] \varphi_q. \quad (3.109)$$

Интегрирование уравнения (3.109) по τ легко производится при замене переменной $\tau_1 = (k_z v_{Te} / 2) \tau + i(ku \cos \Omega t + \omega - q\Omega) / k_z v_{Te}$. В результате получаем выражение для компоненты n_{eq} :

$$n_{eq} = \frac{en_0}{T_e} \varphi_q \left(1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega - q\Omega - \omega_e^*}{k_z v_{Te}} \right) - \\ - i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{en_0}{T} \frac{ku}{k_z v_{Te}} (\varphi_{q+1} + \varphi_{q-1}). \quad (3.110)$$

Поскольку $\Omega > \omega_{Hi}$, можно считать, что на ионы электрическое поле магнитно-звуковой волны не действует (дрейф ионов в волне много меньше дрейфа электронов), т. е. $u_i = 0$. Так как, кроме того, считается выполненным неравенство $T_e > T_i$, можно пренебречь ионным ларморовским током и при получении выражения для n_{iq} считать плазму однородной. Тогда интегрирование кинетического уравнения для ионов производится так же, как и в § 3.2, 3.3. В результате имеем

$$n_{iq} = - \frac{en_0}{T_i} \varphi_q \left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \sqrt{\pi} \frac{\omega - q\Omega}{k_z v_{Ti}} \times \right. \\ \left. \times Y \left(\frac{\omega - n\omega_{Hi} - q\Omega}{k_z v_{Ti}} \right) \Gamma_n (k^2 \rho_i^2) \right], \quad (3.111)$$

где $\Gamma_n(x) = \exp(-x) I_n(x)$; $Y(x) = 2 \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt -$

$- i \sqrt{\pi} \exp(-x^2)$; I_n — функция Бесселя мнимого аргумента номера n . Подставляя теперь выражения для n_{eq} и n_{iq} соответственно из (3.110) и (3.111) в уравнение Пуассона, получаем бесконечную однородную систему алгебраических уравнений для φ_q . Поскольку, как уже говорилось, рассматриваются колебания ионно-звукового типа с $\omega \approx \Omega \gg \omega_{Hi}$, то в принципе частота $|\Omega - \omega|$ может оказаться близкой к одной из гармоник циклотронной частоты ω_{Hi} (именно такой случай и будет рассмотрен ниже). Выражения для

n_{iq} существенно различаются для $q = 1$ и $q \neq 1$, поэтому систему уравнений для φ_q удобно записать для каждого из этих случаев:

$$\begin{aligned} \varphi_q = & -\frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} \varphi_q \left(1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega - q\Omega - \omega_e^*}{k_z v_{Te}} \right) + \\ & + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} \frac{kv}{k_z v_{Te}} (\varphi_{q+1} + \varphi_{q-1}) + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - q\Omega)^2} \varphi_q - \\ & - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \varphi_q, \quad q \neq 1; \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} \varphi_1 \left(1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega - \Omega - \omega_e^*}{k_z v_{Te}} \right) - i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} \times \\ & \times \frac{ku}{k_z v_{Te}} (\varphi_2 + \varphi_0) + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left(1 - \frac{\omega - \Omega}{\omega - \Omega - n\omega_{Hi}} \Gamma_n \right) \varphi_1 - \\ & - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \varphi_1, \quad q = 1. \end{aligned} \quad (3.113)$$

При выводе уравнения (3.113) считалось выполнимым неравенство $|\omega - \Omega - n\omega_{Hi}| > k_z v_{Ti}$. Дисперсионное соотношение для рассматриваемых колебаний можно получить, приравняв нулю определитель системы (3.112), (3.113). При этом необходимо воспользоваться тем, что $\Omega, ku \ll k_z v_{Te}$, и разложить все величины в ряд по малому параметру $\Omega/k_z v_{Te}$:

$$\varphi_q^* = \varphi_q^{(0)} + (\Omega/k_z v_{Te}) \varphi_q^{(1)} + \dots; \quad \omega = \omega^0 + i\gamma + \dots \quad (3.114)$$

Поскольку нас интересуют колебания с частотой $\omega \approx \Omega$, то в нулевом приближении в разложении потенциала φ_q отличны от нуля лишь члены с $q = 0, \pm 1, \dots$, и из (3.112) и (3.113) имеем

$$\omega^0 = \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2 + 1/k^2 r_{De}^2)^{1/2}}; \quad (3.115)$$

$$\omega^0 - \Omega = n\omega_{Hi} [1 + \Gamma_n (k^2 \rho_i^2)], \quad (3.116)$$

где $\Gamma_n (k^2 \rho_i^2) \ll 1$. Из исходной системы уравнений (3.112), (3.113) для $q = 0, \pm 1, \dots$ в первом приближении находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\gamma}{\omega_0} + \sqrt{\pi} \frac{\omega^{(0)} - \omega_e^*}{k_z v_{Te}} \right) \left(\frac{2\gamma T_e}{T_i} \frac{n\omega_{Hi} T_n}{(\omega^{(0)} - \Omega - n\omega_{Hi})^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\pi} \frac{n\omega_{Hi} - \omega_e^*}{k_z v_{Te}} \right) = \frac{\pi}{4} \frac{k^2 v^2}{k_z^2 v_{Te}^2}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Из формулы (3.117) легко найти пороговую скорость возбуждения неустойчивости, положив $\gamma = 0$:

$$k^2 u_{\Pi}^2 = 4 (\omega^{(0)} - \omega_e) (n \omega_{Hi} - \omega_e). \quad (3.118)$$

Если $n \omega_{Hi} \gg \omega_e^*$ (неоднородность плазмы не существенна), из (3.118) следует

$$k^2 u_{\Pi}^2 = 4 \omega_{pi} n \omega_{Hi} (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2 + 1/k^2 r_{De}^2)^{-1,2}. \quad (3.119)$$

Нетрудно видеть, что условие возбуждения колебаний можно записать в виде

$$k^2 u^2 = 4 \omega_1 \omega_2, \quad (3.120)$$

где ω_1 и ω_2 — собственные частоты волн, на которые распадается исходная магнитно-звуковая волна. Наличие дрейфовой частоты в правой части уравнения (3.118) можно легко понять, если обратиться к результатам § 2.6, из которых следует, что при достаточно большом градиенте концентрации ионно-звуковая и циклотронная волны могут стать неустойчивыми. Отметим, что условие (3.120) имеет достаточно большую область применимости, так как выполняется для распадов электромагнитных волн на такие потенциальные колебания, когда элементы в них имеют больцмановское распределение. Очень часто в практических случаях важно найти распадную неустойчивость с минимальным порогом. Для этого полезно воспользоваться формулой (3.120) и условием распада $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. При этом минимальное значение произведения $\omega_1(\Omega - \omega_1)$ тем меньше, чем меньше ω_1 . Поэтому самым низким порогом по скорости u обладают распадные неустойчивости, когда одна из частот ω_1 , ω_2 почти равна частоте внешней волны.

Найдем из формулы (3.119) минимальные значения u для однородной плазмы. При $\Omega \approx \omega_0 \gg n \omega_{Hi}$ имеем

$$\Omega = \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{He}^2 + 1/k^2 r_{De}^2)^{1/2}},$$

и при $\omega_{pe} > \omega_{He}$ k может меняться в зависимости от Ω от 0 до ρ_e^{-1} :

$$k = (1/\rho_e) \Omega / (\omega_{He} \omega_{Hi} - \Omega^2)^{1/2}.$$

Подставляя это выражение в соотношение для порога, получаем

$$u_{\Pi}^2 > 4c_s^2 (\omega_{He} \omega_{Hi} - \Omega^2) / \omega_{He} \Omega, \quad n = 1, \quad (3.121)$$

откуда следует, что чем больше Ω , тем ниже порог, и при $\Omega_{\max} = \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}$ для магнитно-звуковых волн порог отсутствует. При этом необходимо еще выполнение условий $\Omega \leq k_z v_{Te}$ и $k r_i \gg n$, чтобы можно было пользоваться асимптотическими формулами для функции Бесселя $I_n(x) = 1 / \sqrt{2\pi x}$ (аргумент функции

должен быть много больше порядка n функции Бесселя). В действительности при $\Omega \rightarrow \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}$ длина волны ионно-звуковых волн приближается к ларморовскому радиусу электрона, поэтому возрастает циклотронное затухание на электронах. Это приведет к появлению в правой части множителей типа $\exp(-\rho_e^2) I_0(k^2 \rho_e^2)$ при $\Omega^2 \sim \omega_{He} \omega_{Hi}$. Поэтому минимальную пороговую скорость при $\Omega^2 \rightarrow \omega_{He} \omega_{Hi}$ можно оценить, положив $\omega_{He} \omega_{Hi} - \Omega^2 \sim \omega_{He} \omega_{Hi}$ и подставив в знаменатель правой части формулы (3.121) $\Omega \approx \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}$. При этом получим

$$u_{\Pi} \sim c_s \sqrt[4]{m/M}. \quad (3.122)$$

При $\Omega < \sqrt{\omega_{Hi} \omega_{He}}$ $u_{\Pi} \sim c_s$.

Условия $\Omega \leq k_z v_{Te}$, $k v_{Ti} > n \omega_{Hi}$ и $|\omega^{(0)} - \Omega - n \omega_{Hi}| \gg k_z v_{Ti}$ при этом сводятся к следующим ($\Omega < \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}$):

$$(\Omega / \omega_{Hi}) \sqrt{T_i / T_e} > n;$$

$$\Gamma_n n \omega_{Hi} \approx n \omega_{Hi} / (\sqrt{2\pi} k \rho_i) > k_z v_{Ti}.$$

Пользуясь соотношениями $\Omega \leq k_z v_{Te}$ и $k_z v_{Ti} \geq n \omega_{Hi}$, можно исключить k_z из правой части последнего неравенства и получить $\omega_{Hi} > \Omega \sqrt{m/M} \sqrt{T_i / T_e}$.

Таким образом, за счет распада пороги раскачки ионно-звуковых волн можно понизить. Можно ожидать, что распад магнитно-звуковой волны на ионно-звуковую и дрейфовую с $k \rho_i \gg 1$ волны будет иметь еще более низкий порог: распад магнитно-звуковых волн, имеющих частоты, близкие к гармоникам ионных циклотронных волн, будет происходить также с участием дрейфовых волн и т. д. [118]. Большое внимание, уделяемое волнам с частотами $\omega_{Hi} \leq \Omega \leq \leq \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}$, объясняется попытками использовать их для нагрева систем типа Токамак.

§ 3.9. Методы теории слабой турбулентности и распадная неустойчивость

Уже отмечалось, что основные закономерности распадных неустойчивостей можно получить при помощи методов теории слабой турбулентности. Приведем пример использования таких методов. Для этого найдем инкремент распадной неустойчивости электронной циклотронной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля и распадающейся на ионно-звуковую и потенциальную с частотой $\omega \approx \omega_{He}$ волны.

Пусть по плазме вдоль оси z распространяется электронная циклотронная волна достаточно большой амплитуды, удовлетворяю-

щая дисперсионному соотношению (3.92), которое при $\Omega \approx \omega_{He}$ можно переписать в виде

$$\Omega = \omega_{He} - (\omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2) \omega_{He}. \quad (3.123)$$

Здесь k_c — волновое число для непотенциальной циклотронной волны; $\omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2 \ll 1$. Будем считать, что амплитуда циклотронной волны много больше амплитуд гибридной и ионно-звуковой волн, рождающихся в результате распада. Это означает, что рассматривается начальная стадия процесса, когда амплитуды появившихся в результате распада новых волн еще не успели достаточно возрасти.

Для получения уравнений, описывающих процесс, нужно знать выражения для возмущения концентрации частиц в колебаниях с точностью до членов второго порядка по амплитудам полей. Эти выражения легко получить, используя гидродинамическое приближение для вычисления возмущения концентрации электронов и ионов, а затем подставляя результат в уравнение Пуассона. Для данной задачи положение облегчается тем, что циклотронная волна возмущает лишь движение электронов, в то время как движением ионов можно пренебречь. Аналогичная ситуация имеет место и для гибридной волны, описываемой дисперсионным соотношением (3.95). Скорость электронов в циклотронной волне задается формулой (3.90). Таким образом, как в случае ионно-звуковой, так и в случае гибридной волны, необходимо найти возмущение концентрации с точностью до величин второго порядка лишь для электронной компоненты.

Начнем с ионно-звуковой волны. Нелинейные члены должны содержать произведение $\varphi_r E_c$, где φ_r — возмущение потенциала в гибридной волне, а E_c — электрическое поле циклотронной волны. Только те нелинейные члены, которые содержат такое произведение, могут удовлетворять законам сохранения $\omega_c = \omega_r + \omega_s$; $k_c = k_r + k_s$. Возмущение концентрации электронов для ионно-звуковых волн обычно определяется из уравнения движения:

$$m n_e [\partial \mathbf{v}_e / \partial t + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e] = e \nabla \varphi - T_e \nabla n_e, \quad (3.124)$$

которое для медленных движений в линейном приближении и в пренебрежении левой частью дает $e \nabla \varphi = T_e \nabla n_e$, откуда следует больцмановское распределение электронов

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/T) = n_0 (1 + e\varphi/T).$$

В нашем случае слагаемое, содержащее субстанциональную производную $(\mathbf{v}_e \nabla) v_e$, приведет к появлению в выражении для n_e дополнительных членов, пропорциональных $\varphi_r E_c$. Действительно, будем решать уравнение (3.124) методом последовательных приближений, учитывая, что циклотронная и гибридная волны возмущают движение электронов. Согласно выражению (3.94) для гибридной волны с частотой $\omega_r \approx \omega_{He}$

$$\mathbf{v}_{ek_r} = - [e/2m (\omega_r - \omega_{He})] \mathbf{k}_{\perp r} \varphi_{k_r} + \mathbf{e}_z i (e/m\omega) k_z \varphi_{k_r}. \quad (3.125)$$

Последнее слагаемое в выражении для скорости (3.94) не дает вклада в возмущение концентрации электронов $n_{ek_r} = k_r v_{ek_r} / \omega$ и потому не учтено в выражении (3.125). Скорость электронов в циклотронной волне задается формулой (3.90) и имеет вид

$$v_{ek_c} = [e / im (\omega_c - \omega_{He})] (e_x - ie_y) E_{k_c}. \quad (3.126)$$

Из уравнения (3.124) получаем уравнение, определяющее возмущение концентрации электронов в ионно-звуковой волне с точностью до членов второго порядка:

$$(mn_0/2) [(v_{er} \nabla) v_{ec} + (v_{ec} \nabla) v_{er}] = e \nabla \varphi - T \nabla n_e. \quad (3.127)$$

Здесь мы заменили в левой части n_e на n_0 , так как при распространении циклотронной волны не происходит возмущения концентрации.

В линейном приближении, пренебрегая левой частью, имеем из уравнения (3.127)

$$n_{es}^{(1)} = n_0 e \varphi_{k_s} / T_e, \quad (3.128)$$

или для фурье-компонент

$$n_{ek_s, \omega_s}^{(1)} = n_0 e \varphi_{k_s, \omega_s} / T_e. \quad (3.129)$$

Здесь k_s и ω_s означают, что разложение в интеграл Фурье проводилось по времени и координате, поэтому

$$n_{es}^{(1)} \int n_{ek_s, \omega_s} \exp[-i\omega_s t + i(k_s r)] d\omega_s dk_s.$$

При таком способе разложения не предполагается, что колебание является собственным, т. е. что $\omega_s = \omega_s(k_s)$. В следующем приближении имеем

$$T \nabla n_{es}^{(2)} = \frac{mn_0}{2} i \int [(v_{ek_c} k_r) v_{ek_r} + (v_{ek_r} k_c) v_{ek_c}] \exp\{i(k_r + k_c) r - i(\omega_r + \omega_c) t\} d\omega_c dk_c d\omega_r dk_r. \quad (3.130)$$

Чтобы найти фурье-компоненту $n_{ek_s, \omega_s}^{(2)}$, необходимо, умножив обе части уравнения (3.130) на $\exp\{-i(k_s r) + i\omega_s t\}$, проинтегрировать по dr и dt . Так как $(1/2\pi) \exp(i\alpha x) dx = \delta(x)$, из уравнений (3.129) и (3.130) следует

$$\begin{aligned} n_{ek_s, \omega_s} &= n_{ek_s, \omega_s}^{(1)} + n_{ek_s, \omega_s}^{(2)} = n_0 \frac{e}{T_e} \varphi_{k_s, \omega_s} - n_0 \frac{e^2}{2m T_e k_{zs}} \times \\ &\times \int \varphi_{k_r, \omega_r} E_{xk_{zc}, \omega_c} \left(k_{y_r} - ik_{x_r} \frac{k_{z_r}}{\omega_r (\omega_{He} - \omega_c)} \times \right. \\ &\times d\omega_r d\omega_c dk_r dk_c \delta(\omega_s - \omega_r - \omega_c) \delta(k_s - k_r - k_c). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Аналогично можно вычислить возмущение концентрации электронов в гибридной волне с точностью до членов второго порядка по

амплитудам взаимодействующих волн. В данном случае члены второго порядка должны содержать произведения $\varphi_s E_{xk} k_{zc}$. В колебаниях с гибридными частотами электроны уже не распределены по закону Больцмана, и температурой их можно пренебречь. При этом, как нетрудно видеть из выражения для скорости электронов в гибридной волне и уравнения непрерывности для электронов,

$$n_{k_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi e} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{\Gamma}^2 - \omega_{He}^2} \frac{k_{\perp \Gamma}^2}{k_{\Gamma}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(\frac{k_{z\Gamma}^2}{k_{\Gamma}^2} \right) \right] \varphi_{k_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}} \quad (3.132)$$

Для нахождения нелинейной поправки к возмущению концентрации используем уравнение движения и непрерывности в виде

$$\begin{aligned} \partial n_{e\Gamma}^{(2)} / \partial t + \partial n_{e\Gamma}^{(1)} / \partial t + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_{e\Gamma}^{(1)} + \\ + \operatorname{div} (n_{es}^{(1)} \mathbf{v}_{ec}^{(1)}) = 0; \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v}_{e\Gamma}^{(1)} / \partial t + \partial \mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)} / \partial t + (1/2) \{ (\mathbf{v}_{ec}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}_{es}^{(1)} + (\mathbf{v}_{es}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}_{ec}^{(1)} \} = \\ = (e/m) \nabla \varphi_{\Gamma} - (e/mc) [\mathbf{v}_{e\Gamma}^{(1)} \mathbf{H}_0] - (e/mc) [\mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)} \mathbf{H}_0] - \\ - (e/mc) [\mathbf{v}_{es}^{(1)} \mathbf{H}_{1c}]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Если отбросить из уравнений (3.133) и (3.134) члены второго порядка $\mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)}$ и $n_{e\Gamma}^{(2)}$, а также произведение членов первого порядка, то получим уже известные выражения для фурье-компоненты скорости (3.134) и концентрации (3.132). В следующем приближении определим $\mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)}$ из уравнения

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)} / \partial t + (e/mc) [\mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)} \mathbf{H}_0] = - (1/2) [(\mathbf{v}_{ec}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}_{es}^{(1)} + \\ + (\mathbf{v}_{es}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}_{ec}^{(1)}] - (e/mc) [\mathbf{v}_{es}^{(1)} \mathbf{H}_{1s}]. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Для этого при помощи обратного преобразования Фурье, формул (3.90), (3.94) и связи E_{k_c} и H_{1k_c} находим $v_{es}^{(1)}$, $v_{ec}^{(1)}$ и H_{1c} . Полученные выражения подставляем в (3.135) и находим $v_{e\Gamma}^{(2)}$. Затем из уравнения непрерывности, записанного в виде

$$\partial n_{e\Gamma}^{(2)} / \partial t + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_{e\Gamma}^{(2)} + \operatorname{div} (n_{es}^{(1)} \mathbf{v}_{ec}^{(1)}) = 0, \quad (3.136)$$

находим фурье-компоненту $n_{ek_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} n_{ek_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}}^{(1)} + n_{ek_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}}^{(2)} = n_0 \frac{e \varphi_{k_{\Gamma}, \omega_{\Gamma}}}{m \omega_{\Gamma}} \left(\frac{\omega_{\Gamma} k_{\perp \Gamma}^2}{\omega_{He}^2 - \omega_{\Gamma}^2} - \frac{k_{z\Gamma}^2}{\omega_{\Gamma}} \right) + \\ + n_0 \frac{e^2}{2m^2 \omega_{\Gamma}} \int E_{xk_c, \omega_c} \varphi_{k_s, \omega_s} (k_{ys} - ik_{xs}) \left[\frac{k_{z\Gamma} \omega_s m}{\omega_{\Gamma} k_{zs} T_e (\omega_{He} - \omega_s)} - \right. \\ \left. - \frac{k_{\perp s}^2}{(\omega_{He} - \omega_c) (\omega_{He}^2 - \omega_{\Gamma}^2)} - \frac{k_c \omega_s m}{(\omega_{He} - \omega_c) (\omega_{He} - \omega_{\Gamma}) k_{zs} T_e} \right] \delta(\omega_{\Gamma} - \omega_c - \end{aligned}$$

$$- \omega_s) \delta(k_r - k_c - k_s) dk_c dk_s d\omega_c d\omega_s. \quad (3.137)$$

Наконец, поскольку ионы не участвуют в движении в циклотронной и гибридной волнах,

$$n_{ik_s, \omega_s}^{(1)} = n_0 (ek_s^2 / M\omega_s^2) \varphi_{k_s, \omega_s}. \quad (3.138)$$

Полученные выражения (3.131), (3.137) и (3.138) необходимо подставить в уравнение Пуассона. При этом уравнение Пуассона используется дважды (для звуковых и гибридных волн), аналогично тому как оно используется в линейном приближении дважды для получения двух дисперсионных соотношений для ионно-звуковой и гибридной волн. В результате получим:

$$\varphi_{k_s, \omega_s} (\omega_s^2 - k_s^2 c_s^2) = \frac{e}{2m} \frac{\omega_s^2}{k_{zs}} \int \varphi_{k_r, \omega_r} E_{xk_c, \omega_c} (k_{yr} - ik_{xr}) \times \\ \times \frac{k_{zr}}{\omega_r (\omega_{He} - \omega_c)} \times d\omega_r d\omega_c dk_r dk_c \delta(\omega_s - \omega_r - \omega_c) \delta(k_s - k_r - k_c); \quad (3.139)$$

$$\varphi_{k_r, \omega_r} \left(\omega_r^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_r^2}{\omega_{He}^2 - \omega_r^2} \frac{k_{\perp r}^2}{k_r^2} - \frac{\omega_{pe}^2 k_z^2}{k_r^2} \right) = - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_r}{k_r^2} \times \\ \times \frac{e}{2m} \int E_{xk_c, \omega_c} \varphi_{k_s, \omega_s} (k_{ys} - ik_{xs}) \times \\ \times \left[- \frac{k_{\perp s}^2}{(\omega_{He} - \omega_c) (\omega_{He}^2 - \omega_r^2)} - \frac{k_{zr} \omega_s}{\omega_r (\omega_{He} - \omega_c) k_{zs} T_e} - \right. \\ \left. - \frac{k_z \omega_s m}{(\omega_{He} - \omega_r) (\omega_{He} - \omega_c) k_{zs} T_e} \right] \times$$

$$\times d\omega_s d\omega_c dk_s dk_c \delta(\omega_r - \omega_s - \omega_c) \delta(k_r - k_s - k_c). \quad (3.140)$$

Система (3.139), (3.140) описывает поведение во времени амплитуд фурье-компонент потенциалов φ_{k_s, ω_s} и φ_{k_r, ω_r} . Амплитуда электрического поля в циклотронной волне E_{xk_c, ω_c} считается заданной. Уравнения (3.139), (3.140) можно решать методом последовательных приближений. Пренебрегая правой частью уравнения (3.139), имеем

$$\varphi_{k_s, \omega_s} (\omega_s^2 - k_s^2 c_s^2) = 0. \quad (3.141)$$

Отсюда следует, что $\varphi_{k_s, \omega_s} \neq 0$ лишь при $\omega_s^2 = k_s^2 c_s^2$, т. е. лишь при частоте, равной собственной. Таким образом,

$$\varphi_{k_s, \omega_s} = \varphi_{k_s} \delta(\omega_s - \omega_{k_s}). \quad (3.142)$$

Аналогичное соотношение для гибридной волны получается из уравнения (3.140) в пренебрежении правой частью:

$$\varphi_{k_r, \omega_r} = \varphi_{k_r} \delta(\omega_r - \omega_{k_r}). \quad (3.143)$$

В следующем приближении получим поправки к собственным частотам, подставив в правые части уравнений (3.139) и (3.140) выражения (3.142) и (3.143). Однако поправки к собственным частотам много меньше самих частот, поэтому формально их можно ввести, считая, что амплитуды φ_{k_r} и φ_{k_s} в следующем приближении слабо зависят от времени, так что $\partial\varphi_{k_r}/\partial t \ll \omega_r\varphi$ и $\partial\varphi_{k_s}/\partial t < \omega_s\varphi$. Это означает, что ω_s и ω_r в левых частях уравнений (3.139), (3.140) можно заменить на $\omega_{k_s} + i\partial/\partial t$ и $\omega_{k_r} + i\partial/\partial t$ соответственно. Электромагнитная волна достаточно большой амплитуды также является собственным колебанием, поэтому

$$E_{xk_c, \omega_c} = E_{xk_c} \delta(\omega_c - \omega_{k_c}). \quad (3.144)$$

Как уже отмечалось, будем считать эту амплитуду не зависящей от времени в рассматриваемом приближении. Подставляя выражения для амплитуд и частот в уравнения (3.139), (3.140) и проводя интегрирование по частотам, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{k_s}^*}{\partial t} = & i \frac{e}{m} \frac{\omega_{k_s}}{k_{z_s}} \int \varphi_{k_r} E_{xk_c}^* (k_{y_r} + ik_{x_r}) \times \\ & \times \frac{k_{z_r} \exp(i\Delta\omega t)}{\omega_{k_r} (\omega_{He} - \omega_{k_c})} \delta(k_s + k_r - k_c) dk_r dk_c; \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{k_r}}{\partial t} = & i \frac{e}{m} \frac{\omega_{He}^2 - \omega_{k_r}^2}{\omega_{He}^2 k_{\perp r}^2} \int \varphi_{k_s}^* E_{xk_c} \exp(-i\Delta\omega t) \times \\ & \times \left[- \frac{k_{\perp r}^2}{(\omega_{He} - \omega_{k_c})(\omega_{He}^2 - \omega_{k_r}^2)} + \frac{k_{z_r} \omega_{k_s} m}{\omega_{k_r} (\omega_{He} - \omega_{k_c}) k_{z_s} T_e} - \right. \\ & \left. - \frac{k_{z_c} \omega_{k_s} m}{(\omega_{He} - \omega_{k_r})(\omega_{He} - \omega_{k_c}) k_{z_c} T_e} \right], \end{aligned} \quad (3.146)$$

где $\Delta\omega = \omega_{k_s} + \omega_{k_r} - \omega_{k_c}$, а $\varphi_{k_s}^* = \varphi_{-k_s}$, $E_{xk_c}^* = E_{x, -k_c}$ (см. гл. 1).

Поскольку мы считаем циклотронную волну монохроматической, то $E_{x, k_c} = E_1 \delta(k - e_z k_0)$, где k_0 — волновое число циклотронной волны. Тогда интегрирование в k -пространстве в уравнениях (3.145), (3.146) можно провести до конца. Исключая затем из уравнений φ_{k_r} , получаем

$$\frac{\partial^2\varphi_{k_s}^*}{\partial t^2} - i\Delta\omega \frac{\partial\varphi_{k_s}^*}{\partial t} = \frac{1}{8} \frac{W_{k_0}^c}{n_0 T} k_{c_s} \frac{k_r^2}{k_r^2} \left[\frac{2k_r^2 T_e}{\omega_{He}^2 m} + \right.$$

$$\left[+ \frac{k_{\Gamma} c_s}{\omega_{He}} + 2 \frac{k_0 c_s}{\omega_{He}} \frac{k_{\Gamma}^2}{k_{\perp \Gamma}^2} \right] \Phi_{k_s}^* \equiv \gamma_{\text{нел}}^2 \Phi_{k_s}^*, \quad (3.147)$$

где $W = \frac{1}{8} \frac{\omega_{pe}^4}{\Omega^2 (\Omega - \omega_{He})^2} \frac{E_1^2}{4\pi}$ — плотность энергии циклотронной волны — можно получить как сумму плотности кинетической энергии электронов, движущихся в поле волны, и плотности энергии электромагнитного поля волны. Максимизируя правую часть по k_{Γ} и считая $k_0 < k_{\Gamma}$, получим в условиях резонанса ($\Delta\omega \approx 0$, точнее, $\Delta\omega \ll \gamma_{\text{нел}}$)

$$\partial^2 \Phi_{k_s}^2 / \partial t^2 = \gamma_{\text{нел}}^2 \Phi_{k_s}^*. \quad (3.148)$$

Видно, что амплитуда ионно-звуковой волны, а также пропорциональная ей амплитуда гибридной волны начинают экспоненциально нарастать во времени. Инкремент неустойчивости при этом получается таким же, как в случае интегрирования по траекториям (см. (3.101) [119]).

ТУРБУЛЕНТНЫЙ НАГРЕВ ПЛАЗМЫ

§ 4.1. Взаимодействие волн

В этой главе рассмотрены процессы взаимодействия волн между собой, нелинейного взаимодействия волн и частиц, нелинейные стационарные решения, а также возможности применения плазменных неустойчивостей для нагрева плазмы.

Если поставить задачу следующим образом: в момент $t = 0$ имеется циклотронная волна с амплитудой, намного превышающей амплитуду тепловых шумов с фиксированными ω_c и k_c , и ионно-звуковая и гибридная волны с амплитудой на уровне тепловых шумов также с фиксированными значениями ω_s, k_s и ω_r, k_r , удовлетворяющими распадным условиям, то полученное решение было бы справедливо лишь на начальной стадии. Чтобы проследить дальнейшую эволюцию системы из трех волн, необходимо учесть нелинейное взаимодействие ионно-звуковых и гибридных волн, приводящее к увеличению амплитуды циклотронной волны. Поэтому вместо системы уравнений (3.145) и (3.146) необходимо написать систему из трех уравнений, учитывающую изменение во времени. При этом удобно провести перенормировку амплитуд взаимодействующих волн, введя число квантов n_k^j взаимодействующих волн: $n_k^j \omega_k^j = W_k^j$, где W_k^j — плотность энергии волны типа j (отметим аналогию с формулой $n_k^j \hbar \omega_k = W_k^j$ в квантовой статистике). Введя теперь амплитуды вероятности согласно формуле $|C_j|^2 = n_j$, получим схематичную запись в следующем виде [120]:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial C_1}{\partial t} &= V_{k_1, k_0, k_2} C_0^* C_2; & i \frac{\partial C_2}{\partial t} &= \\ &= V_{k_2, -k_0, k_1} C_1 C_0; & i \frac{\partial C_0}{\partial t} &= V_{k_0, k_1, -k_2} C_1 C_2^*. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В этом можно убедиться непосредственным расчетом, как это сделано в § 3.9. Здесь C_0, C_1, C_2 пропорциональны амплитудам циклотронной, ионно-звуковой и гибридной волн. При этом величины V обладают определенной симметрией, такой, что при $\omega_0 > \omega_1 > > |\omega_2|, \omega_2 < 0$

$$V_{k_1, k_0, k_2} = -V_{k_2, -k_0, k_1} = V_{k_0, k_1, -k_2}. \quad (4.2)$$

Это позволяет решить систему уравнений (4.1) для связанных осцил-

ляторов. Решение выражается в виде эллиптических интегралов [120], однако качественный характер его виден из простых физических соображений. Распадаясь, исходная волна, имеющая начальное число квантов $n_0(0)$, теряет энергию; следовательно, число кван-

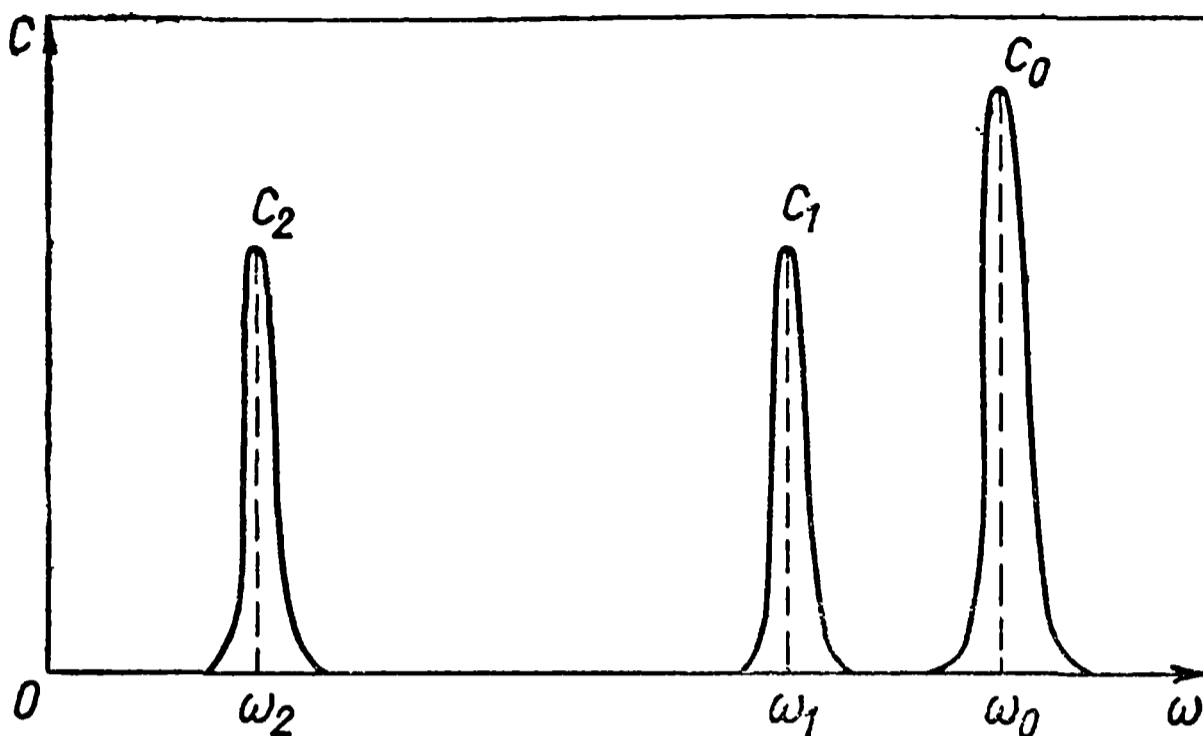


Рис. 47

тов уменьшается. В то же время увеличивается число квантов $n_1(t)$ и $n_2(t)$, начальные значения которых при $t = 0$ малы по сравнению с $n_1(0) \ll n_0(0)$. Характерное время существенного изменения амплитуд равно обратному инкременту неустойчивости, увеличенному в $\ln[n_0(0)/n_1(0)]$ раз. Появление этого множителя связано с тем, что рост амплитуды, а следовательно, и числа квантов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ происходит пропорционально $\exp(\gamma_{\text{нел}} t)$ в течение довольно долгого времени, если $n_0(0) \gg n_1(0)$. Поскольку диссипация энергии в системе отсутствует, по истечении времени порядка $\gamma_{\text{нел}}^{-1} \ln[n_0(0)/n_1(0)]$ начинается рост числа квантов исходной волны вплоть до исходного значения.

Интересно отметить, что в начальный момент отличными от нуля могут быть амплитуды лишь двух из трех участвующих в процессе волн. Такие решения очень важны для систем с дискретными спектрами, например волноводов и нелинейной оптики, однако для плазмы, где k непрерывно меняется, более важен другой случай. Условия резонанса в плазме могут выполняться для большого числа наборов волн, поэтому взаимодействие волн между собой не носит характера упорядоченного процесса. Действительно, при вычислении инкремента распадной неустойчивости можно заметить, что инкремент отличен от нуля не только для фиксированных значений k_1 и k_2 , но и в области $\Delta k \sim k_{\text{Гмакс}} \gamma_{\text{нел}} / \omega_s$. Это означает, что при распадной неустойчивости начнется рост амплитуды пакетов волн (рис. 47).

Это приводит к уширению первоначальной монохроматической волны в k -пространстве по частоте и к сбою фаз у взаимодействующих волн. Если частоты различных мод несоизмеримы, то сдвиги фаз через некоторое время можно считать случайными. В этом

случае можно следить лишь за эволюцией амплитуд волн, проводя усреднение по фазам так, как это сделано при выводе квазилинейных уравнений в гл. 1. Обратимость процесса при этом нарушается. Так как теперь происходит нарастание амплитуд пакетов волн, то систему уравнений нужно модифицировать, умножив правые части уравнений на $\exp(i\Delta\omega t)$ или $\exp(-i\Delta\omega t)$ [см. уравнения (3.145), (3.146)]. Будем считать, что амплитуды взаимодействующих волн сравнимы. В этом случае нет смысла отличать исходную волну от остальных. Поэтому систему (4.1) с учетом сказанного можно переписать в виде уравнения

$$i \frac{\partial C_k}{\partial t} = \sum_{k'} V_{k, k', k-k'} C_{k'}(t) C_{k-k'}(t) \times \exp[i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k-k'})t]. \quad (4.3)$$

Матричные элементы $V_{k, k', k''}$ при этом обладают следующими свойствами симметрии:

$$V_{k, k', k''} = V_{k, k'', k'} = -V_{-k, -k', -k''} = V_{k'', -k', k} \operatorname{sgn}(\omega_k, \omega_{k''}). \quad (4.4)$$

Так как нас интересует поведение во времени амплитуд, а фазы считаются хаотическими, то необходимо знать «числа заполнения» $n_k = |C_k|^2$. Для решения бесконечной системы уравнений можно применить квантовомеханическую теорию возмущений, разлагая C_k в ряд по оператору возмущения в виде упорядоченных по времени произведений (так называемые T -произведения [121]). Итак, $C_k(t) = C_k^{(0)} + C_k^{(1)} + C_k^{(2)}$. Подставим в левую часть уравнения (4.3) $C_k^{(1)}$, а в правую $C_k^{(0)}$ и $C_{k-k'}^{(0)}$, тогда

$$C_k^{(1)} = -i \sum_{k', k''} C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt';$$

$$V_{k, k', k''}(t) = V_{k, k', k''} \exp[i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})t] \delta_{k, k'+k''}. \quad (4.5)$$

Подставив в правую часть уравнения (4.3) вместо $C_{k'}$, $C_{k-k'}$ величины $C_k^{(0)} + C_k^{(1)}$ и $C_{k-k'}^{(0)} + C_{k-k'}^{(1)}$, найдем $C_k^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C_k^{(2)} &= i \sum_{k', k''} \int_0^t (C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(1)}(t') + C_{k'}^{(1)} C_{k''}^{(0)}) V_{k, k', k''}(t') dt' = \\ &= - \sum_{k', k'', q', q''} \left[C_{k'}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \times \right. \\ &\quad \times \int_0^{t'} V_{k'', q', q''}(t'') dt'' + C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \times \\ &\quad \left. \times \int_0^{t'} V_{k', q', q''}(t'') dt'' \right]. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Величины $C_k^{(0)}$ не зависят от времени и поэтому вынесены из-под знака интеграла. Комплексные величины $C_k^{(0)}$ можно представить в виде положительной амплитуды, умноженной на фазовый множитель $\exp(i\gamma_k)$. Считая фазы хаотическими и усредняя по ним, получаем $\langle C_k^{(0)} C_{k'}^{(0)} \rangle = |C_k^{(0)}|^2 \delta_{k, -k'}$ (см. гл. 1). Найдем усредненное по фазам изменение чисел заполнения $|C_k(t)|^2 - |C_k|^2$:

$$\begin{aligned} \langle |C_k(t)|^2 \rangle = & \langle C_k^{(0)*} C_k^{(0)} \rangle + \langle C_k^{(1)*} C_k^{(1)} \rangle + \\ & + \langle C_k^{(0)*} C_k^{(2)} + C_k^{(0)} C_k^{(2)*} \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Остальные члены дадут при усреднении по фазам нуль. Используя выражения (4.5) и (4.6) с учетом того, что $C_k^{(0)*} C_k^{(2)} + C_k^{(0)} C_k^{(2)*} = 2\text{Re} C_k^{(0)*} C_k^{(2)}$, получим

$$\begin{aligned} |C_k(t)|^2 - |C_k^{(0)}|^2 = & \sum_{k', k'', q', q''} \left[C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)*} C_{q''}^{(0)*} \times \right. \\ & \times \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \int_0^t V_{k, q', q''}^*(t') dt' - \\ & - 2\text{Re} C_k^{(0)*} C_{k'}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \int_0^{t'} V_{k'', q'', q'}(t'') dt'' - \\ & \left. - 2\text{Re} C_k^{(0)*} C_{k''}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \int_0^{t'} V_{k', q', q''}(t'') dt'' \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

При усреднении по фазам нужно так выбирать пары усредняемых величин, чтобы один сомножитель был из выражения для $C_k^{(1)}$, а другой из выражения для $C_k^{(1)*}$. Аналогично следует поступать и с двумя другими слагаемыми. При выбранных обозначениях это сведется к тому, что можно спаривать амплитуду, имеющую индекс k , и амплитуду с индексом q . Значит, например, в выражении для $C_k^{(1)}$ не учитываются члены типа $C_{k=0}^{(1)} = \sum_{k'} |C_{k'}|^2 \int_0^t V_{0, k', -k'}(t') dt'$, так как они не дают вклада в волны. Значение $k=0$ соответствует тому, что волна имеет бесконечную длину в пространстве, т. е. создается однородное возмущение, не имеющее отношения к волновым процессам [122]. Таким образом, первый индекс у матричного элемента $V_{k, k', k''}$ не должен обращаться при усреднении по фазам в нуль.

Учитывая это обстоятельство, получим, что первое слагаемое пропорционально $n_{k'}^{(0)} n_{k''}^{(0)}$, а два других соответственно $n_k^{(0)} n_{k'}^{(0)}$ и

$n_k^{(0)} n_{k''}^{(0)}$. Пользуясь свойствами симметрии матричных элементов (4.4), можно показать, что произведение двух любых матричных элементов в (4.8) сводится к $\left| \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \right|^2$ с соответствующим знаком:

$$\begin{aligned} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' &= V_{k, k', k''} \delta_{k, k'+k''} \int_0^t \exp[i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) t'] dt' = \\ &= V_{k, k', k''} \frac{\exp[i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) t] - 1}{i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})} = V_{k, k', k''} \times \\ &\times \frac{\exp[i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) t]}{(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})} 2 \sin \frac{(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) t}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \right|^2 = |V_{k, k', k''}|^2 \frac{4 \sin^2[(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) t/2]}{(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})^2} \delta_{k, k'+k''}. \quad (4.9)$$

Величина $(\sin^2 at/2)$ при больших t пропорциональна δ -функции a и t [21]. Действительно, проинтегрируем эту величину по a от $-\infty$ до $+\infty$, предварительно заметив, что $(\partial/\partial t) \int_{-\infty}^{\infty} [(\sin^2 at)/a^2] da = \int_{-\infty}^{\infty} [(\sin 2at)/a] da = \pi$. Следовательно,

$\int_{-\infty}^{\infty} [(\sin^2 at)/a^2] dt = \pi t$. Предел $\lim_{t \rightarrow \infty} [(\sin^2 at)/\pi t a^2] = \delta(a)$, так как при $a \neq 0$ этот предел стремится к нулю, при $a = 0$ — к бесконечности, а интеграл от этого выражения по a от $-\infty$ до ∞ равен единице. Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \right|^2 &= V_{k, k', k''} \delta_{k, k'+k''} \pi t \times \\ &\times \delta[(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})/2] = 2\pi V_{k, k', k''} \times \\ &\times \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''} t. \end{aligned} \quad (4.10)$$

С учетом свойств симметрии для изменения чисел заполнения имеем окончательно

$$\begin{aligned} \Delta n_k &= 4\pi \Delta t \sum_{k', k''} |V_{k, k', k''}|^2 [n_{k'}^{(0)} n_{k''}^{(0)} - \operatorname{sgn}(\omega_k \omega_{k''}) n_k^{(0)} n_{k'}^{(0)} - \\ &- \operatorname{sgn}(\omega_k, \omega_{k'}) n_k n_{k''}] \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если при эволюции системы не происходит коррелирования фаз, то можно перейти к дифференциальному уравнению для волн, приближенно положив

$$\Delta n_k / \Delta t = \partial n_k / \partial t \text{ и } n_k^{(0)} \equiv n_k(t);$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 4\pi \sum_{k', k''} |V_{k, k', k''}|^2 [n_{k'} n_{k''} - \text{sgn}(\omega_k, \omega_{k'}) n_k n_{k'} - \\ - \text{sgn}(\omega_k, \omega_{k''}) n_k n_{k''}] \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''}. \quad (4.12)$$

Первое слагаемое в правой части описывает слияние волн с образованием третьей, два других — процессы рассеяния. Это уравнение напоминает кинетическое уравнение для газа фононов в твердом теле в классическом пределе при $n_k \gg 1$ [123], однако в твердом теле его решают для небольших отклонений от термодинамического равновесия, в то время как в плазме процессы существенно неравновесные и распределения энергии по типам колебаний не происходит. Отметим, что уравнение (4.12) можно применять к случаю, когда все три волны разного типа, и к случаю, когда волны принадлежат к одной ветви колебаний, отличаясь значениями волновых векторов и частот. В последнем случае для нелинейного взаимодействия необходимо, чтобы колебания одной ветви обладали распадным спектром, т. е. выполнялись законы сохранения энергии и импульса. На это указывает наличие двух δ -функций (по частоте и волновому вектору) в уравнении (4.12). Если спектр колебаний является нераспадным и в системе существует лишь одна ветвь, изложенную выше схему итераций можно продолжить для получения кинетического уравнения для волн, описывающего четырехволновые процессы. Известно, что электромагнитная волна, образовавшаяся при слиянии двух плазменных, уходит из плазмы, поэтому процессом взаимодействия электромагнитной волны, имеющей частоту $2\omega_{pe}$, с плазменной можно пренебречь. В уравнении (4.12) при этом n_k соответствует «числу электромагнитных волн» (фотонов), рождающихся из-за взаимодействия между собой плазменных волн (плазмонов). При этом $n_{k'}$ и $n_{k''}$ — «число плазмонов» в состояниях k' и k'' . Уравнение (4.12) тогда имеет вид

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 4\pi \sum_{k', k''} V_{k, k', k''} n_{k'} n_{k''} \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''}. \quad (4.13)$$

Подставляя в уравнение (4.13) соответствующие числа квантов ленгмюровских колебаний и вычисляя матричный элемент взаимодействия при помощи уравнений гидродинамики, можно найти интенсивность излучения электромагнитных волн с частотой $2\omega_{pe}$. Этот расчет можно использовать для оценки плотности энергии ленгмюровских колебаний по измеренной экспериментально интенсивности электромагнитного излучения на частоте $2\omega_{pe}$.

Рассмотрим этот случай подробнее, следуя работе [124]. Пусть в плазме имеются ленгмюровские колебания, плотность энергии

которых намного превышает плотность энергии тепловых шумов, но много меньше $n_0 T_e$. Найдем интенсивность излучения электромагнитных волн на частоте $\omega = 2\omega_{pe}$ из такой плазмы. Считая, что в плазме помимо тока электронов, обусловленного электромагнитной волной, имеется еще нелинейный ток, возникающий за счет ленгмюровских волн, получим из уравнений Максвелла, исключая магнитное поле:

$$k^2 c^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}^t = -4\pi i \omega (\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{лин}} + \mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{нел}}), \quad (4.14)$$

где $\mathbf{j}_{\text{лин}}$ определяется движением электронов в электромагнитной поперечной волне ($\text{div } \mathbf{E}^t = 0$) и может быть выражена через параметры плазмы

$$4\pi i \omega \mathbf{j}_{\text{лин}} = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}^t, \quad (4.15)$$

где $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$. Таким образом,

$$[k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)] \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}^t = -4\pi i \omega \mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{нел}}. \quad (4.16)$$

Плотность нелинейного тока обусловлена присутствием ленгмюровских колебаний (ω_1, \mathbf{k}_1) и (ω_2, \mathbf{k}_2) . Поэтому с точностью до членов второго порядка

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{нел}} = -e (n_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_2, \omega_2} + n_{\mathbf{k}_2, \omega_2} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_1, \omega_1} + n_0 \mathbf{v}_{\mathbf{k}, \omega}^{(2)}), \quad (4.17)$$

где $n_{1,2}$ и $\mathbf{v}_{1,2}$ — возмущения плотности и скорости электронов в первой и второй ленгмюровских волнах; $\mathbf{v}^{(2)}$ — возмущение скорости электронов второго порядка по амплитудам взаимодействующих ленгмюровских волн. Уравнение для амплитуд взаимодействующих волн можно получить из (4.16). При этом из-за непотенциальности электромагнитной волны электрическое поле \mathbf{E}^t перпендикулярно направлению ее распространения, т. е. вектору \mathbf{k} . По законам сохранения $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, поэтому составляющую нелинейного тока, параллельную \mathbf{k} , можно в уравнении (4.16) не учитывать. Нетрудно показать, что вектор $\mathbf{v}^{(2)}$ параллелен $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Действительно, из уравнения движения электрона в ленгмюровских колебаниях следует, что

$$\partial \mathbf{v}^{(2)} / \partial t + (\mathbf{v}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}^{(1)} = \partial \mathbf{v}^{(2)} / \partial t + \nabla v^{(1)2} / 2 = 0.$$

Но так как $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}^{(1)}$, а $\mathbf{v}_1^{(2)}$ и $\mathbf{v}_2^{(2)}$ не удовлетворяет законам сохранения, то

$$\partial \mathbf{v}^{(2)} / \partial t + \nabla (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) = 0.$$

Для фурье-компонент соответственно имеем

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}, \omega}^{(2)} = [(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) / \omega_1 + \omega_2] (\mathbf{v}_{1\mathbf{k}} \mathbf{v}_{2\mathbf{k}}). \quad (4.18)$$

Таким образом, слагаемое $-en_0 \mathbf{v}_2$ в нелинейном токе можно не учитывать. Но так как в ленгмюровских колебаниях

$$\mathbf{v} = \frac{eE_{k_{1,2}, \omega_{1,2}}^2}{mi\omega_{1,2}}; \quad n_{k_{1,2}, \omega_{1,2}} = \frac{(k_{1,2} v_{k_{1,2}, \omega_{1,2}})}{\omega_{1,2}};$$

$$E_{k_{1,2}, \omega_{1,2}} \parallel k_{1,2},$$

то

$$\mathbf{j}_{k, \omega}^{\text{нел}} = \frac{e^3}{m^2\omega_{1,2}} (k_1, E_{k_1, \omega_1}^t) (k_2 E_{k_2, \omega_2}) \left\{ \frac{k}{\omega_1 k_2^2} + \frac{k_1}{\omega_2 k_1^2} \right\}. \quad (4.19)$$

Пренебрегая в (4.16) нелинейным током, получаем, что амплитуда $E_{k, \omega}^t$ отлична от нуля лишь в случае, когда частота ω является собственной, т. е. $\omega = \omega(k)$, и определяется из уравнения

$$k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \omega_k^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (4.20)$$

Таким образом, как и ранее, $E_{k, \omega} = E_k^t \delta(\omega - \omega_k)$; $E_{k_{1,2}, \omega_{1,2}}^e = E_{k_{1,2}}^e \delta(\omega_{1,2} - \omega_{k_{1,2}})$ и $\omega = \omega_k + i\partial/\partial t$. Тогда из уравнения (4.16) с учетом формулы (4.19) имеем

$$i \frac{\partial E_k^t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega)] \Big|_{\omega=\omega_k} = \sum_{k_1+k_2=k} \frac{e^3}{m^2 \omega_{k_1} \omega_{k_2}} \times \\ \times (k_1 E_{k_1}^e) (k_2 E_{k_2}^e) \left(\frac{k_1}{k_1^2 \omega_{k_2}} + \frac{k_1}{k_1^2 \omega_{k_2}} \right) \exp \{i(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\}.$$

При линейной поляризации электромагнитной волны $E_k^t = E_k [e_h k]/k$ и $e_h = \mathbf{H}_k^t / H_k^t$, где \mathbf{H}_k^t — магнитное поле волны.

Ленгмюровские волны являются продольными, поэтому $(k_{1,2} E_{k_{1,2}}^e) = k_{1,2} E_{k_{1,2}}^e$. Используя эти соотношения, получаем уравнение для амплитуд волн:

$$i \frac{\partial E_k^t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega)] \Big|_{\omega=\omega_k} = \\ = \sum_{k_1+k_2=k} \frac{e^3}{m^2 \omega_{k_1} \omega_{k_2}} \frac{([k_1 k_2] e_h)}{k k_1 k_2} \left(\frac{k_2^2}{\omega_2^2} - \frac{k_1^2}{\omega_1^2} \right) E_{k_1}^e E_{k_2}^e \times \\ \times \exp \{i(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\}. \quad (4.21)$$

Введем теперь нормализованные амплитуды волн и числа заполнения. Для этого можно найти спектральную плотность энергии волн, сложив плотность электромагнитной энергии волн и плотность

кинетической энергии электронов, или воспользоваться известной формулой для спектральной плотности энергии волны W_k в диспергирующей среде [10], согласно которой для электромагнитных волн

$$W_k^t = (1/\omega) (\partial/\partial\omega) [\omega^2 \varepsilon(\omega)] |_{\omega=\omega_k} |E_k^t|^2 / 8\pi, \quad (4.22)$$

а для продольных $\varepsilon(\omega_k) = 0$ и

$$W_k^l = (\partial/\partial\omega) [\omega \varepsilon(\omega)] |_{\omega=\omega_k} |E_k^l|^2 / 8\pi. \quad (4.23)$$

Введя числа заполнения согласно формулам

$$n_k^t = (1/\omega^2) (\partial/\partial\omega) [\omega^2 \varepsilon(\omega)] |_{\omega=\omega_k} |E_k^t|^2 / 8\pi;$$

$$n_k^l = (1/\omega) (\partial/\partial\omega) [\varepsilon(\omega) \omega] |_{\omega=\omega_k} |E_k^l|^2 / 8\pi,$$

получим

$$\frac{\partial n_k^t}{\partial t} = 4\pi \sum_{k=k_1+k_2} |V_{k, k_1, k_2}|^2 n_{k_1}^l n_{k_2}^l \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}), \quad (4.24)$$

где

$$V_{k, k_1, k_2} = \frac{\omega_{pe}^3}{V n_0 m |\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_k|} \frac{([k_1 + k_2] e_n)}{k_1 k_2 k} \left(\frac{k_1^2}{\omega_{k_1}} - \frac{k_2^2}{\omega_{k_2}} \right). \quad (4.25)$$

Оценим скорость роста n_k^t , т. е. интенсивность излучения электромагнитной волны. Поскольку $\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2} \approx 2\omega_{pe}$, $k \approx \omega_{pe}/c \ll k_{De} = \omega_{pe}/v_{Te}$. Если в формуле (4.24) перейти от суммирования к интегрированию согласно соотношению

$$\sum_{k=k_1+k_2} \rightarrow \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \delta(k - k_1 - k_2) d^3 k_2$$

(считаем, что нормировочный объем $V = 1$), то вместо (4.24) получим уравнение

$$\frac{\partial n_k^t}{\partial t} = 4\pi \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} |V_{k, k_1, k-k_1}|^2 n_{k_1}^l n_{k-k_1}^l \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k-k_1}). \quad (4.26)$$

Из этого уравнения следует, что для зависимости n_k^t от $|k| = 0$ до $|k| \approx k_D$ основной вклад в интеграл дадут области с $k \approx k_D$, так как интегрирование производится по всему пространству k . Поэтому из равенства $k_1 + k_2 = k$ следует, что k_1 и k_2 почти равны по абсолютному значению и отличаются знаком (рис. 48). При этом $([k_1 + k_2] e_n)$ порядка $|k_1| |k|$, все частоты порядка ω_{pe} , а $k_1^2 - k_2^2$ можно оценить из законов сохранения (см. рис. 48): $|k_1^2 - k_2^2| \sim k^2$. Таким образом,

$$|V_{k, k_1, k-k_1}| \approx \frac{\omega_{pe}^{3/2}}{\sqrt{n_0 m}} \frac{1}{\omega_{pe}} \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_1}.$$

Подставляя оценку для матричного элемента в формулу (4.26), интегрируя по $|k_1|$ и используя формулу

$$\begin{aligned} & \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k'-k_2}) = \\ & = \frac{\delta(k - k_1 - k_2)}{|\partial\omega_k/\partial k + \partial\omega_{k_1}/\partial k_1 + \partial\omega_{k_2}/\partial k_2|_{\substack{\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} \\ k = k_1 + k_2}}}, \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{\partial n_k^t}{\partial t} \approx \frac{k_D^3 n_{k_1}^2 \omega_{pe}}{(2\pi)^3 c} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 m c^4 k_D^3} \approx 4\pi \frac{W}{n_0 T} \omega_{pe} \left(\frac{v}{c}\right)^5 n_k^t,$$

где $W = \int [d^3k_1/(2\pi)^3] n_{k_1} \omega_1 \approx k_D^3 n_k \omega_{pe}/(2\pi)^3$ — плотность энергии ленгмюровских колебаний. Видно, что вероятность излучения чрезвычайно мала, поскольку содержит малую величину $(v_{Te}/c)^5$. Эта величина существенно увеличивается, если размер плазмы $a \leq c/\omega_{pe}$. В этом случае «законы сохранения» импульса уже могут не выполняться в неоднородной плазме, и, как показано в работе [125], снимается условие $|k_1 - k_2| r_{De} \leq v_{Te}/c$. Роль третьего тела в данном случае играют ионы, сохраняющие неоднородное распределение электронов в пространстве. Именно в таких системах экспериментально обнаружено излучение из плазмы электромагнитных волн на частоте примерно $2\omega_{pe}$ [126]. Уровень турбулентности плазмы $W/n_0 T$ при этом составлял порядка 10^{-2} и был много больше уровня тепловых шумов. Такая сильная неравновесность создавалась в плазме протекающим по ней током прямого разряда.

§ 4.2. Нелинейное взаимодействие волна — частица

Пусть в плазме имеются потенциальные шумы, энергия которых выше тепловой, например ленгмюровские, созданные каким-либо источником. Таким источником могут быть электронный пучок, внешняя в.ч.-волна и т. д. Рассмотрим эволюцию таких ленгмюровских шумов в плазме.

Используя векторное неравенство $|k_1 + k_2| \leq |k_1| + |k_2|$, нетрудно показать, что условия возникновения распада могут быть выполнены для спектров типа 1, 2 и не выполняются для спектров типа 3, 4 (рис. 49) [24].

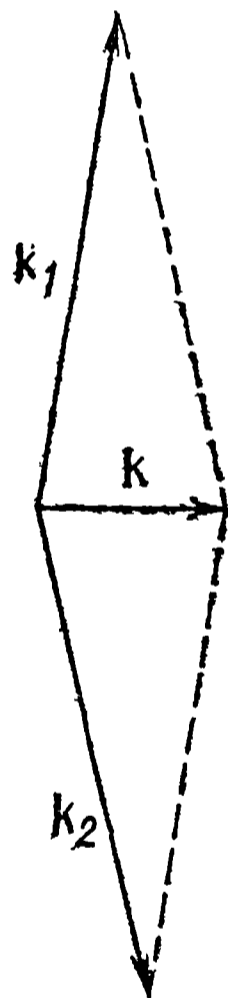


Рис. 48

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим случай, когда частота зависит лишь от модуля двумерного волнового вектора $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$. Тогда функция $\omega = \omega(|\mathbf{k}|)$ представляет собой в пространстве (k_x, k_y, ω) поверхность вращения. Для случая 1 (см. рис. 49) эта поверхность

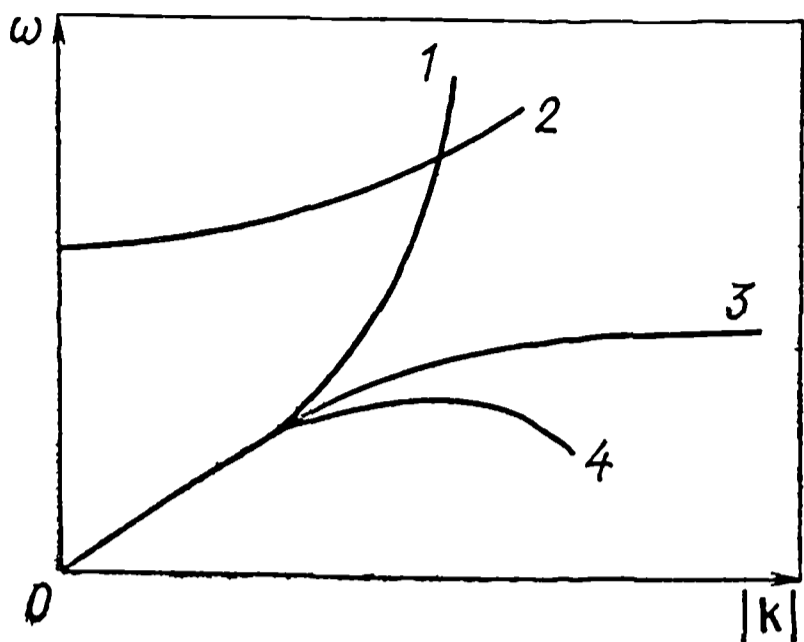


Рис. 49

показана на рис. 50, а, а для случая 3 — на рис. 50, б. Законы сохранения разрешают трехволновой процесс, если выполняется условие $\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{q}) = \omega(\mathbf{k} + \mathbf{q})$. Если поверхности $\omega = \omega(|\mathbf{k}|)$ и $\omega = \omega(|\mathbf{q}|)$ изображаются в исходной системе координат k_x и k_y , то поверхность $\omega(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|)$ должна иметь такой же вид, но в координатной системе, начало которой лежит на поверхности ω . Чтобы законы сохранения выполнялись, поверхность $\omega(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|)$ должна пересечься с поверхностью $\omega(|\mathbf{k}|)$. Это выполняется для случая, изображенного на рис. 50, а, и не выполняется для спектра вида 50, б. Ленгмюровские колебания (кривая 3 на рис. 49), обладают нераспадным спектром. Они в принципе могут

распадаться с участием волн другого типа, например ленгмюровская волна на ленгмюровскую и ионно-звуковую и т. д. Оказывается, ленгмюровские колебания с хаотическими фазами могут взаимодействовать с частицами гораздо эффективнее, чем при обычном затухании Ландау. Поскольку плазма — нелинейная среда, при распространении в ней двух волн с частотами ω_1 и ω_2 могут возникнуть биения на смешанных частотах $\omega_{\mathbf{k}_1} \pm \omega_{\mathbf{k}_2}$ с волновыми векторами $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. При этом в резонанс с биением могут попасть частицы с такой скоростью, что [23, 127]

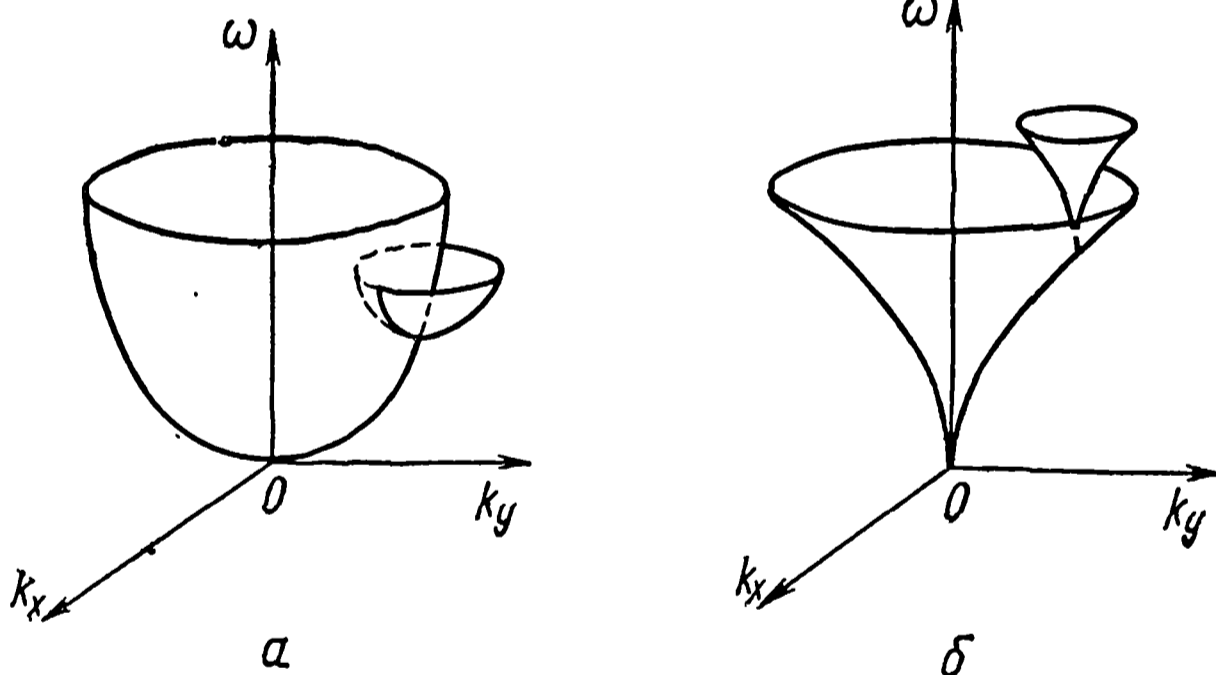


Рис. 50

$(\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2) \mathbf{v} = \omega_{\mathbf{k}_1} \pm \omega_{\mathbf{k}_2}$.

При рассмотрении этого процесса уже нельзя пользоваться уравнениями гидродинамики, а необходимо использовать последовательный кинетический подход, так же как и в случае исследования затухания Ландау. Исходными уравнениями при этом являются кинетические уравнения для электронов и ионов и уравнение Пуассона

$$\partial f_j / \partial t + \mathbf{v} \partial f_j / \partial \mathbf{r} - (e_j / m_j) (\partial \varphi / \partial \mathbf{r}) \partial f_j / \partial \mathbf{v} = 0; \quad (4.27)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi e (n_e - n_i); \quad j = i, e. \quad (4.28)$$

Разложим потенциал электрического поля φ в ряд Фурье по времени и координатам. Разложим функцию распределения по степеням амплитуд волн:

$$f_j(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_j^{(n)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}). \quad (4.29)$$

В нулевом приближении $f_j = f_{0j}(\mathbf{v})$ и электрические поля отсутствуют ($\nabla \varphi = 0$). В первом приближении по амплитуде потенциала получаем известный из линейной теории результат:

$$f_j^{(1)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) = \frac{(e/m_j) \mathbf{k} \partial f_{0j} / \partial \mathbf{v}}{-\omega + \mathbf{k} \mathbf{v}} \varphi(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.30)$$

Подставляя его в уравнение Пуассона (4.28), имеем

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \varphi(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (4.31)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \partial f_{0j} / \partial \mathbf{v}}{\omega - (\mathbf{k} \mathbf{v})} d\mathbf{v}. \quad (4.32)$$

Найдем теперь следующий член разложения. Для этого в уравнение

$$\partial f_j^{(2)} / \partial t + \mathbf{v} \partial f_j^{(2)} / \partial \mathbf{r} = (e_j / m_j) (\partial \varphi / \partial \mathbf{r}) \partial f_j^{(1)} / \partial \mathbf{v} \quad (4.33)$$

подставим

$$f_j^{(1)} = \sum_{\mathbf{k}', \omega'} \frac{(e_j / m_j) \mathbf{k}' \partial f_{0j} / \partial \mathbf{v}}{-\omega' + (\mathbf{k}' \mathbf{v})} \varphi(\mathbf{k}', \omega') \exp \{i [(\mathbf{k}' \mathbf{r}) - \omega' t]\}; \quad (4.34)$$

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}'', \omega''} \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') \exp \{i [(\mathbf{k}'' \mathbf{r}) - \omega'' t]\}. \quad (4.35)$$

В результате получим фурье-компонент

$$f_j^{(2)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) = \frac{e_j^2}{m_j^2} \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \frac{\varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'')}{[-(\omega' + \omega'') + (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \mathbf{v}]} \times \\ \times \left\{ \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{\mathbf{k}'' \partial f_{0j} / \partial \mathbf{v}}{-\omega'' + (\mathbf{k}'' \mathbf{v})} \right\}.$$

Последний результат удобнее использовать в симметризованном виде:

$$f_j^{(2)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) = \frac{e_j^2}{2m_j^2} \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \frac{\varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'')}{[-(\omega' + \omega'') + (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \mathbf{v}]} \times \\ \times \left\{ \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{k'' \partial f_{0j} / \partial \mathbf{v}}{-\omega'' + (\mathbf{k}'' \mathbf{v})} + \left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{k' \partial f_{0j} / \partial \mathbf{v}}{-\omega + (\mathbf{k}' \mathbf{v})} \right\}. \quad (4.36)$$

Подставляя $f_j^{(1)}$ и $f_j^{(2)}$ ($\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}$) в уравнение Пуассона, получаем

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \varphi(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') = 0, \quad (4.37)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)$ определяется формулой (4.32), а

$$\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{\omega_{pj}}{(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'')^2} \frac{e_j}{m_j} \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega' + \omega'' - (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \mathbf{v}} \times \\ \times \left[\left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{1}{\omega'' - (\mathbf{k}'' \mathbf{v})} \left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) + \left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{1}{\omega' - (\mathbf{k}' \mathbf{v})} \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] f_{0j}. \quad (4.38)$$

Правило обхода полюсов в этих выражениях можно получить из принципа причинности, сводящегося к требованию, чтобы при $t \rightarrow -\infty$ взаимодействие исчезло. Поэтому ко всем выражениям в знаменателях надо добавить величину $+i0$ в соответствии с правилом Ландау. Следующий член разложения по амплитудам потенциала можно получить тем же способом. В результате имеем

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \varphi(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') + \\ + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' + \omega''' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)}(\omega', \omega'', \omega''') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \times \\ \times \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') \varphi(\mathbf{k}''', \omega''') = 0, \quad (4.39)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)$ определяется формулой (4.32), $\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'')$ — формулой (4.38), а

$$\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)} = \frac{1}{3!} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''')^2} \left(\frac{e_j}{m_j} \right)^2 \times \\ \times \frac{1}{(\omega' + \omega'' + \omega''') - (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''') \mathbf{v}} + \\ + \left\{ \left(\mathbf{k}''' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{\left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{(\mathbf{k}' \partial / \partial \mathbf{v})}{\omega' - (\mathbf{k}' \mathbf{v})} + \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{(\mathbf{k}'' \partial / \partial \mathbf{v})}{\omega'' - (\mathbf{k}'' \mathbf{v})}}{(\omega' + \omega'') - (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \mathbf{v}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{(k' \partial / \partial \mathbf{v}) \frac{(k''' \partial / \partial \mathbf{v})}{\omega''' - (k''' \mathbf{v})}}{(\omega' + \omega''') - (k' + k''') \mathbf{v}} + \\
& + \left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{\left(k''' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{(k' \partial / \partial \mathbf{v})}{\omega' - k' \mathbf{v}}}{(\omega' + \omega'') - (k' + k''') \mathbf{v}} + \\
& + \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{\left(\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{(k''' \partial / \partial \mathbf{v})}{\omega''' - (k''' \mathbf{v})} + \left(k''' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{(k'' \partial / \partial \mathbf{v})}{\omega'' - (k'' \mathbf{v})}}{(\omega'' + \omega''') - (k'' + k''') \mathbf{v}} \Big\} f_{0j}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Будем решать теперь динамическое уравнение для амплитуд φ (4.39), считая, что амплитуды слабо по сравнению с ω_k зависят от времени. В первом приближении, опуская члены, содержащие степени $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$ выше первой, получаем уравнение (4.31), из которого следует, что

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \varphi_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}); \quad (4.41)$$

$\omega_{\mathbf{k}}$ — собственная частота колебаний, определяемая из дисперсионного соотношения

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) = 0. \quad (4.42)$$

Отсюда получаем известный спектр ленгмюровских колебаний, которые с учетом мнимой добавки к $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)$ могут медленно затухать во времени с декрементом $\gamma_{\mathbf{k}}$. Таким образом, соотношение (4.41) не является точным, так как пик функции $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$ — не бесконечно узкий на собственной частоте, а имеет ширину порядка $\gamma_{\mathbf{k}}$. В затухание может давать также вклад нелинейный процесс, так что, вообще говоря, из-за всех этих эффектов ширина пика определяется слабой зависимостью амплитуды потенциала от времени. Таким образом, $\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}(t)$, $\omega = \omega_{\mathbf{k}} - i\partial/\partial t$, и уравнение (4.39) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& - \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) i \left(\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial \varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t} = - i \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''} \varphi_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \times \\
& \times \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') + \\
& + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' + \omega''' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)}(\omega', \omega'', \omega''') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') \times \\
& \times \varphi(\mathbf{k}''', \omega'''). \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'} = \operatorname{Re} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)$; $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''} = \operatorname{Im} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)$. Напомним, что знак суммы по частотам здесь понимается в смысле интегрирования по частотам, именно так нормирована амплитуда потенциала

$\varphi(\mathbf{k}, \omega)$, т. е. $\sum_{\omega' + \omega'' = \omega}$ есть $\int \delta(\omega - \omega' - \omega'') d\omega' d\omega''$. Если теперь умножить уравнение (4.43) на $\varphi^*(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) = \varphi_{\mathbf{k}}^*(t) \delta(\tilde{\omega} - \omega_{\mathbf{k}})$ и проинтегрировать по частотам $\tilde{\omega}, \omega$, получим

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \frac{\partial |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}}} = -i \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''}(\omega_{\mathbf{k}}) |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \\ & + \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \int \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') \varphi^*(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \times \\ & \times \delta(\omega - \omega' - \omega'') d\tilde{\omega} d\omega' d\omega'' + \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \int \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)}(\omega', \omega'', \omega''') \times \\ & \times \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'') \varphi(\mathbf{k}''', \omega''') \times \\ & \times \varphi^*(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \delta(\omega - \omega' - \omega'' - \omega''') d\tilde{\omega} d\omega' d\omega'' d\omega'''. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Из выражения (4.44) следует, что при усреднении по фазам второе слагаемое в правой части исчезнет, так как оно пропорционально произведению трех амплитуд потенциала, в то время как последнее слагаемое дает вклад в искомое уравнение для амплитуд. Это иллюстрирует необходимость разложения кинетического уравнения вплоть до членов третьего порядка по амплитудам потенциала и, кроме того, указывает на необходимость дополнения решения (4.41) членами, пропорциональными $\varphi_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}''}$. Если такие члены дают вклад в уравнение (4.41), то они могут привести к появлению в (4.44) дополнительных слагаемых, пропорциональных произведению четырех амплитуд полей, которые не исчезнут при усреднении по фазам.

Действительно, если рассматривать уравнение (4.37), то помимо собственных решений (4.41) получим при $\omega \neq \omega_{\mathbf{k}}$ дополнительное возмущение потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = & - \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \int d\omega' d\omega'' \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') \varphi(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}'', \omega'')}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)} \times \\ & \times \delta(\omega - \omega' - \omega''). \quad (4.45) \end{aligned}$$

Подставив в правую часть $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$ согласно формуле (4.41), запишем окончательно

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}, \omega) = & \varphi_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)} \times \\ & \times \varphi_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}''} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}). \quad (4.46) \end{aligned}$$

Теперь можно использовать выражение для $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$ при получении окончательного динамического уравнения для амплитуд. Под-

ставляя (4.46) в (4.44) и интегрируя по частотам, получаем

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = -\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \\
 & + \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)} (\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}) \{ \varphi_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}''} \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}''=\mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{q}', \mathbf{q}''}^{(2)} (\omega_{\mathbf{q}'}, \omega_{\mathbf{q}''})}{\varepsilon_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}''}^{(1)} (\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{q}''})} \varphi_{\mathbf{q}'} \varphi_{\mathbf{q}''} + \varphi_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}}^* \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}''=\mathbf{k}''} \frac{\varepsilon_{\mathbf{q}', \mathbf{q}''}^{(2)} (\omega_{\mathbf{q}'}, \omega_{\mathbf{q}''}) \varphi_{\mathbf{q}'} \varphi_{\mathbf{q}''}}{\varepsilon_{\mathbf{k}''}^{(1)} (\omega_{\mathbf{k}''})} + \varphi_{\mathbf{k}''} \varphi_{\mathbf{k}}^* \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}''=\mathbf{k}'} \frac{\varepsilon_{\mathbf{q}', \mathbf{q}''}^{(2)} (\omega_{\mathbf{q}'}, \omega_{\mathbf{q}''})}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(1)} (\omega_{\mathbf{k}'})} \varphi_{\mathbf{q}'} \varphi_{\mathbf{q}''} \} + \\
 & + \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''+\mathbf{k}'''=\mathbf{k}} \{ \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)} (\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}, \omega_{\mathbf{k}'''}) \times \\
 & \times \varphi_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}''} \varphi_{\mathbf{k}'''} \varphi_{\mathbf{k}}^* \}. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что при усреднении по фазам $\langle \varphi_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}''} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2$, а также тем, что величины $\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)} (\omega', \omega'')$ и $\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)} (\omega', \omega'', \omega''')$ симметричны по \mathbf{k} , получим [128]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = -\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''} (\omega_{\mathbf{k}}) |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \\
 & + \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} 2 \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)} (\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})}{\varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}^{(1)*} (\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''})} |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 |\varphi_{\mathbf{k}''}|^2 + \\
 & + \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}'} \left[\frac{4\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}-\mathbf{k}''}^{(2)} (\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'})}{\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(1)} (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})} \varepsilon_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{(2)} (\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'}) - \right. \\
 & \left. - 3\varepsilon_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}'', \mathbf{k}}^{(3)} \right] |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2. \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

При усреднении по фазам необходимо пользоваться уже известным правилом, в частности необходимо в сумме $\sum_{\mathbf{k}''+\mathbf{k}'=\mathbf{k}}$ объединить амплитуды с индексами \mathbf{k} и \mathbf{q} , так же как в § 4.1 при выводе уравнения для чисел заполнения. Отдельные члены уравнения (4.48) можно интерпретировать следующим образом: первый член в правой части описывает линейное затухание или рост в случае неустойчивости собственных колебаний, второй член дает вклад в том случае, если частота биений $\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}$ совпадает с одной из собственных частот. При этом $\varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}^{(1)*} (\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''})$ обращается в нуль, и мнимая часть второго слагаемого

будет иметь вид $-\pi\delta[\varepsilon^{(1)}(\omega, \mathbf{k})] = -\pi\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \frac{1}{|\partial\varepsilon/\partial\omega|} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}$ согласно правилу обхода полюсов. Этот член описывает слияние колебаний в распадном спектре. Третий член также дает вклад в процессы распада при $\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_{\mathbf{k}''}$, и в случае распадного спектра из второго и третьего членов можно получить правую часть уравнения для чисел заполнения $n_{\mathbf{k}}$. В рассматриваемом случае спектр ленгмюровских колебаний нераспадный, поэтому второй член в правой части равен нулю, а третье слагаемое описывает вклад в процесс индуцированного рассеяния при $\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} \sim (\mathbf{k} - \mathbf{k}')v$, который можно интерпретировать как распад исходного колебания с $\varphi_{\mathbf{k}}$ на колебание с близкой частотой $\varphi_{\mathbf{k}'}$ и флуктуацию плотности, затухающую из-за резонанса с частицами плазмы. В этом смысле процесс индуцированного рассеяния иногда еще называют нелинейным затуханием Ландау. Наконец, последнее слагаемое, не имеющее резонансного знаменателя, ответственно за комптоновское рассеяние колебаний на частицах плазмы, когда плазмон с частотой $\omega_{\mathbf{k}}$ и волновым вектором \mathbf{k} , взаимодействуя с частицами плазмы, меняет свою частоту и волновой вектор.

Как показано в работе [23], вклад в индуцированное рассеяние плазменных колебаний на электронах мал, так как два последних слагаемых в уравнении (4.45) компенсируют друг друга. Такое ослабление рассеяния связано с экранированием электронов ионами. Когда спектр колебаний достаточно широкий, можно подобрать два таких ленгмюровских колебания, для которых $(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \approx v_{Ti}$. Комптоновское рассеяние на ионах при этом мало из-за их большой массы, а основной вклад в индуцированное рассеяние дает третье слагаемое в уравнении (4.45). Нелинейность диэлектрической проницаемости по-прежнему определяется движением ионов, поэтому $\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}) = \varepsilon_{e\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})$. Найдем нелинейное рассеяние ленгмюровских колебаний на ионах. Будем считать, что электроны и ионы в плазме имеют максвелловское распределение по скоростям с разными температурами. Разложим выражение для $\varepsilon_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}'})$ в ряд по малому параметру $(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{Te} \ll 1$, что справедливо для ленгмюровских колебаний, так как $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{pe} [1 + (3/2)k^2 r_D^2]$, $kr_{De} \ll 1$. Согласно выражению (4.38)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'}) &= \frac{\omega_{pe}^2}{2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \frac{e}{m} \int d\mathbf{v} [\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')v]^{-1} \times \\ &\times \left[\frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}')}{[\omega_{\mathbf{k}} - (\mathbf{k} \mathbf{v})]^2} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}')}{[\omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k}' \mathbf{v})^2]} \left(\mathbf{k}' \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{v}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')v}{[\omega_{\mathbf{k}} - (\mathbf{k} \mathbf{v})][\omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k}' \mathbf{v})]} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_{0e} \right]. \end{aligned}$$

Так как для максвелловской функции $\partial f_{0e}/\partial v = -2(v/v_{Te}^2) f_{0e}$ и $\omega_k \gg (k v)$, а $\omega_k - \omega_{k'} \ll (k - k') v$, то выражение для $\varepsilon_{k, -k'}^{(2)}(\omega_k - \omega_{k'})$ будет содержать произведения типа $(k v)(k' v)$, которые при интегрировании по скоростям (точнее, по углу в пространстве скоростей) обратятся в нуль. При этом останутся слагаемые вида

$\frac{(k - k') \partial f_{0e}/\partial v}{\omega_k - \omega_{k'} - (k - k') v}$, которые можно получить из

третьего члена в формуле для $\varepsilon_{k, -k'}^{(2)}$, так как $(k \partial/\partial v)(k' \partial/\partial v) f_{0e} = - (k \partial/\partial v)(k' v) f_{0e} 2/v_{Te}^2 = (k v)(k' v) f_{0e} 4/v_{Te}^2 - (k k')(2/v_{Te}) f_{0e}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k, -k'}^{(2)}(\omega_k - \omega_{k'}) &\approx \frac{e}{2m} \frac{(k k')}{\omega_k \omega_{k'}} \frac{\omega_{pe}^2}{(k - k')^2} \times \\ &\times \int d\mathbf{v} \frac{(k - k') \partial f_{0e}/\partial v}{\omega_k - \omega_{k'} - (k - k') v} = \\ &= \frac{e}{2m} \frac{(k k')}{\omega_k \omega_{k'}} \varepsilon_{e, k-k'}^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Точно так же

$$\varepsilon_{k, k-k'}^{(2)} = \frac{e}{2m} \frac{(k - k')^2}{k^2} \varepsilon_{e, k-k'}^{(1)*}(\omega_k - \omega_{k'}). \quad (4.50)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k-k'}^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'}) &= 1 + \frac{1}{(k - k')^2 r_{De}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(k - k')^2} \times \\ &\times \int \frac{(k - k') \partial f_{0i}/\partial v}{\omega_k - \omega_{k'} - (k - k') v} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Если $\omega_k - \omega_{k'} < |k - k'| v_{Ti}$, то мнимая часть величины $\varepsilon_{k-k'}^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'})$ не слишком мала, хотя действительная часть и будет больше. В уравнении (4.48) для ленгмюровских колебаний можно пренебречь обычным затуханием ($\omega_{pe} \gg |k| v_{Te}$), слагаемым, описывающим распады, и членом, ответственным за комптоновское рассеяние. При этом, пользуясь соотношениями (4.49) — (4.51), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varepsilon_{k, \omega_k}^{(1)'}}{\partial \omega_k} k^2 |\varphi_k|^2 \right) &= \sum_{k'} \frac{e^2 |\varphi_k|^2 |\varphi_{k'}|^2 (k k')^2}{m^2 \omega_k^2 \omega_{k'}^2} \times \\ &\times (k - k')^2 \left[\frac{\varepsilon_{e, k-k'}^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'})}{\varepsilon_{k-k'}^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'})} \right]^2 \text{Im} \varepsilon_{k-k'}^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'}). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Из формулы (4.50) следует, что при $|k - k'| v_{Te} > \omega_k - \omega_{k'}$

$$\varepsilon_e^{(1)} = 1 + 1 (k - k')^2 r_{De}^2 \approx 1 / (k - k')^2 r_{De}^2, \quad (4.53)$$

так как $|k - k'| \ll r_{De}^{-1}$. Формулу (4.51) можно преобразовать следующим образом:

$$\varepsilon_{k-k'}^{(1)} (\omega_k - \omega_{k'}) = \frac{1}{(k - k')^2 r_{De}^2} + \frac{1}{(k - k') r_{Di}^2} \times \\ \times \left[1 - \int \frac{f_{0i} (\omega_k - \omega_{k'}) dv}{\omega_k - \omega_{k'} - (k - k') v} \right]. \quad (4.54)$$

Интеграл в выражении (4.54) представляет собой хорошо известный интеграл из теории линейных дисперсионных соотношений и может быть сведен к функции Крампа. При $\omega_k - \omega_{k'} \gg \gg |k - k'| v_{Ti}$ мнимая часть $\varepsilon_{k-k'}^{(1)} (\omega_k - \omega_{k'})$ экспоненциально мала, поэтому наибольший вклад в уравнение (4.52) дадут те члены суммы по k' , для которых $\omega_k - \omega_{k'} < |k - k'| v_{Ti}$. Пользуясь этим соотношением, можно показать, что интеграл в смысле главного значения в (4.54) пренебрежимо мал по сравнению с единицей, и далее, делая замену в (4.54) $[(\omega_k - \omega_{k'}) - (k - k') v]^{-1} = -i \pi \delta [\omega_k - \omega_{k'} - (k - k') v]$ и интегрируя по скоростям, получим для максвелловского распределения ионов

$$\varepsilon_{k-k'}^{(1)} (\omega_k - \omega_{k'}) = \frac{1}{(k - k') r_{De}^2} \left[1 + \frac{T_e}{T_i} \right] + \\ + i \sqrt{\pi} \frac{(\omega_k - \omega_{k'})}{(k - k')^3 v_{Ti} r_{Di}^2} \exp \left(- \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Ti}^2} \right), \quad (4.55)$$

где $k_- = k - k'$; $\omega_- = \omega_k - \omega_{k'}$. Здесь мнимая часть много меньше действительной.

Подставляя полученные соотношения в (4.52) и вводя числа заполнения $n_k = (\partial \varepsilon_k / \partial \omega_k) k^2 |\varphi_k|^2 / 8\pi$, получаем

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = n_k \omega_{pe} \frac{3 \sqrt{\pi} T_e / T_i}{2 m n_0 (1 + T_e / T_i)^2 v_{Ti}} \times \\ \times \sum_{k'} n_{k'} \frac{(k k')^2 (k - k')}{|k - k'| k^2 k'^2} \exp \left(- \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Ti}^2} \right). \quad (4.56)$$

Здесь использовано то, что $\omega_k, \omega_{k'} \approx \omega_{pe}$, а $\omega_k - \omega_{k'} = \omega_{pe} (3/2) r_{De}^2 (k^2 - k'^2)$. В уравнении (4.56) удобно перейти от суммирования по k' к интегрированию, заменив $\sum_{k'}$ на $\int dk' / (2\pi)^3$.

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = n_k \omega_{pe} \frac{3 T_e / T_i}{8 n_0 m v_{Ti} (1 + T_e / T_i)^2 (2\pi)^{5/2}} \times$$

$$\times \int n_{k'} \frac{(k k')^2 (k^2 - k'^2)}{|k - k'| k^2 k'^2} \exp\left(-\frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Ti}^2}\right) dk'. \quad (4.57)$$

Интегрирование в уравнении (4.57) можно провести в двух предельных случаях для изотропных пульсаций. Если спектр турбулентности не является плавным по $|k|$, т. е. $|k - k'|$ — конечная величина, то при $\omega_- \ll |k_-| v_{Ti}$ можно положить экспоненту в интеграле (4.57) равной единице. В этом случае индуцированное рассеяние происходит с изменением $|k|$ на величину порядка самого k . Условие наличия индуцированного рассеяния такого типа имеет вид

$$\omega_k - \omega_{k'} \ll (|k| - |k'|) v_{Ti},$$

так как соответствующие углы по k' при этом в силу изотропности всегда найдутся. Последнее условие в силу того, что $\omega_k - \omega_{k'} = (3/2) r_{De}^2 (k^2 - k'^2) = 6 (\omega_{pe}^2 / v_{Te}^2) (k^2 - k'^2) (k + k')$, можно переписать еще следующим образом [122]:

$$v_{Ti} \omega_{pe} / k \gg v_{Te}^2; \quad \Delta k \approx k. \quad (4.58)$$

Здесь k — некоторое характерное для данного спектра волновое число.

В обратном предельном случае наибольший вклад в интеграл будут давать близкие значения волновых векторов k и k' . Действительно, для достаточно плавного спектра нарушение условия (4.58) приведет к тому, что ω_- будет много больше $k_- v_{Ti}$. При этом $k - k' = \Delta k$ уже будет много меньше k , и если выполняется условие (вектора k и k' направлены в противоположные стороны, а $|k - k'| v_{Ti}$ — максимально при $k \approx k'$)

$$(3/2) \omega_{pe} r_{De}^2 (k - k') (k + k') \gg (k + k') v_{Ti},$$

т. е.

$$\Delta k / k \gg \omega_{pe} v_{Ti} / k v_{Te}^2, \quad (4.59)$$

то взаимодействуют между собой волны практически с одинаковыми k и k' . Таким образом, спектр турбулентных пульсаций, т. е. зависимость n_k от k , должен быть достаточно плавным при $\Delta k \sim \omega_{pe} v_{Ti} / v_{Te}^2 \sim r_{De}^{-1} v_{Ti} / v_{Te}$. В этом случае можно считать, что перекачка энергии по спектру является дифференциальной. Конкретное выражение для нее легко получить, если разложить подынтегральное выражение в формуле (4.57), кроме экспоненциального множителя, по $|k - k'| / k \ll 1$. Например $n_{k'} = n_k + (\partial n_k / \partial k) (k' - k)$ и т. д. Однако можно воспользоваться следующим формальным приемом. Известно, что при $k_- v_{Ti} \rightarrow 0$ величина $(1 / \sqrt{\pi} k_- v_{Ti}) \exp(-\omega_-^2 / k_-^2 v_{Ti}^2)$ переходит в δ -функцию ω_- . Поэтому, вводя производную δ -функцию по ω_- [69]:

$$\delta'(\omega_-) = \frac{2\omega_-}{V\pi (k_- v_{Ti})^3} \exp\left(-\frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Ti}^2}\right), \quad (4.60)$$

можно переписать уравнения (4.57) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} = & n_k \omega_{pe} \frac{T_e/T_i}{2\pi^2 8n_0 m v_{Ti} (1 + T_e/T_i) \omega_{pe} r_{De}^2} \times \\ & \times \int n_{k'} \frac{(kk')^2 |k - k'|^2 v_{Ti}^2}{k^2 k'^2} \delta'(\omega_-) k'^2 dk' \sin\theta' d\theta' d\varphi. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Здесь введена сферическая система координат с осью z , направленной вдоль вектора k . Так как ω_- зависит лишь от модуля векторов k и k' , можно провести интегрирование по $|k|$ по частям, а затем, подставив $|k| = |k'|$, проинтегрировать по углам θ' и φ' . В результате получим [124]

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = \alpha W_k \frac{\partial W_k}{\partial k}; \quad \alpha = \frac{16 \omega_{pe}^3 \pi}{27 M n_0 v_{Te}^4 (1 + T_e/T_i)^2}, \quad (4.62)$$

где $W_k = \omega_k (k^2/2\pi^2) n_k$, так что $\int W_k dk = W$ есть полная плотность энергии шумов. Отсюда можно оценить характерное обратное время дифференциальной перекачки по спектру при $\Delta k \approx k$:

$$\gamma_i^e \sim \frac{1}{30} \frac{\omega_{pe}}{k^2 r_{De}^2} \frac{m}{M} \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (4.63)$$

Как уже отмечалось в этом параграфе, нелинейное рассеяние ленгмюровских колебаний на электронах сильно компенсируется комптоновским рассеянием, поэтому оно мало. Вычисления, в сущности ничем не отличающиеся от проделанных, позволяют найти $1/\gamma^l$ — характерное время перекачки ленгмюровских колебаний при $\Delta k \approx k$. Комптоновское рассеяние вносит существенный вклад, поэтому необходимо находить $\varepsilon_{k', k'', k'''}^{(3)}(\omega_{k'}, \omega_{k''}, \omega_{k'''})$. При этом рассеянии на ионах и электронах происходит быстрая изотропизация колебания, так как $\omega_- < k_- v_{Te}, k_- v_{Ti}$. Это условие означает, что $|k|$ меняется мало, $\omega_- \approx 0$, в то время как направление его может существенно измениться. Итак,

$$\gamma_e^l \sim \omega_{pe} (W/n_0 T_e) k^3 r_{De}^3. \quad (4.64)$$

Если спектр колебаний одномерный, то γ_e^l становится еще меньше ($kr_{De} < 1$):

$$\gamma_e^l \sim \omega_{pe} (W/n_0 T_e) k^5 r_{De}^5. \quad (4.65)$$

При этих процессах сохраняется число плазмонов, так как происходит рассеяние, а не поглощение ($\omega_- \approx 0$), что можно увидеть непосредственно, например, из уравнения (4.52), просуммировав его по k' и воспользовавшись свойствами симметрии ядра

относительно замены k на k' [$\text{Im } \varepsilon_{k-k'}^{(1)} (\omega_k - \omega_{k'}) = -\text{Im } \varepsilon_{k'-k} (\omega_k - \omega_{k'})$ согласно (4.55)].

Так как для ленгмюровских колебаний частота каждой волны слабо зависит от k , примерно сохраняется и полная энергия волн. Из уравнений (4.52) и (4.55) можно также получить, что рост $|\varphi_k|^2$, а следовательно, и n_k во времени происходит, если $\omega_{k'} > \omega_k$. Это означает, что при взаимодействии с электронами и ионами энергия ленгмюровских пульсаций перекачивается в сторону низких частот (длинноволновых колебаний), причем полная энергия волн остается приблизительно постоянной. Наконец, еще одним важным случаем нелинейного рассеяния является рассеяние ионно-звуковых шумов на ионах. Ионно-звуковой спектр также является нераспадным, поэтому основной вклад в нелинейную релаксацию спектра турбулентности дает процесс рассеяния на частицах, описываемый уравнением (4.48), а именно двумя его последними членами. Нелинейным взаимодействием ионно-звуковых волн с электронами можно пренебречь, так как число частиц, попадающих в резонанс с биениями, мало, $(\omega_k - \omega_{k'}) / |k - k'| v_{Te} \ll 1$, так как $\omega_k \approx kc_s$. Больше число частиц участвует в процессе при рассеянии волн ионами, поскольку $(\omega_k - \omega_{k'}) / |k - k'| v_{Ti} \gg (\omega_k - \omega_{k'}) / |k - k'| v_{Te}$. С учетом того, что $\omega_k = \omega_{pi} / \sqrt{1 + 1/k^2 r_{De}^2}$, получим, как и в случае рассеяния ленгмюровских шумов на ионах, что $(\omega_k - \omega_{k'}) / |k - k'| v_{Ti} \leq 1$. Поэтому ионы только рассеивают волны, но не поглощают их. Число волн при этом сохраняется, а ионно-звуковые шумы, созданные в какой-то определенной области k -пространства, перекачиваются в длинноволновую область. При этом, в отличие от ленгмюровских шумов, полная энергия волн убывает. Ионно-звуковые колебания движутся с меньшей фазовой скоростью и в этом отношении как бы «тяжелее» ленгмюровских шумов. Поэтому комptonовское рассеяние для них так же существенно, как при рассеянии ленгмюровских волн на электронах. Действительно, если найти $\varepsilon_{k', k-k'}^{(2)} (\omega_{k'}, \omega_k - \omega_{k'})$ и $\varepsilon_{k', k-k'}^{(3)} (\omega_{k'}, \omega_k, \omega_{k-k'})$, то в низшем порядке разложения по ω_- / ω при $\omega_- = \omega_k - \omega_{k'} \approx kv_{Ti}$, $k \approx |k - k'|$ получим, что все члены, описывающие нелинейное рассеяние, взаимно уничтожаются. Поэтому, как и в случае рассеяния ленгмюровских волн на электронах, необходимо учесть члены более высокого порядка. Выкладки при этом делаются аналогично тому, как рассчитывалось рассеяние ленгмюровских шумов на ионах. Отсылая читателя за подробностями к работам [69, 128], выпишем характерное обратное время рассеяния для изотропного турбулентного спектра шириной Δk :

$$\gamma_i^s \sim \omega_{pi} (W/n_0 T_e) (T_i/T_e) b, \quad (4.66)$$

где $b \approx 1$ характеризует тип спектра.

§ 4.3. Аномальное сопротивление

Неустойчивости, развивающиеся в плазме при протекании тока, приводят к тому, что энергия внешнего источника через упорядоченное движение электронов в плазме перекачивается в плазменные волны того или иного типа. Поэтому, возбуждая неустойчивость в плазме, можно нагревать электроны и ионы. Если, например, приложить к плазме высокое напряжение вдоль силовых линий магнитного поля, то электроны, ускоряясь в поле, достигают порога ионно-звуковой неустойчивости, и в плазме накапливаются ионно-звуковые шумы. Эти шумы, в свою очередь, взаимодействуя с электронами, создающими ток, должны приводить к их рассеянию, что экспериментально можно зафиксировать, измеряя сопротивление плазмы при протекании тока. Наличие активного сопротивления в бесстолкновительной плазме в этом случае свидетельствовало бы о том, что электроны рассеиваются на шумах в плазме. В первых же опытах, поставленных по проверке этого предположения, было измерено аномальное сопротивление плазмы и сильное увеличение полного давления плазмы nT [129]. Опыты проводились в импульсном режиме в системе типа пробкотрон, через торцы которого на плазму разряжался конденсатор.

Аномальное сопротивление — одна из наиболее важных задач теории слабой турбулентности. Простейшей неустойчивостью, которая может привести к появлению аномального сопротивления, является неустойчивость Бунемана, рассмотренная в гл. 1. Другой пример неустойчивости — ионно-звуковая, порог которой гораздо ниже, чем у бунемановской. В предельном случае $u \rightarrow v_{Te}$ ионно-звуковая неустойчивость практически плавно переходит в бунемановскую. Еще в ранних работах Бунемана предложена формула для аномального сопротивления. Так как проводимость плазмы $\sigma = \omega_{pe}^2 / 4\pi\nu = n_0 e^2 / m\nu$, где ν — частота парных соударений, была сделана попытка заменить ν некоторой другой величиной для правильного качественного описания эксперимента. Вместо ν предлагалось подставлять инкремент нарастания бунемановской неустойчивости $\gamma \sim (m/M)^{1/3} \omega_{pe} = (M/m)^{1/6} \omega_{pi}$, т. е. величину, примерно равную ионной плазменной частоте. Совершенно ясно, что такая формула может дать только порядок величины.

Наличие аномального сопротивления приводит к выделению тепла в плазме по формуле $Q = j^2 / \sigma$, где j — плотность тока, а σ — электропроводность. Нагрев электронной и ионной компонент в отсутствие столкновений между ними за время протекания тока происходит с разной скоростью. Можно получить соотношение между скоростями нагрева электронов и ионов из общих соображений, не привлекая даже механизма неустойчивости [128]. Для этого воспользуемся законами сохранения энергии и импульса в системе. Электроны, возбуждая в плазме колебания, передают импульс волнам, причем если импульс одной волны есть k , а число волн в единице объема n_k , то сила трения, действующая на электроны,

$$\mathbf{F} = -\nu_{\text{эф}} m n_0 \mathbf{u} = \int (\partial n_{\mathbf{k}} / \partial t) \mathbf{k} d\mathbf{k} (2\pi)^3 = \int \gamma_{\mathbf{k}}^e n_{\mathbf{k}} \mathbf{k} d\mathbf{k} / (2\pi)^3, \quad (4.67)$$

где $\gamma_{\mathbf{k}}^e$ — инкремент неустойчивости; $\nu_{\text{эф}}$ — эффективная частота столкновений. Такое «трение» приводит к нагреву электронов. Действительно, работа, затраченная на то, чтобы поддержать скорость электронов постоянной,

$$\Delta A = (\mathbf{F} \mathbf{u}) dt = \int \gamma_{\mathbf{k}}^e n_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \mathbf{u}) [d\mathbf{k} / (2\pi)^3] dt,$$

приведет к их нагреву, так что изменение энергии $\Delta \mathcal{E}_e$ можно определить из уравнения

$$d\mathcal{E}_e / dt = \int \gamma_{\mathbf{k}}^e n_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \mathbf{u}) d\mathbf{k} (2\pi)^3. \quad (4.68)$$

В стационарном состоянии ионы должны поглощать энергию колебаний, возбуждаемых электронами, с инкрементом $\gamma_{\mathbf{k}}^e$. Таким образом,

$$d\mathcal{E}_i / dt = \int \gamma_{\mathbf{k}}^e n_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} / (2\pi)^3. \quad (4.69)$$

Делением уравнения (4.68) на (4.69) можно получить оценку для скоростей нагрева электронов и ионов:

$$d\mathcal{E}_e / d\mathcal{E}_i \sim u / (\omega / k). \quad (4.70)$$

Это соотношение универсально. Для ионно-звуковой и бунемановской неустойчивостей из него следует, что $d\mathcal{E}_e / d\mathcal{E}_i > 1$. Из формулы (4.67) можно также получить выражение для $\nu_{\text{эф}}$ через энергию колебаний:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{эф}} &= \frac{1}{m n_0 u^2} \int \gamma_{\mathbf{k}}^e n_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \mathbf{u}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{1}{m n_0 u^2} \int \gamma_{\mathbf{k}}^e \frac{W_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} (\mathbf{k} \mathbf{u}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Таким образом, зная энергию колебаний и скорость электронов, можно найти $\nu_{\text{эф}}$. К сожалению, задача о нахождении спектра турбулентности чрезвычайно трудна даже в случае $\gamma_{\mathbf{k}} \ll \omega_{\mathbf{k}}$. Бунемановская неустойчивость вообще не поддается описанию в рамках теории слабой турбулентности, так как она не является кинетической.

Максимальный инкремент ионно-звуковой неустойчивости, как известно, достигается при $kr_{De} \approx 1$, и при этом $\gamma_{\mathbf{k}}^e \sim \omega_{\mathbf{k}} u / v_{Te}$ (см. гл. 1). Подставляя выражение для $\gamma_{\mathbf{k}}^e$ и \mathbf{k} в формулу (4.71), получаем [132]

$$\nu_{\text{эф}} \approx \omega_{pe} \int (W_{\mathbf{k}} / n_0 T_e) d\mathbf{k} / (2\pi)^3 = \omega_{pe} W / n_0 T_e. \quad (4.72)$$

Измерения $W / n_0 T_e$ различными способами — по рассеянию электромагнитных волн в турбулентной плазме [129, 130], по определе-

нию омического сопротивления в прямом разряде [129, 130], по штарковскому уширению спектральных линий [131] в присутствии турбулентных пульсаций — дает примерно согласующиеся значения $W/n_0 T_e \sim 10^{-2}$. Омическое сопротивление плазмы из-за неустойчивостей при этом на много порядков превышает сопротивление из-за кулоновских столкновений. Однако отличить ионно-звуковую неустойчивость от бунемановской довольно сложно, так как при этом для обоих типов неустойчивостей $\nu_{эф} \approx \omega_{pi}$. Выражение для $\nu_{эф}$ можно интерпретировать следующим образом. Электроны, ускоряемые постоянным электрическим полем, рассеиваются электростатическими, почти стационарными полями, характерная длина волны которых порядка r_{De} . Если бы энергия этих полей была сравнима с энергией электрона, то существенное изменение направления скорости электрона произошло бы на расстоянии r_{De} . В действительности плотность энергии электростатических полей W меньше плотности энергии электронов $n_0 T_e$, поэтому за одно столкновение электрон отклонится на малый угол порядка $W/n_0 T_e$, и «длина свободного пробега» λ будет $r_{De} n_0 T_e / W$. Так как скорость электрона v_{Te} , а частота столкновений $\nu_{эф} = v_{Te} / \lambda$, то приходим к тому же выражению (4.72) для $\nu_{эф}$.

Для исследования нелинейного режима ионно-звуковой неустойчивости можно использовать теорию слабой турбулентности. Это связано с тем, что, во-первых, неустойчивость обязана своим происхождением кинетическим эффектам и, значит, можно применять квазилинейную теорию, во-вторых, отношение инкремента к частоте мало, поэтому взаимодействие волн можно описать при помощи разложения по малому параметру γ_k / ω_k .

Исторически первой была решена задача о спектре ионно-звуковой турбулентности, возникающей в плазме, по которой пропускается постоянный ток ($u = \text{const}$) [69]. В стационарном состоянии линейное нарастание W_k компенсируется нелинейным рассеянием на ионах, что схематически можно записать так:

$$\partial W_k / \partial t = 0 = \{2\gamma_k - A\omega_k W/n_0 T_e\} W_k. \quad (4.73)$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает линейное нарастание волн, а второе — нелинейное рассеяние на ионах. При нелинейном рассеянии на ионах число волн сохраняется, но происходит перекачка энергии колебания в длинноволновую часть спектра. Поэтому энергия волн частично переходит в энергию ионов. Как отмечалось в предыдущем параграфе, при индуцированном рассеянии ионно-звуковых колебаний на ионах происходит дифференциальная перекачка энергии по спектру, поэтому член, описывающий нелинейное рассеяние волн, можно свести к дифференциальному [69]. Получающееся решение носит, однако, приближенный характер, так как не учитывает угловую зависимость в выражении для линейного инкремента и, следовательно, анизотропию энергии шумов W_k . Такое приближение называют иногда приближением изотропного инкремента. Хотя погрешность при этом, казалось бы,

приведет к тому, что решение справедливо с точностью до множителя порядка единицы, в действительности существует опасность, что полученный спектр может оказаться неустойчивым относительно стягивания конуса неустойчивых волн в k -пространстве. Вопрос этот не ясен до настоящего времени, хотя в работе [132] показано, что существуют решения, согласно которым угол при вершине конуса в k -пространстве «пульсирует» во времени около среднего значения, причем, это значение не уменьшается.

Чтобы исследовать задачу об аномальном сопротивлении, необходимо решить квазилинейные уравнения для функций распределения электронов и ионов, затем вычислить инкремент по найденным функциям распределения, подставить его в уравнение для шумов (4.73) и найти спектр турбулентности. Такая полная программа свелась бы к решению трехмерных интегрально-дифференциальных уравнений, т. е. к задаче довольно сложной и, возможно, не имеющей единственного стационарного решения. С другой стороны, имеются лишь косвенные экспериментальные подтверждения формулы для $\nu_{эф}$. Дело в том, что в плазме в отсутствие реальных парных столкновений ни одна из величин c_s , T_e , T_i не имеет своего обычного смысла. Даже если пользоваться вместо температуры некоторой средней хаотической энергией частиц, необходимо потребовать, чтобы функция распределения имела быстро сходящиеся хвосты, т. е. достаточно быстро убывала на бесконечности. Решение квазилинейных уравнений для ионно-звуковой неустойчивости можно получить при использовании малого параметра $c_s/v_{Te} \ll 1$ [133]. Уравнения при этом подобны квазилинейным уравнениям для ионного пучка, движущегося со скоростью $u \gg c_s$ (см. § 1.21). Поскольку $v_{Te} \gg \omega/k$, условия фазового резонанса $kv_{Te} \cos \theta = \omega$ будут выполняться для электронов, движущихся почти перпендикулярно направлению распространения волны. А это означает, что волны, возбуждаемые током и распространяющиеся вдоль него, будут взаимодействовать с электронами, движущимися почти перпендикулярно току.

Для качественного объяснения результатов удобно воспользоваться двумерной картиной, показанной на рис. 51 [69, 120]. Радиусы концентрических окружностей с центром в нуле характеризовали бы собой фазовые скорости ионно-звуковых колебаний, если бы их турбулентный спектр был изотропным. В действительности трудно себе представить, чтобы ток, протекающий вдоль оси x , возбуждал ионно-звуковые колебания вдоль оси y . Поэтому введен предельный угол θ_0 , такой, что при $\theta > \theta_0$ ионно-звуковых волн нет. Ионно-звуковая волна в силу того, что абсолютное значение фазовой скорости мало, взаимодействует с электронами, вектор скорости которых почти перпендикулярен k (линия AA на рис. 51). Эти электроны диффундируют в пространстве скоростей. Так как волны существуют в конусе с углом раствора порядка $2\theta_0$, то и диффузия в пространстве скоростей происходит в некотором конусе. На рисунке область диффузии ограничена линиями AA

и $A'A'$. Вне этого конуса коэффициент диффузии равен нулю. Электрическое поле, приложенное к плазме вдоль оси x , ускоряет электроны, скорости которых лежат в этом конусе, и их вклад в об-

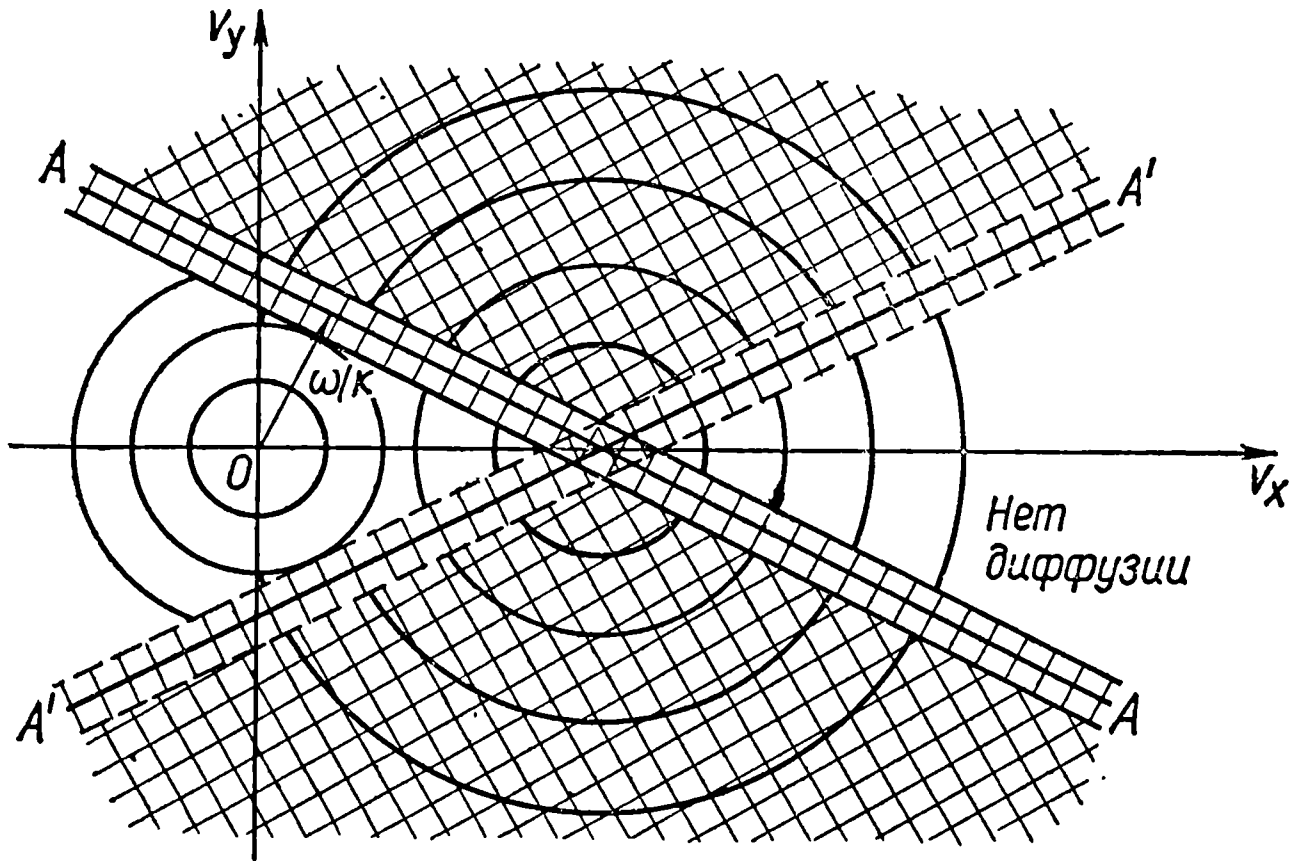


Рис. 51

щий ток может привести к сильному уменьшению аномального сопротивления. Таким образом, уже для электронов возникает нетривиальный вопрос о том, какое их количество может ускоряться свободно и к чему это приведет.

Рассмотрим теперь функцию распределения ионов. Волны со скоростями, меньшими v_{Ti} , отсутствуют в ионно-звуковом спектре. Однако если функция распределения ионов вначале была максвелловской, то в области $v > v_{Ti}$ имеется небольшое количество ионов. В нулевом приближении функция распределения ионов в области $v \leq v_{Ti}$ практически не меняется. Сильное изменение функции распределения происходит в области $v > v_{Ti}$, так как в этой области скоростей квазилинейный коэффициент диффузии для ионов отличен от нуля. Небольшая доля ионов при этом начинает быстро увеличивать энергию, и при достижении энергии порядка T_e их тепловая скорость становится равной скорости ионно-звуковых волн. Это приводит к сильному дополнительному затуханию ионно-звуковых волн. В настоящее время нет еще последовательной теории, учитывающей эти эффекты, однако для ряда практически интересных случаев можно сделать полезные оценки, вводя двухтемпературное распределение ионов [134].

Таким образом, видно, что происходит значительное изменение функции распределения электронов и ионов, учет которого может сильно повлиять на расчетное значение аномального сопротивления. Так, ускорение электронов, скорости которых лежат внутри угла θ_0 , вызывает уменьшение аномального сопротивления, а затухание ионно-звуковых волн на «горячих» ионах приводит к тому,

что неустойчивость будет развиваться уже при много больших, чем c_s , значениях направленной скорости электронов u .

Еще одна трудность связана с тем, что в квазилинейном уравнении для электронов (см. § 1.21) квазилинейный коэффициент диффузии падает со скоростью как v^{-3} [133]. Такое явление напоминает убегание электронов в плазме с бесконечно тяжелыми ионами (лоренцевские столкновения), когда частота столкновений также падает со скоростью как v^{-3} . Это приводит к тому, что со временем распределение электронов изменяется таким образом, что увеличивается их число в области больших скоростей. Поскольку взаимодействие с волнами становится слабее, они начинают ускоряться в постоянном электрическом поле практически как свободные электроны [133].

Существует случай, когда можно получить полезные оценки, несмотря на указанные трудности. В бесстолкновительных ударных волнах, движущихся поперек магнитного поля (см. § 4.4), ток течет поперек магнитного поля, ионы можно считать незамагниченными, в то время как $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$, т. е. электроны замагничены. В этом случае все электроны, вращаясь по ларморовской окружности, взаимодействуют с волнами. Кроме того, магнитное поле препятствует убеганию электронов и образованию высокоэнергичных хвостов на функции распределения. Здесь можно воспользоваться только квазилинейным приближением, не учитывая нелинейного взаимодействия волн. Это означает, что в уравнении (4.73) можно опустить нелинейные члены, положив $\gamma_k = 0$. Насыщение колебаний при этом произойдет из-за линейного затухания ионно-звуковых волн на «горячих» ионах. Другими словами, $\gamma_k = \gamma_k^e - \gamma_k^i$, и для всех первоначально неустойчивых волн должно выполняться условие

$$\gamma_k = \gamma_k^e - \gamma_k^i \approx \omega (\omega_{pe}^2 / k^2) [(1/n_0) \partial f_e / \partial v + (m M n_0) \partial f_i / \partial v] |_{v=\omega k} = 0. \quad (4.74)$$

Определив из (4.74) скорость упорядоченного движения электронов, можно затем найти $v_{эф}$ из условия $u = eE_0 / m v_{эф}$:

$$v_{эф} = eE_0 / m u, \quad (4.75)$$

где E_0 — напряженность электрического поля, приложенного к плазме. Теперь при помощи формулы (4.72) можно найти плотность энергии колебаний:

$$W / n_0 T_e \approx [(eE_0 r_{De} / T_e) v_{Te} / u]. \quad (4.76)$$

Видно, что с увеличением E_0 растет и энергия шумов W . Будем пока считать, что E не слишком велико. Тогда, разбивая ионы на группу холодных и горячих, найдем скорость u . Пусть концентрация горячих ионов, взаимодействующих с ионно-звуковыми шумами, n_{gi} , а их температура T_{gi} . Тогда, воспользовавшись соотноше-

нием для роста температур электронов и ионов $d\mathcal{E}_e/d\mathcal{E}_i \approx u/(\omega/k)$, с учетом того, что число электронов в единице объема n_0 , а число ионов — n_{gi} , получим

$$n_0 T_e / n_{gi} T_{gi} \approx u c_s. \quad (4.77)$$

Далее, приравнивая $\gamma_k^e \approx \omega \sqrt{m/M} u / c_s$ ионному декременту $\gamma_k^i \approx (\omega^3 / k^2 v_{Tgi}) (n_{gi} / n_0) \sqrt{T_e / T_{gi}}$, получим с использованием соотношения (4.77)

$$n_{gi} / n_0 \approx (m/M)^{1/4} (T_{gi} / T_e)^{1/4}. \quad (4.78)$$

Уравнения (4.77) и (4.78) содержат неизвестные величины n_{gi} / n_0 , T_{gi} и u , однако уже из них можно получить решение. Горячие ионы будут интенсивно отбирать энергию у шумов лишь в случае $T_{gi} \approx T_e$, так как при этом $v_{Tgi} \approx \omega/k \approx c_s$. Поэтому полагая в соотношениях (4.77), (4.78) $T_{gi} \approx T_e$, получим [134]

$$n_{gi} / n_0 \approx (m/M)^{1/4}; \quad u \approx c_s (M/m)^{1/2}. \quad (4.79)$$

Использованный квазилинейный подход можно применять при достаточно малых E_0 . Однако уже и в этом случае из второго уравнения (4.79) следует, что установившаяся скорость заметно превышает скорость звука.

Чтобы найти закон Ома для аномального сопротивления при различных значениях напряженности электрического поля, необходимо пользоваться уравнением (4.73), учитывающим нелинейное взаимодействие волн. При этом полная система уравнений, позволяющая найти качественную зависимость плотности тока $j \sim u$ от E_0 , имеет вид

$$0 = \omega_{pi} W [u/v_{Te} - \omega'kv_{Te} - a \omega/kv - b (T_i/T_e) W/n_0 T_e]; \quad (4.80)$$

$$u = eE_0/mv_{эф}; \quad v_{эф} = \omega_{pe} W/n_0 T_e; \quad a = (M/m)^{1/4} - 1; \quad b = k/\Delta k. \quad (4.81)$$

В уравнении (4.80), соответствующем равенству нулю полного инкремента неустойчивости при $kr_{De} \approx 1$, первое слагаемое в правой части соответствует возбуждению волн электронами, движущимися со скоростью u , второй член соответствует обычному затуханию Ландау ионно-звуковых волн в отсутствие направленного движения электронов, третий — затуханию на горячих ионах и, наконец, четвертый — затуханию из-за индуцированного рассеяния на ионах. Если пренебречь последним членом, то из уравнений (4.80), (4.81) получится второе уравнение (4.79).

Рассмотрим случай, когда последним членом пренебрегать нельзя. Найдем значение E_c , при котором квазилинейный режим переходит в нелинейный, и зависимость плотности тока от напряженности электрического поля при $E > E_c$. Для этого используем то, что $\omega/k \approx c_s$, а $T_i/T_e = \omega/ku = c_s/u$. Исключив из уравнений (4.80), (4.81) $W/n_0 T_e$, запишем

$$u - c_s - ac_s - b(c_s/u) eE_0 v_{Te} / (m\omega_{pe}u) = 0. \quad (4.82)$$

Квазилинейный режим сменяется нелинейным, когда $u \gg (a+1)c_s$. При этом в уравнении (4.82) можно пренебречь величиной $(a+1)c_s$ по сравнению с u . В результате получим

$$u^3 = (bc_s^2 eE_0 / m\omega_{pi}) \sqrt{2}. \quad (4.83)$$

Отсюда следует, что, во-первых, $u \approx j \approx E_0^{1/3}$, во-вторых, так как $u \gg c_s$, то при

$$E_0 \gg (c_s/e) (mM^3)^{1/4} (\omega_{pi} / \sqrt{2}) / b = E_c \quad (4.84)$$

режим становится нелинейным [128].

Таким образом, закон Ома можно качественно представить так, как показано на рис. 52.

Полученный закон Ома относится к случаю тока, перпендикулярного или почти перпендикулярного направлению магнитного поля.

Если магнитное поле отсутствует, исчезает механизм, перемещающий все электроны. В пространстве скоростей электроны, находящиеся в некотором конусе, ускоряются в электрическом поле как свободные. Вопрос о зависимости напряжения от тока в плазме без магнитного поля остается открытым. Большинство экспериментов для исследования аномального сопротивления относится к разрядам с так называемыми открытыми концами, в которых электроны могут свободно уходить вдоль силовых линий магнитного поля [135]. В таких системах в первую очередь уходят быстрые частицы, т. е. происходит непрерывное обрезание хвоста электронного распределения. С аналогичной трудностью приходится сталкиваться при исследовании задачи о протекании тока вдоль магнитного поля при $\omega_{pe} > \omega_{He}$.

В работе [136] обсуждается комбинированное действие на электроны ионно-звуковой и циклотронной электронной неустойчивостей, позволяющих найти механизм, выводящий электроны из конуса, в котором отсутствуют ионно-звуковые волны. Однако теория аномального сопротивления для тока, текущего вдоль не слишком сильного магнитного поля, еще не создана. Когда $\omega_{Hi} > \omega_{pi}$, т. е. магнитное поле велико, можно получить автотельное решение, описывающее ускорение электронов в поле E_0 [137]. Однако в обычных лабораторных условиях это нереально.

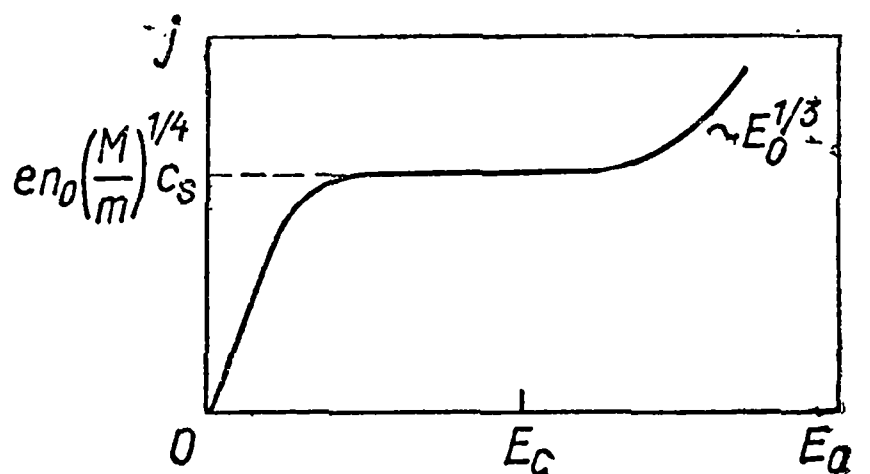


Рис. 52

§ 4.4. Нелинейное движение плазмы

Обратимся к аналогиям, хорошо известным из гидродинамики. Например, звуковая волна большой амплитуды в газе из-за нелинейных эффектов начинает укручаться [25]. Это связано с тем, что в точках пространства, где амплитуда волны максимальна, максимально и возмущение давления. Скорость звука, которая определяется градиентом давления, также велика, а возмущения в гидродинамике переносятся с «местной» скоростью звука. Поэтому со временем происходит деформация профиля возмущения, приводящая при достаточно больших амплитудах к образованию ударных волн. В плазме аналогичную роль может играть дисперсия. Рассмотрим ионно-звуковую волну конечной амплитуды и пренебрежем затуханием на электронах и ионах (это означает, что можно пользоваться гидродинамическим приближением):

$$M \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e \left[n_i - n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{T_e} \right) \right]. \quad (4.85)$$

Последнее слагаемое в правой части третьего уравнения (4.85) описывает больцмановское распределение электронов в электрическом поле, потенциал которого равен φ .

Если пренебречь нелинейными членами $v_i \partial v_i / \partial x$, $(n_i - n_0)v_i$, φ^2 и т. д., то получим уравнения, описывающие обычную ионно-звуковую волну. Будем считать, что все члены в уравнениях (4.85) одного порядка, и попытаемся найти решение в виде установившейся нелинейной волны, скорость и амплитуда которой не меняются во времени. Для этого потребуем, чтобы неизвестные величины n_i , v_i , φ зависели от комбинации $\xi = x - ut$, где u — скорость волны. Тогда система (4.85) примет вид

$$\left. \begin{aligned} M(v_i - u)v_i' &= -e\varphi'; & [n_i(v_i - u)]' &= 0; \\ \varphi'' &= -4\pi e [n_i - n_0 \exp(e\varphi/T_e)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по ξ . Считая, что при $\xi \rightarrow \infty$ ($x \gg ut$), т. е. там, куда волна еще не дошла, концентрация ионов равна n_0 , $\varphi = 0$, $v_i = 0$, проинтегрируем первое и второе уравнения (4.86) с указанными граничными условиями. Подставляя результаты в уравнение Пуассона [третье уравнение (4.86)], получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для потенциала φ :

$$\varphi' = 4\pi n_0 e \left\{ u / \sqrt{u^2 - 2e\varphi/M} - \exp(e\varphi/T_e) \right\}.$$

Это напоминает уравнение движения частицы в потенциальном поле: φ играет роль координаты, а ξ — времени. Выражение, стоящее в правой части, при этом можно рассматривать как силу

$F = \partial U / \partial \varphi$, где U — потенциальная энергия. Из закона сохранения энергии для такого «осциллятора», находящегося в «потенциальном поле», следует

$$\frac{1}{2} (\varphi')^2 + U = \frac{1}{2} (\varphi')^2 + 4\pi n_0 e \left[-\frac{uM}{e} \sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}} - \frac{T_e}{e} \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) \right] = \text{const.} \quad (4.87)$$

Если изобразить фазовую плоскость φ' , φ , то в зависимости от выбора константы можно сконструировать различные периодические решения (рис. 53). Особый случай при этом представляет кон-

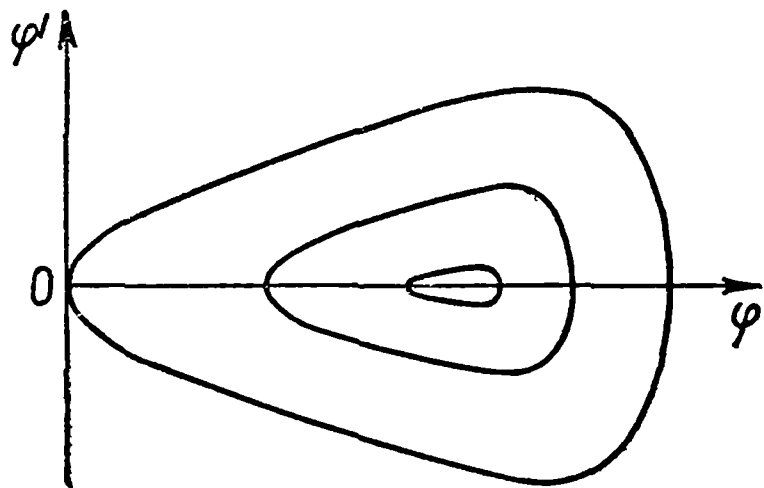


Рис. 53

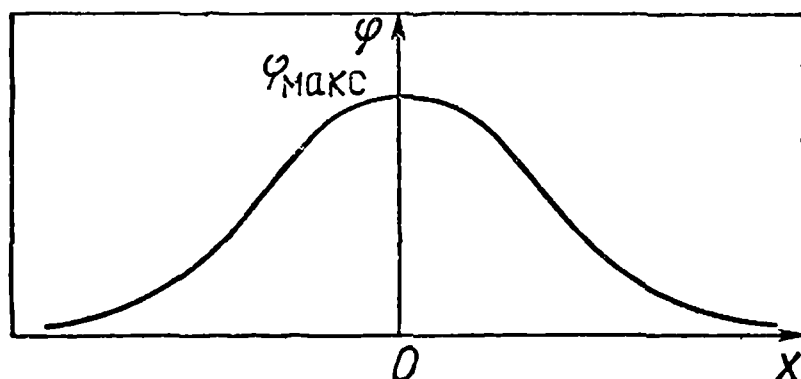


Рис. 54

станта, выбранная из условия $\varphi' \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 0$, т. е. $\text{const} = -4\pi n_0 (Mu^2 + T_e)$. На рисунке этот случай соответствует внешней кривой. Мгновенная «фотография» образующейся при этом волны представлена на рис. 54.

Здесь x отсчитывается от точки, где потенциал волны максимален в фиксированный момент. Найдем скорость распространения такой волны u как функцию $\varphi_{\text{макс}}$. Для этого при найденном значении константы положим в уравнении (4.87) $\varphi' = 0$ при $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$. В результате получим

$$u^2 = \frac{T_e}{2M} \frac{[\exp(e\varphi_{\text{макс}}/T_e) - 1]^2}{\exp(e\varphi_{\text{макс}}/T_e) - 1 - e\varphi_{\text{макс}}/T_e}. \quad (4.88)$$

Для малых амплитуд $e\varphi_{\text{макс}}/T_e \ll 1$ u стремится, как и должно быть, к скорости звука $\sqrt{T_e/M}$, и, разлагая выражение (4.87) по $e\varphi/T_e \ll 1$, можно получить профиль потенциала в уединенной волне (solitary wave), или солитоне [138].

При амплитуде потенциала $\varphi_{\text{макс}}$, большей некоторой, происходит опрокидывание волны, т. е. движение становится многопоточным. Одной точке пространства при этом может соответствовать две или больше скоростей ионов, т. е. «температура» ионов становится отличной от нуля и необходимо переходить к кинетическому описанию. Это происходит, когда ионы уже не обладают достаточной энергией для того, чтобы пройти через потенциальный барьер,

т. е. $Mu^2/2 < e\varphi_{\text{макс}}$. Математически это соответствует тому, что в выражении (4.87) подкоренные выражения становятся отрицательными при $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$, $\varphi' = 0$. Полагая в формуле (4.88) $u^2 = 2e\varphi_{\text{макс}}/M$, получим трансцендентное уравнение для определения $e\varphi_{\text{макс}}$. Его корень $e\varphi_{\text{макс}} \approx 1,3 T_e$ соответствует скорости $u = 1,6 \sqrt{T_e/M}$.

Солитоны могут существовать лишь при определенном законе дисперсии. Это связано с тем, что спектральное разложение периодических (даже нелинейных) волн содержит дискретные значения ω и k , в то время как разложение профиля солитона имеет сплошной спектр. Поэтому нелинейные периодические волны могут существовать при любом лишь бы нелинейном законе дисперсии. Для существования же стационарного профиля солитона волны необходимо, чтобы участкам профиля с большей амплитудой соответствовали меньшие скорости распространения возмущения. Только в этом случае фронт волны будет укрущаться. Это означает, что участкам профиля с большими амплитудами должны соответствовать меньшие групповые скорости в линейной теории. Наиболее крутые участки, соответствующие большим k , должны двигаться с меньшей скоростью, чем пьедестал волны, так как при этом влияние нелинейности и связанного с ним увеличения скорости будет компенсироваться уменьшением $d\omega/dk$. Именно таким законом дисперсии обладает ионно-звуковая волна при $T_e \gg T_i$, $\omega = \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1+1/k^2 r_{De}^2}}$, у которой групповая скорость при увеличении k падает от c_s до нуля. Если бы закон дисперсии был обратным, то волны должны были бы в нелинейном случае формировать солитоны разряжения.

Поскольку диссипативные эффекты отсутствуют, состояние плазмы перед волнами и после них остается тем же, т. е. нагрева не происходит. Поэтому в рассматриваемом идеализированном случае невозможно образование ударных волн в системе, когда состояния среды до и после волны различаются. Хорошо известно, что решения, описывающие такие волны, получаются в гидродинамике при учете в уравнениях вязкости среды [25].

Казалось бы, в бесстолкновительной плазме отсутствуют механизмы, приводящие к диссипации энергии. Однако на ряде

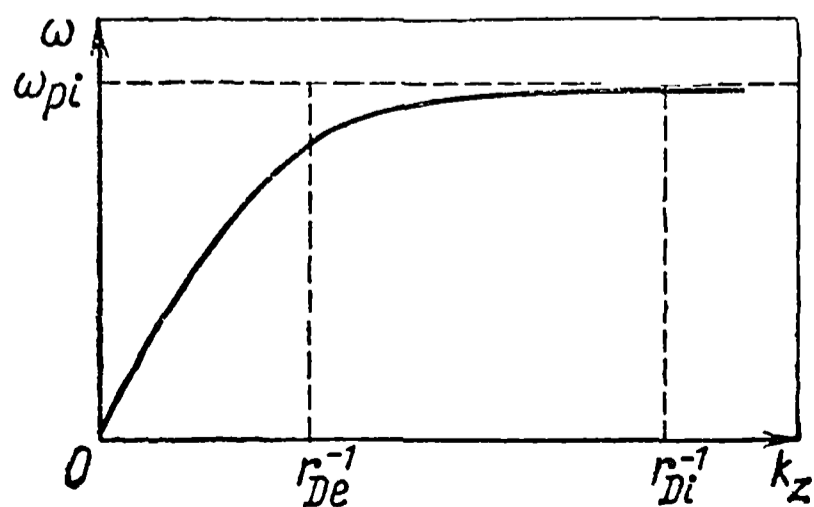


Рис. 55

примеров было показано, что в плазме существует бесстолкновительное затухание и можно даже вводить эффективную частоту столкновений, приводящую к диссипации энергии. Для эксперимента наиболее интересен случай распространения магнитно-звуковой волны большой амплитуды поперек магнитного поля. Известно (см. гл. 3), что

магнитно-звуковая волна, распространяющаяся поперек магнитного поля, когда $\omega_{pe} > \sqrt{\omega_{He}\omega_{Hi}}$, имеет зависимость $\omega(k)$, похожую на соответствующую зависимость для ионно-звуковой волны (рис. 55).

Дисперсия, т. е. отклонение зависимости $\omega(k)$ от линейной, связана с учетом инерции электронов, поэтому при описании нелинейного движения понадобятся уравнения движения для электронов и ионов. Кроме того, так как магнитно-звуковая волна не потенциальна, необходимо пользоваться уравнениями Максвелла. Возмущенное магнитное поле параллельно \mathbf{H}_0 , а электрическое поле имеет две компоненты: вдоль направления распространения волны — вдоль оси x , определяемую из условия квазинейтральности, и вдоль оси z , определяемую из уравнений Максвелла. Магнитное поле, как всегда, считается направленным вдоль оси z . Током смещения в уравнениях Максвелла можно пренебречь, так как $\omega/kc_s \ll 1$. Переходя к переменной $\xi = x - ut$ и введя обозначения $m_e = m$, $m_i = M$, получим следующую систему уравнений:

$$m_{i,e} v'_{xi,e} (v_{xi,e} - u) = \pm eE_x \pm (e/c) v_{yi,e} H; \quad (4.89)$$

$$m_{i,e} v'_{yi,e} (v_{xi,e} - u) = \pm eE_y \mp (e/c) v_{xi,e} H; \quad (4.90)$$

$$E'_y = (u/c) H'; \quad -H' = (4\pi/c) en (v_{yi} - v_{ye}); \quad (4.91)$$

$$[n_{i,e} (v_{xi,e} - u)]' = 0; \quad n_i = n_e = n. \quad (4.92)$$

Из уравнений (4.92) вытекает равенство скоростей электронов и ионов вдоль оси x , что связано с условием квазинейтральности. Исключив из уравнений все неизвестные величины, кроме H , как и в случае ионно-звуковой волны, получим, пренебрегая членами порядка m/M [140]:

$$\begin{aligned} -\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2 u} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{dH}{d\xi} \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right) \right] \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right) = \\ = \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right) H + uH_0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\begin{aligned} -a^2 H' \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right)^2 = \frac{(H^2 - H_0^2)^2 - 16\pi n_0 Mu^2 (H - H_0)^2}{16\pi n_0 M}; \\ a = \frac{c}{\omega_{pe}}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Как и в предыдущем случае, при различных значениях c получаются разные интегральные кривые на фазовой плоскости H' , H (рис. 56).

Все интегральные кривые описывают периодические волны конечной амплитуды. Исключение составляет лишь внешняя кривая,

соответствующая $c = 0$, когда $H' = 0$ при $H = H_0$. Этот случай соответствует солитону. Уравнение (4.93) при этом принимает вид

$$\pm aH' = \left\{ (H - H_0) \left/ \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u \right) \right. \right\} \sqrt{u^2 - \frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 M}}. \quad (4.95)$$

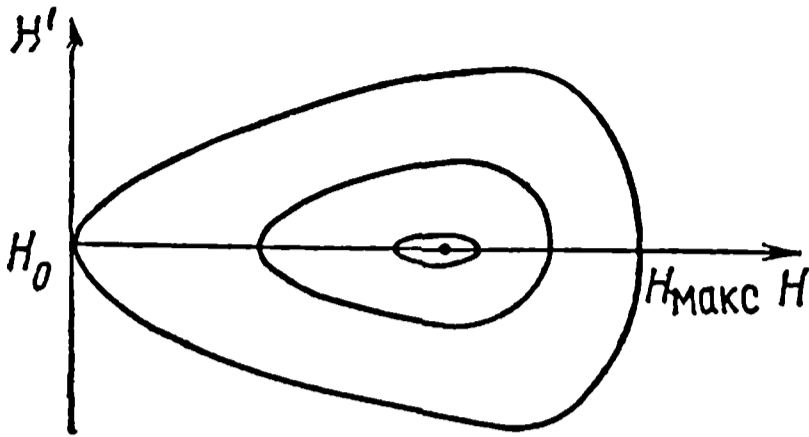


Рис. 56

Если выбирать определенный знак в уравнении (4.95), нельзя построить физически разумное решение на всей оси ξ . Однако существуют решения, непрерывные всюду, включая вторую производную, в которых при некоторых $\xi = \xi_1$ производная H' меняет знак. При этом H достигает максимального значения $H_{\text{макс}}$. Полагая $H' = 0$ и $H = H_{\text{макс}}$, получаем из уравнения

(4.95) связь скорости волны u с $H_{\text{макс}}$:

$$u^2 = (H_{\text{макс}} + H_0)^2 / (16\pi n_0 M). \quad (4.96)$$

При малых возмущениях, когда $H_{\text{макс}} \rightarrow H_0$, получаем, что $u = v_A$. Для малых амплитуд можно получить аналитическое выражение профиля волны. В отличие от ионно-звуковых волн, где ширина одиночного импульса возмущения потенциала порядка дебаевского радиуса r_{De} , в данном случае одиночный импульс магнитного поля имеет ширину порядка c/ω_{pe} . Из уравнения (4.93) видно, что действительное решение существует не при всех значениях u , а лишь если

$$u < (H^2 - H_0^2) / (8\pi n_0 M u). \quad (4.97)$$

В противном случае, как нетрудно проверить, $n_{i,e}$ обращается в бесконечность или может даже стать отрицательной. Следующее отсюда условие для $H_{\text{макс}}$

$$(H_{\text{макс}}^2 - H_0^2) / (8\pi n_0 M u) > (H_{\text{макс}} + H_0)^2 / (16\pi n_0 M u) \quad (4.98)$$

сводится к соотношению [139]

$$H_{\text{макс}} < 3H_0, \quad (4.99)$$

или $u < 2v_A$.

В цилиндрической геометрии с магнитным полем вдоль оси z волна распространяется по радиусу от периферии, где было создано возмущение магнитного поля, к центру [140]. Если в системе имеется достаточно мощный механизм диссипации энергии, это может привести к образованию ударной волны. Действительно, в этом случае интегральные кривые в фазовой плоскости H', H окажутся незамкнутыми и, начинаясь в точке $H = H_0$ в передней части фронта, будут заканчиваться в точке $H \neq H_0$.

Обратимся к исходной системе (4.89)—(4.92), в которую включим силу трения между электронами и ионами. Она может быть вызвана кулоновскими столкновениями и ограничением скорости электронов из-за возбуждения неустойчивости. Неустойчивость, например, может возникнуть из-за движения электронов вдоль оси y при $v_{ye} > c_s$.

Будем считать по-прежнему, что $H^2/8\pi \gg n_0 T_e$ и даже $(H - H_0)^2/8\pi \gg n_0 T_e$; кроме того, будем считать, что $u/c \ll 1$, и пренебрежем m/M . Тогда, переходя в систему координат, движущуюся со скоростью u , уравнения (4.89) — (4.92) можно переписать следующим образом:

$$(d/dx)(nv) = 0; \quad (d/dx)(Mnv^2/2 + H^2/8\pi) = 0; \quad (4.100)$$

$$m n v dv_y/dx = -enE_y + (e/c)nvH - \nu_{эф} m n v_\varphi; \quad (4.101)$$

$$E_y = (u/c)(H - H_0); \quad dH/dx = (4\pi ne/c)v_y. \quad (4.102)$$

Здесь $v = v_{xi} = v_{xe}$, v_y — компоненты скорости электронов; $\nu_{эф}$ — эффективная частота столкновения для движения электронов относительно ионов вдоль оси y . Если исключить все переменные, кроме H , получим уравнение

$$-a^2 d^2 H/dx^2 = H_0 - H + H(H^2 - H_0^2)/(8\pi n_0 Mu^2) + (a^2/u)\nu_{эф} dH/dx. \quad (4.103)$$

При исключении переменных учтено, что когда $x \rightarrow \infty$ (пространство перед фронтом волны), $nv = -n_0u$, $H = H_0$. Отличие этого уравнения от (4.93) состоит в том, что уравнение (4.93) записано в лабораторной системе координат и в уравнении (4.103) учтена сила трения. Таким образом, уравнение (4.103) описывает движение ангармонического осциллятора с трением. Форма потенциальной ямы имеет вид

$$U(H) = (1/2)(H - H_0)^2 [(H + H_0)^2/(16\pi n_0 Mu^2) - 1]. \quad (4.104)$$

Поведение потенциала $U(H)$ изображено на рис. 57. Значение H^* , при котором $U(H)$ имеет минимальное значение, определяется формулой

$$H = H^* = -H_0/2 + \sqrt{8\pi n_0 Mu^2 + H_0^2/4}. \quad (4.105)$$

Перед фронтом волны магнитное поле является невозмущенным с напряженностью H_0 . Поведение поля на фронте волны можно установить из уравнения (4.103), напоминая уравнение движения частицы в поле с потенциалом $U(H)$. В отсутствие силы трения ($\nu = 0$)

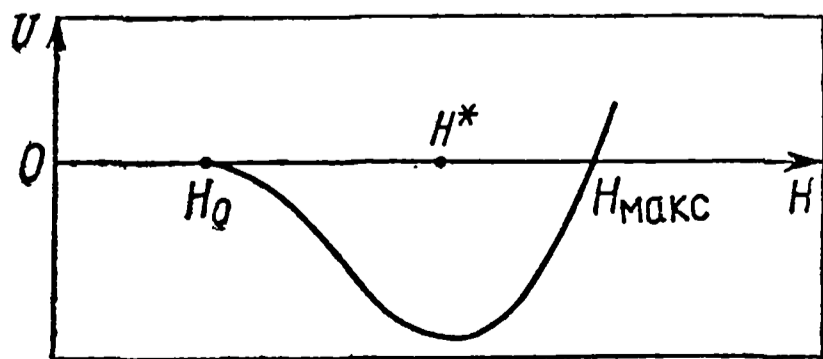


Рис. 57

магнитное поле осциллировало бы в пространстве, меняясь от H_0 до $H_{\text{макс}}$ подобно тому, как меняется координата частицы в потенциальной яме. При наличии силы трения ($\nu \neq 0$) амплитуда таких осцилляций должна уменьшаться и в конце концов H достигнет постоянного значения, равного H^* . Если затухание за период мало, то можно, усреднив магнитное поле по периоду колебаний, найти, как оно зависит от координаты x_0 [139]. Фронт волны при этом будет состоять из солитонов с длиной порядка c/ω_{pe} , амплитуда которых медленно убывает. Если не интересоваться тонкой структурой осцилляций на фронте волны, можно говорить о некоторой эффективной ширине фронта ударной волны. Для уравнения (4.103) характерная длина затухания осцилляции δ определяется диссипативным членом и составляет порядка u/ν . Разумеется, формулой $\delta \sim u/\nu$ можно пользоваться как оценочной.

Когда изменение магнитного поля по x приводит к появлению направленной скорости электронов, превышающей порог возбуждения ионно-звуковых волн, оценить ширину фронта ударной волны можно следующим образом. Как следует из § 4.3, v_y ограничивается скоростью αc_s , где $\alpha = (M/m)^{1/4}$. Тогда из второго уравнения (4.102) следует $H_0/\delta \sim (4\pi n_0 e/c)\alpha c_s$, так как при $\Delta H \sim H_0$ $\Delta n \sim n_0$. Отсюда находим, что

$$\delta \sim (c/\omega_{pe}) (M/m)^{1/4} \sqrt{H_0^2 / (8\pi n_0 T_e)}. \quad (4.106)$$

Если учесть, что T_e порядка температуры за фронтом и при $\Delta H \sim H$ имеем $H_0^2 \geq 8\pi n_0 T_e$, то получим, что ширина фронта пропорциональна $(M/m)^{1/4}$. Эта зависимость подтверждена экспериментально [140]. Таким образом, сильные ударные волны можно в принципе использовать для импульсного нагрева бесстолкновительной плазмы.

§ 4.5. Бесстолкновительные тепловые волны

Для выяснения механизма распространения тепла вдоль магнитного поля рассмотрим следующую задачу. Пусть в момент $t = 0$ левое полупространство $x < 0$ занято горячей плазмой, у которой $T_{\perp} = T_{\parallel} = T$, а полупространство $x > 0$ занято холодной плазмой с температурой $T_x \ll T$. Температуру ионов будем считать равной нулю, магнитное поле направлено вдоль оси x . В следующие моменты горячие частицы будут выходить в полупространство $x > 0$ из-за градиента давления. Если бы это были нейтральные частицы, то в отсутствие столкновений происходил бы свободный разлет. В рассматриваемом случае этого не будет. Как только горячие частицы двинутся вправо, тотчас же образуется электрическое поле, которое должно тормозить горячие электроны. Если холодные электроны по какой-либо причине не могут двигаться (например, большая сила трения для холодных электронов из-за кулоновских столкновений с ионами), то образуется электрическое поле, уравновешива-

вающее градиент давления, и горячие электроны останавливаются. После ухода холодных электронов влево горячие получают возможность двигаться дальше, так как электрическое поле уменьшилось.

Таким образом, может возникнуть свособразная волна замещения, или бесстолкновительная тепловая волна. Скорость ее определяется скоростью движения холодных электронов. Заметим, что скорость холодных электронов отнюдь не равна $v_{Tx} \sim \sqrt{T_x/m}$. Она значительно больше и определяется той разностью потенциалов, которую прошел холодный электрон. Если разность потенциалов порядка T_e , то скорость волны должна быть порядка $\sqrt{T/m} \gg c_s$.

Будем искать волну с характерной длиной, много большей дебаевского радиуса, и рассматривать ее эволюцию за время, много большее ω_{pe}^{-1} . В рассматриваемых масштабах времени образование волны произошло мгновенно. Для описания установившегося процесса можно воспользоваться для горячих электронов кинетическим уравнением без столкновительного члена, а для холодных — уравнениями гидродинамики. Так как рассматриваются длины волн, много большие дебаевского радиуса, то вместо уравнения Пуассона можно воспользоваться уравнением квазинейтральности. Если в качестве начального выбрать условие, что при $t = 0$ в области $x < 0$ находятся горячие электроны концентрации n_0 , а в области $x > 0$ — холодные электроны той же концентрации, то система уравнений, как и в случае разлета плазмы в вакуум [141], имеет автомодельное решение. Это обстоятельство связано с отсутствием в уравнениях параметров с размерностью длины или времени.

Введем переменные $\tau = (x/t) (m/2T)^{1/2}$; $V = v (m/2T)^{1/2}$; $V_x = v_x (m/2T)^{1/2}$; $\Phi = e\varphi/2T$; $N = n/n_0$; $f = (1/n_0) (m/2T) \sqrt{\pi}$. Исключая величины Φ , V_x , N , используя условие $\Phi = 0$, $V_x = 0$ при $\tau = -\infty$, получаем уравнение для f :

$$(V - \tau) \partial f / \partial \tau - (1/N) (\partial N / \partial \tau) \left[(1/N) \int_{-\infty}^{\tau} N d\tau \right]^2 \partial f / \partial V = 0;$$

$$N = 1 - (1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f dV. \quad (4.107)$$

Обозначая коэффициент перед $\partial f / \partial V$ в уравнении (4.107) $F(\tau)$, получаем уравнение для характеристик

$$dV/d\tau = -F(\tau)/(V - \tau). \quad (4.108)$$

Вдоль линий $V(\tau)$, определяемых уравнением (4.108), функция f сохраняет постоянное значение. Величина $F(\tau)$ неотрицательна, $(\partial/\partial\tau) \ln N \geq 0$; из (4.108) следует, что при $V > \tau$ $dV/d\tau < 0$, а при $V < \tau$ $dV/d\tau > 0$.

Можно сказать, что при $V > \tau$ происходит замедление горячих частиц, отдающих энергию поступательного движения на создание потенциала. Отразившись от фронта волны при $V = \tau$, горячие частицы ускоряются в самосогласованном поле. Уже это обстоятельство указывает на то, что картина сложнее той, которая описывалась вначале, а именно, что горячие частицы могут отражаться от стенки созданной ими потенциальной ямы, как это имеет место, например, при бoльцмановском распределении электронов в поле тяжелого иона. Поэтому уже нельзя говорить, что скорость движения фронта порядка $(T/m)^{1/2}$, так как имеет место не только замещение холодных электронов горячими, но и отражение горячих электронов в самосогласованном поле. Линия $V = \tau$ на плоскости $V\tau$ является особой. Исследуем этот важный случай подробнее. Начнем с равенства $F(\tau) = 0$, что соответствует свободному разлету. При этом уравнение для характеристик (4.108) можно записать в виде

$$(dV/d\tau)(V - \tau) = 0. \quad (4.109)$$

Решение уравнений (4.109) находится тривиально; или $V = \tau$, или (при $V \neq \tau$) $V = \text{const}$. Если при $\tau = -\infty$ функция распределения $f = f_M$, то

$$f(v, \tau) = f_M(V) \theta(V - \tau); \quad \theta(V - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } V > \tau; \\ 0 & \text{при } V < \tau, \end{cases} \quad (4.110)$$

так как при $\tau = -\infty$ функция распределения $f_M(V)$ расположена выше линии $V = \tau$ (частиц со скоростями $V = \pm\infty$ нет). Таким образом, характеристики не заходят в область $V < \tau$.

Рассмотрим теперь поведение характеристик при $F(\tau) \neq 0$ в окрестности точки $V = \tau$. Пусть некоторая характеристика пересекает линию $V = \tau$ в окрестности точки $\tau = \tau_0$. Заменим $F(\tau)$ на $F(\tau_0)$. Уравнение характеристик при этом примет вид

$$dV/d\tau = -F(\tau_0)/(V - \tau), \quad \text{или} \quad d(V - \tau)/d\tau = -1 - F(\tau_0)/(V - \tau).$$

Его решением с начальным условием $V = \tau_0$ при $\tau = \tau_0$ будет функция

$$\tau = V + F(\tau_0) \{1 - \exp[(V - \tau_0)/F(\tau_0)]\}, \quad (4.111)$$

т. е. $\frac{dV}{d\tau} = -\frac{F(\tau_0)}{V - \tau} = \frac{1}{1 - \exp[(V - \tau_0)/F(\tau_0)]}$. Из последнего соотношения следует, что при $F(\tau_0) \rightarrow 0$ получаем $dV/d\tau \rightarrow 1$ при $V < \tau_0$; $dV/d\tau \rightarrow 0$ при $V > \tau_0$. Как и должно быть, при $F(\tau_0) \rightarrow 0$ переходим к случаю свободного разлета.

Пусть теперь $F(\tau_0) \neq 0$, но $F(\tau_0) \rightarrow 0$, что справедливо в передней и задней частях волны, где электрическое поле мало. Если отойти от точки τ_0 так, чтобы выполнялось неравенство $|\tau - \tau_0| > F(\tau_0)$ (но, конечно, $|\tau - \tau_0| < |\tau_0|$), то из выражения (4.111) следует, что $\tau = V + F(\tau_0)$, т. е. характеристика стремится к линии, параллельной прямой $V = \tau$ и проходящей ниже по-

следней на $F(\tau_0)$ (рис. 58). Когда $\tau \rightarrow -\infty$, $F(\tau_0) \rightarrow 0$ и, следовательно, характеристики стремятся к линии $V = \tau$. Таким образом, характеристики, пересекающие линию $V = \tau$ в различных точках τ , имеют асимптоту $V = \tau$. Пересекаться характеристики не должны ни в одной точке, так как $dV/d\tau$ уменьшается с увеличением $|V - \tau|$. Интересно, что при $\tau = -\infty$ обязательно появятся ускоренные частицы, движущиеся влево. Так как все характеристики стремятся к одной линии $V = \tau$, то число таких частиц $\int f dV$ ничтожно.

Для точного решения задачи необходимо провести численный расчет. Отметим, что схема расчета сложнее, чем в работе [142], так как при данном значении τ V имеет два значения (см. рис. 58), что связано с отражением частиц от фронта. При $\tau = -\infty$

(достаточно $\tau = -2$) задаются максвелловская функция распределения частиц по скоростям и углы наклона характеристик к оси τ . Пользуясь тем, что функция распределения не меняется вдоль характеристики, можно найти $F(\tau)$, а следовательно, и $dV/d\tau$ в точке $\tau = -2 + h$, где h — шаг. Следует отметить, что каждой из n характеристик, выходящих из области $V > \tau$, соответствуют их продолжения в области $V < \tau$, расположенные относительно линии $V = \tau$ (к которой они асимптотически приближаются) в обратном порядке (см. рис. 58). Вид функций распределения горячих электронов при различных τ изображен на рис. 59. Видно, что о свободном разлете можно говорить лишь при $\tau \geq 0,5$ и что свободно разлетающихся частиц меньше 10%. Большая же часть горячих электронов захвачена самосогласованным потенциалом. Приблизительно половина горячих электронов разлетается со скоростью $0,2 (2T/m)^{1/2}$ ($\tau = 0,2$), т. е., как уже отмечалось, скорость волны существенно меньше v_{Te} , но все-таки много больше c_s .

Полученная функция распределения электронов по скоростям неустойчива относительно возбуждения ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний, так как, во-первых, холодные и горячие электроны движутся один относительно другого и, во-вторых, электроны движутся относительно ионов. В одномерном случае ($\omega_{He} \gg \omega_{pe}$) влияние таких неустойчивостей на скорость движения волны несущественно. Действительно, согласно одномер-

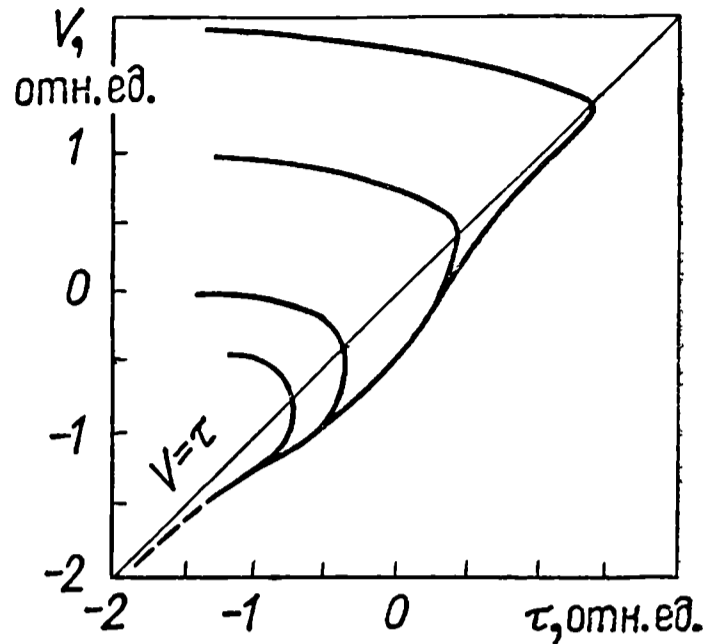


Рис. 58

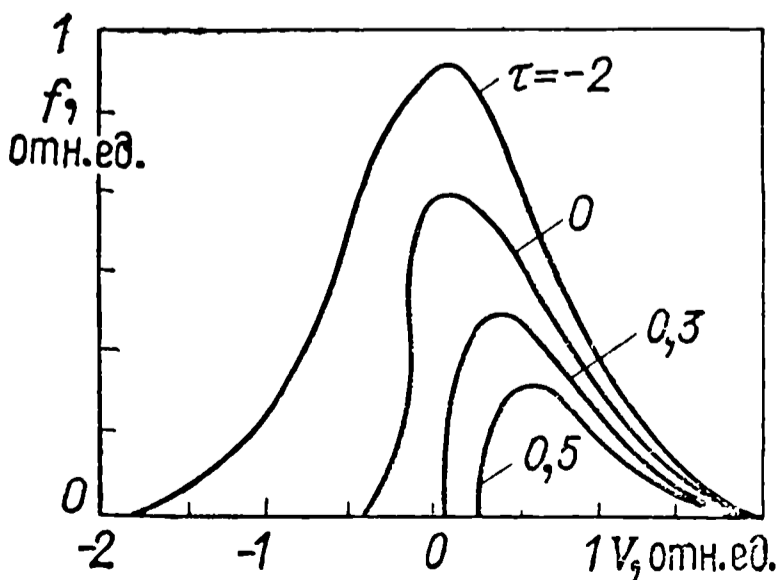


Рис. 59

ной квазилинейной теории [25] в области между V_x и $\langle V \rangle = \int f(V) dV$ установится плато на функции распределения горячих электронов за счет возбуждения плазменных колебаний и при $V_x \leq V \leq 0$ — плато на функции распределения холодных электронов за счет возбуждения ионно-звуковых колебаний. При этом по-прежнему $T > T_x$. В той области значений τ , где нет свободного разлета и где в основном сосредоточены частицы, это не приведет к заметному изменению скорости движения волны. Для значений τ , при которых между функцией распределения горячих и холодных электронов появляется область значений V , где $f = 0$ (при $\tau > 0,3$), установление плато на функции распределения горячих электронов приведет к уменьшению примерно в два раза средней скорости движения группы горячих электронов, разлетающихся свободно. Однако, поскольку свободно разлетающихся частиц очень мало, это не скажется на скорости движения основной массы электронов, а следовательно, и на характере движения волны. К гораздо более существенным эффектам может привести рассеяние холодных электронов на ионно-звуковых колебаниях, когда $\omega_{He} < \omega_{r,e}$. Известно, что это приводит к ограничению скорости движения холодных электронов значением $\alpha \sqrt{T_x/M}$, где $\alpha = \text{const} > 1$ [133]. При этом одновременно происходит нагрев холодных электронов, т. е. увеличение T_x . Что касается горячих электронов, то даже без учета неустойчивостей они были распределены почти по закону Максвелла, следовательно, их концентрация была связана с самосогласованным потенциалом следующим образом: $n_r \sim \exp(e\phi/T)$.

Коллективное «трение» холодных электронов об ионы приводит к увеличению абсолютного значения напряженности электрического поля и, следовательно, F в уравнении (4.108). Чем больше F , тем больше наклон характеристик $dV/d\tau$ при $V > \tau$ и тем меньше свободно разлетающихся частиц; следовательно, тем ближе распределение концентрации горячих электронов к больцмановскому.

Теперь рассмотрим задачу, которая больше соответствует эксперименту с учетом коллективных эффектов. Пусть в начальный момент область $-L/2 < x < L/2$ занята горячими электронами с концентрацией n_0 , равной концентрации ионов. Остальная часть пространства $|x| > L/2$ занята холодной плазмой той же концентрации. Чтобы определить закон движения волны, воспользуемся для холодных электронов уравнением движения

$$v_x = \alpha \sqrt{T_x/M} \quad (4.112)$$

(эквивалентным уравнению $v_x = eE/m\nu_{эф}$); уравнением непрерывности, а также уравнением, определяющим рост температуры:

$$\partial T_x / \partial t = e v_x \partial \phi / \partial x. \quad (4.113)$$

Из уравнений (4.112), (4.113) и определения частоты эффективных столкновений следует, что $\nu_{эф} \approx (1/\tau) M/m\alpha^2$, т. е. эффективная частота убывает со временем, а это является следствием увели-

чения T_x . Горячие электроны можно считать распределенными по закону Больцмана

$$n_r = n_0 \exp [e\phi/T(x)], \quad (4.114)$$

причем зависимость $T(x)$ определяется уравнением адиабаты $T(x) = T(L/x)^{a-1}$, где a — показатель адиабаты. Если считать, что у горячих электронов энергия поперечного движения не передается продольному, то $a = 3$ (одномерная адиабата).

В действительности продольная температура горячих электронов T_{\parallel}^0 уменьшается, так как энергия продольного теплового движения расходуется на создание электрического поля и ускорение холодных электронов, поэтому довольно быстро T_{\parallel}^0 становится меньше поперечной температуры горячих электронов T_{\perp}^0 . В этих условиях ($T_{\parallel}^0 < T_{\perp}^0$) возможно развитие неустойчивостей на электронной циклотронной частоте ω_{He} , приводящих к выравниванию температур. Если инкремент этой неустойчивости больше характерного обратного времени движения фронта волны, то $T_{\parallel}^0 \approx T^0$ и $a = 5/3$. Необходимо записать еще одно уравнение, выражающее закон сохранения горячих электронов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n_r dx = n_0 L. \quad (4.115)$$

Отсюда следует, что $n_r \ll n_x$, $n_x \approx n_0$ при $x \gg L$, так как

$$n_r + n_x = n_0 \quad (4.116)$$

(здесь n_x — концентрация холодных электронов).

Для нахождения закона движения необходимо в уравнении непрерывности [142] выразить n_x и v_x через n_r . Будем искать решение для $x > L$. Так как скорость движения волны x/t есть скорость движения горячих электронов, то $v_x = (n_r/n_x) x/t$ и, следовательно, $tv_x/x = n_r/n_x \ll 1$. Поэтому уравнение непрерывности преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial n_x / \partial t + (\partial / \partial x) (n_x v_x) = - \partial n_r / \partial t + (\partial / \partial x) (n_0 v_x) - \\ - (\partial n_r / \partial x) v_x - n_0 \partial v_x / \partial x = 0. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Третье и четвертое слагаемые в правой части меньше первого и второго соответственно в $(n_r/n_0)^{-1}$ раз, поэтому ими можно пренебречь. Выражая теперь в уравнении (4.117) v_x через n_r , получаем

$$\begin{aligned} \partial^2 n_0 / \partial t^2 = (\partial / \partial x) (n_0 a c_{sx}) = (\partial / \partial x) \{ (n_0 \alpha^2 / M) \times \\ \times (\partial / \partial x) [T(L/x)^{a-1} \ln(n_r/n_0)] \}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Учитывая закон сохранения (4.115), из которого следует, что $n_r \sim L/x$, находим связь между x и t , или автомобильную переменную

$$x \sim L \left(\frac{\alpha \sqrt{T/M} t}{L} \right)^{2/a}. \quad (4.119)$$

Если $a = 5/3$, то $x/t \sim t^{1/5}$ почти постоянна во времени, при $a = 3$ $x/t \sim t^{1/3}$. Значение α в теории турбулентного нагрева не определяется точно. Известно лишь, что α больше единицы и меньше $\sqrt{M/m}$ [133]. Полагая $\alpha = 6$, $\alpha = 5/3$, можно получить удовлетворительное согласие с экспериментом.

Рассматривая влияние неустойчивостей на характер движения волны, ограничимся лишь ионно-звуковыми шумами и не будем учитывать влияние плазменных колебаний с частотой $\omega = \omega_{pe}$ и инкрементом $\gamma \sim \omega_{pe} (n_r / n_0) (x/tv_{Te})^3$. В начале процесса инкремент меньше максимального инкремента ионно-звуковой неустойчивости, поэтому ионно-звуковые шумы можно не рассматривать. После того как в системе появятся эффективные столкновения основной массы электронов с ионами с частотой $\nu_{эф}$, плазменные волны не будут возбуждаться, если их инкремент γ меньше $\nu_{эф}$. Нетрудно видеть, что такое условие выполняется в течение времени, определяемого неравенством $\gamma < \nu_{эф}$, т. е. $t\omega_{pe} [(1/L)t(T/M)^{1/2}\alpha]^{1/a} < [(M/m)(1/\alpha^2)]^{1/2}$. Для характерных параметров лабораторного эксперимента это неравенство выполняется.

Установка для исследования тепловых волн (рис. 60) [142] состояла из цилиндрического вакуумного объема — стеклянной трубы диаметром 8 и длиной 300 см, которая помещалась в однородное магнитное поле. Длина соленоида, в котором создавалось квазипостоянное поле, 120 см, длительность импульса магнитного поля полусинусоидальной формы 15—30 мс. Напряженность поля в момент генерации тепловой волны 1 кЭ (в однородной части). Предварительная ионизация в объеме создавалась двумя в.ч.-генераторами 1, частота которых была 20 МГц, импульсная мощность 100 кВт. В центре вакуумного объема размещался ударный контур 4, который представлял собой узкий виток (диаметр 8, длина 2,5 см), надетый на трубу и питаемый от зарядного конденсатора через малоиндуктивный разрядник.

Ток в ударной цепи имел вид затухающей синусоиды с характерной частотой 1 МГц и длительностью 1 мс. Максимальное значение напряженности магнитного поля, создаваемого этим током, было порядка 1800 Э в центре витка.

Импульсное магнитное поле возбуждало в плазменном столбе косую нелинейную магнитно-звуковую волну. Интенсивное поглощение энергии этой волны приводило к нагреву электронной компоненты плазмы в достаточно ограниченном по длине участке вбли-

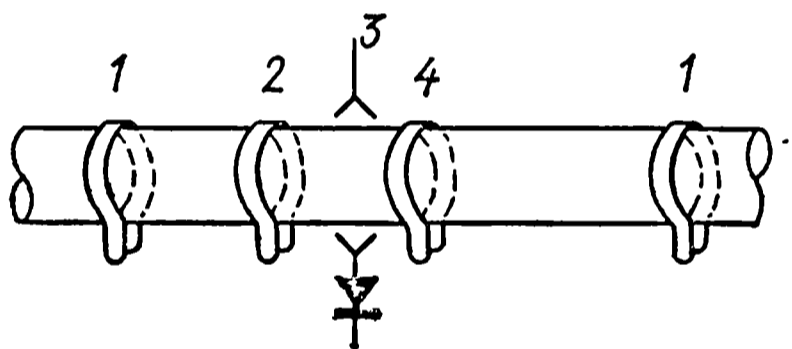


Рис. 60

зи ударного контура. Длительность нагрева подконтурной области была очень небольшой (несколько десятков наносекунд).

Последовательность операций в опытах была следующей. Сначала включались квазистатическое магнитное поле H_0 и одновременно в.ч.-генераторы, производившие предварительную иониза-

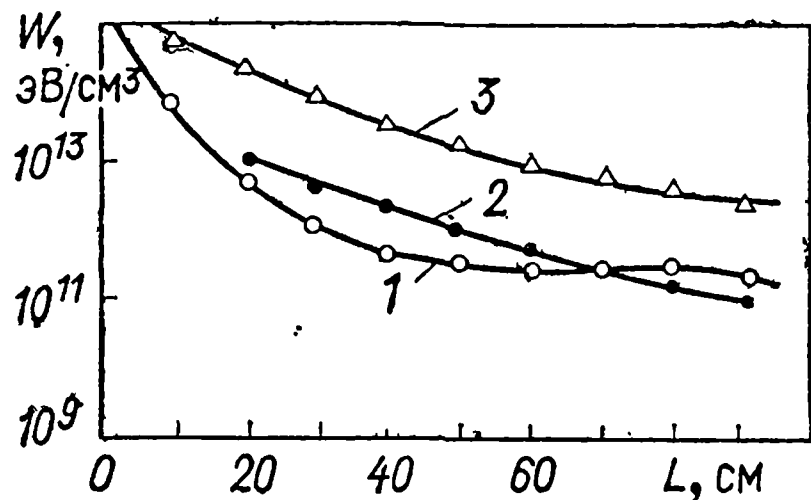


Рис. 61

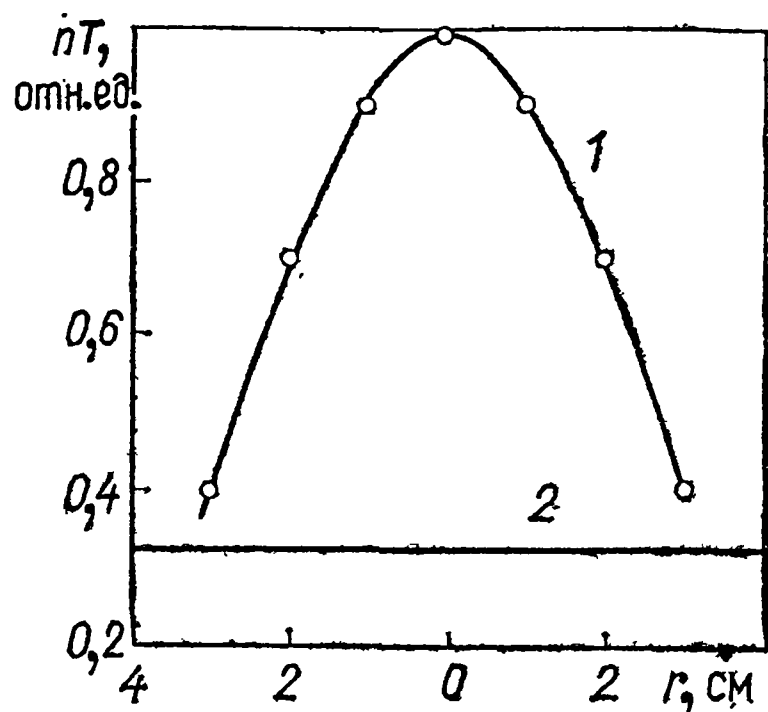


Рис. 62

цию газа; через несколько десятков микросекунд после включения генераторов происходил пробой и нарастала концентрация, что фиксировалось 8-мм диагностической аппаратурой 3. Затем в момент, который выбирался исходя из требований к начальным параметрам и H_0 , включался ударный контур и происходил нагрев плазмы до достаточно высокой температуры (до нескольких сот электронвольт) магнитно-звуковой волной в подконтурной области.

Давление плазмы измерялось внешним или внутренним диамагнитным зондом 2, который мог перемещаться вдоль разрядного объема. Сопоставление сигналов с диамагнитного и магнитного зондов позволило выделить истинный ход nT в зависимости от расстояния до центральной плоскости ударного контура.

Распределение энергии волны ($H^2/8\pi$), шумов ($E^2/8\pi$) и плазмы (nT) по длине плазменного столба показано на рис. 61 (1, 2, 3 соответственно). В двадцати сантиметрах от центральной плоскости ударного контура $nT \approx 10^{15}$ эВ/см³ $>$ $H^2/8\pi$.

Радиальное распределение, полученное внутренним диамагнитным зондом с кольцевой катушкой, имеет максимум на оси камеры (рис. 62) и близко к функции $J_0(kr)$; погрешность совпадения результатов измерений внутренним (кривая 1) и внешним (кривая 2) зондами при усреднении не выше 5%. Внутренний диаметр отверстия в катушке зонда, вводимого в плазму, не менее 12 мм, что на порядок выше ларморовского диаметра электронов для данного эксперимента. Перемещением зонда вдоль трубы получена серия осциллограмм, позволяющая судить о скорости распространения давления вдоль магнитного поля и характерном размере фронта.

Контрольные эксперименты, в которых фиксировалась плотность на фронте давления с помощью быстродействующего интер-

ферометра $\lambda = 8$ мм, позволили доказать, что возмущение плотности не превышает 10% исходной. Следовательно, энергия nT переносится волной тепла, движущейся со скоростью, в несколько раз большей, чем скорость ионно-звуковых волн $\sqrt{T_e M}$, и приближающейся к тепловой скорости электронов [142]. Физическую природу этого явления можно понять, если исследовать шумы на фронте. Для этого произведена серия измерений в диапазоне плазменной электронной частоты ω_{pe} . Измерения проводились вне и внутри плазменного столба. В последнем случае приемная штыревая диэлектрическая антенна вводилась с торца камеры внутрь плазменного объема. Эта серия экспериментов показала, что существенного надтеплого излучения в диапазоне частот ω_{pe} , $2\omega_{pe}$ нет. С другой стороны, прямым экспериментом с двойным электрическим зондом показано, что существуют интенсивные шумы в диапазоне ω_{pi} .

Контрольные эксперименты, выполненные с аргоном, показывают, что характерная частота шумов сдвигается примерно пропорционально $\sqrt{M(\text{H})/M(\text{Ar})}$. Кроме того, как показали измерения, выполненные магнитным зондом, в диапазоне ω_{pi} нет заметных шумов магнитной природы.

Отсюда можно получить экспериментальное значение степени турбулентности на фронте волны как отношение W/nT ; в условиях эксперимента оно равно 0,01.

Если концентрация горячих электронов в тепловой волне зависит от потенциала как $\exp(e\phi/T_e)$, то укрупнения фронта не происходит, следовательно, не образуется разрыв и первоначально крутой профиль концентрации горячих электронов расплывается. Рассмотрим условия, при которых происходит укрупнение фронта. Для этого запишем уравнения движения и нагрева холодных электронов в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= ac_s = a\sqrt{T_x/M}; \\ n_x (3/2) dT_x/dt &= jE_0 = en_x u d\phi/dx; \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial n_x/\partial t + (\partial/\partial x)(n_x u) &= 0; \quad n_x + n_r = n_0; \\ n_r &= n_r(\phi). \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

Последнее уравнение описывает зависимость концентрации горячих электронов от потенциала ϕ . Если электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, то $n_r(\phi) \sim \exp\{e\phi/T_e\}$. Вообще говоря, при произвольном виде функции распределения

$$n_r = \int_{-\infty}^{\infty} f(mv^2/2 - e\phi) dv, \quad (4.122)$$

т. е. функция распределения должна зависеть от интегралов движения, а сохраняющейся величиной при этом будет полная энергия \mathcal{E} электрона в поле с потенциалом ϕ :

$$\text{const} = mv^2/2 - e\varphi = \mathcal{E}. \quad (4.123)$$

При $f = n_r^0 (m/2\pi T_r)^{1/2} \exp(-\varepsilon/T_r)$, согласно формуле (4.122), $n_r(x) = n_r^0 \exp\{e\varphi/T_r\}$. Если учесть, что установка имеет конечные размеры, то функция распределения электронов может обращаться в нуль при больших значениях скорости (рис. 63).

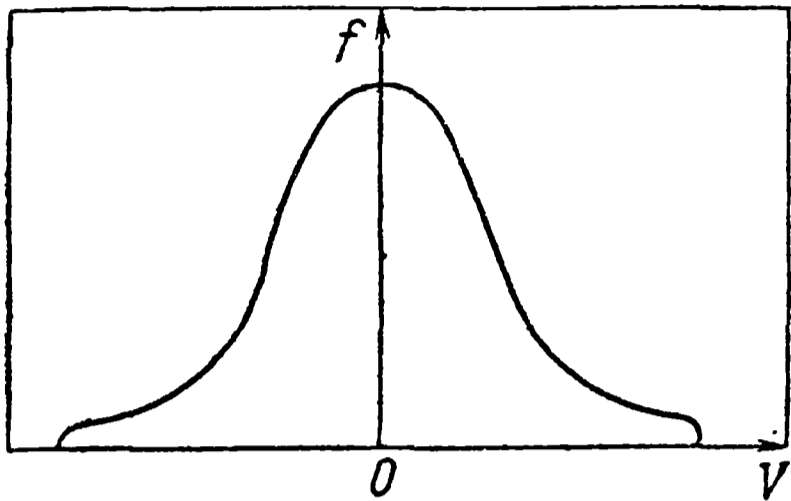


Рис. 63

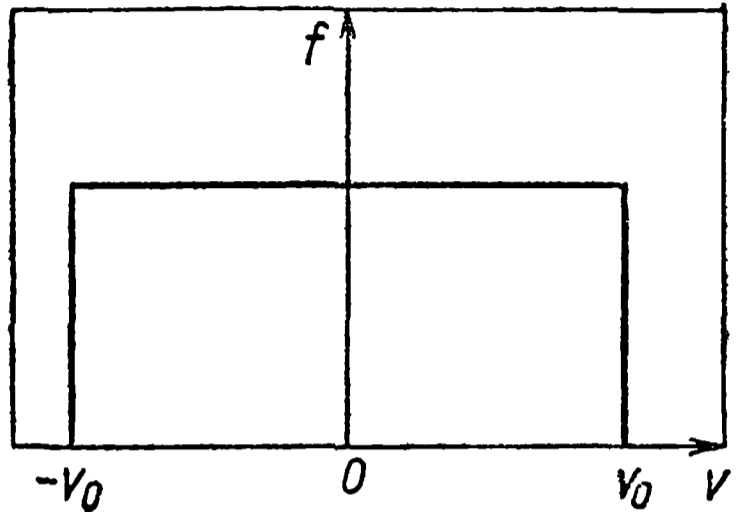


Рис. 64

При этом электроны в пространстве уже не будут распределены по закону Больцмана. В принципе к аналогичным результатам может привести и нагрев косой магнитно-звуковой волной. Во всяком случае точных измерений функции распределения не было, а измерение при помощи диамагнитного зонда дает только среднее значение $n_r T_r$.

Крайний предельный случай распределения электронов по скоростям имеет вид, изображенный на рис. 64. Поэтому, не задаваясь зависимостью $n_r(\varphi)$, исследуем решение уравнений (4.120), (4.121). Будем рассматривать для простоты случай $n_r^0 \ll n_0$. Результаты будут верны и для $n_r^0 \leq n_0$, однако при $n_r^0 \ll n_0$ уравнения значительно упрощаются. Для малой концентрации горячих электронов dT_x/dt можно заменить величиной $\partial T_x/\partial t$, а концентрацию холодных электронов n_x можно считать постоянной. Тогда, комбинируя уравнения (4.120), можно получить из системы (4.120), (4.121)

$$(3M/\alpha^2) du/dt = -e\partial\varphi/\partial x; \quad \partial n_r(\varphi)/\partial t = n_0 \partial u/\partial x. \quad (4.124)$$

При получении последнего уравнения использовано то, что $\partial n_r/\partial t = -\partial n_x/\partial t$ и $n_r \ll n_x \approx n_0$. Система (4.124) содержит неизвестные функции u и φ . Подобно тому как это делается в гидродинамике, можно попытаться найти частное решение уравнений, аналогичное волне Римана [25]. Для этого будем считать, что $u = u(\varphi)$. Тогда уравнения (4.124) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} (3M/\alpha^2) (du/dn_r) \partial n_r / \partial t &= -e (d\varphi/dn_r) \partial n_r / \partial x; \\ \partial n_r / \partial x &= n_0 (du/dn_r) \partial n_r / \partial x. \end{aligned} \right\} \quad (4.125)$$

Уравнения (4.125) связывают частные производные $\partial n_r / \partial t$ и $\partial n_r / \partial x$ одной и той же функции $n_r(x, t)$. Они будут совместными, если

$$\frac{e d\varphi / dn_r}{(3M/\alpha^2) du / dn_r} = -n_0 \frac{du}{dn_r}, \quad (4.126)$$

т. е. когда

$$du / dn_r = \pm \sqrt{-(e\alpha^2 / 3Mn_0) d\varphi / dn_r}. \quad (4.127)$$

При этом

$$\partial n_r / \partial t = \pm \sqrt{(e\alpha^2 / 3Mn_0) d\varphi / dn_r} n_0 \partial n_r / \partial x. \quad (4.128)$$

Последнее уравнение уже можно решать методом характеристик, подобно тому как решается бесстолкновительное кинетическое уравнение.

Характеристики можно определить из уравнения

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{n_0 [\pm \sqrt{(e\alpha^2 / 3Mn_0) d\varphi / dn_r}]}. \quad (4.129)$$

Сохраняется n_r , т. е. постоянны $\varphi = \varphi(n_r)$ и $d\varphi / dn_r$. Поэтому решение $n_r(x, t)$ будет произвольной функцией констант, полученных при интегрировании уравнения (4.129). Таким образом,

$$x = \pm \sqrt{(e\alpha^2 n_0 / 3M) d\varphi / dn_r} t + \xi, \quad (4.130)$$

где ξ — постоянная интегрирования, зависящая от n_r , т. е. $\xi = \xi(n_r)$. Величина $\xi(n_r)$ определяется начальным распределением концентрации горячих частиц по координате. Если участки фронта волны, имеющие большое значение n_r , движутся с большей скоростью, то фронт волны укрупняется, т. е. укрупнение имеет место при выполнении неравенства

$$(\partial / \partial n_r) \sqrt{(e\alpha^2 n_0 / 3M) d\varphi / dn_r} > 0 \quad (4.131)$$

или [145]

$$(\partial^2 n_r / \partial \varphi^2) \partial n_r / \partial \varphi < 0. \quad (4.132)$$

Рассмотрим сначала максвелловскую функцию распределения, когда $n_r \sim \exp(e\varphi / T)$. Получаем, что неравенство (4.132) не выполняется, т. е. первоначально резкое распределение плотности горячих электронов в пространстве расплывается со временем. Далее рассмотрим другой предельный случай, когда функция распределения имеет вид, изображенный на рис. 64. Получим

$$f = \begin{cases} n_{0r} / 2v_0 & \text{при } |v| < v_0; \\ 0 & \text{при } |v| > v_0. \end{cases}$$

В электрическом поле соответственно имеем

$$f = \begin{cases} n_r / 2v_0 & \text{при } |v| < \sqrt{v_0^2 + 2e\varphi/M}; \\ 0 & \text{при } |v| > \sqrt{v_0^2 + 2e\varphi/M}. \end{cases}$$

Отсюда

$$n_r = \int_{-\infty}^{\infty} f dv = \frac{n_0}{2v_0} \int_{-\sqrt{v_0^2 + 2e\varphi/M}}^{\sqrt{v_0^2 + 2e\varphi/M}} dv = n_{0r} \sqrt{1 + \frac{2e\varphi}{mv_0^2}}. \quad (4.133)$$

Подставляя соответствующие производные в неравенство (4.132), видим, что условие укрупнения фронта выполняется. Укрупнение фронта согласно теории ударных волн продолжается до тех пор, пока не образуется скачок $n_r(x)$, движущийся с некоторой скоростью.

Найдем скорость движения такого скачка. Для этого воспользуемся следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3M}{\alpha^2} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= e \frac{\partial \varphi}{\partial x}; & n \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial n_r}{\partial t}; \\ n_r &= n_{r0} \sqrt{1 + \frac{2e\varphi}{mv_0^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.134)$$

Пусть скорость движения скачка $D = \text{const}$. Тогда все величины будут зависеть от $\xi = x - Dt$, причем при $x = \infty$ $\xi = \infty$, $n_r = 0$, $\varphi = -mv_0^2/2e$, а при $x = -\infty$ $\xi = -\infty$, $n_r = n_{r0}$, $\varphi = 0$. Перейдем от переменных x и t к переменной ξ , тогда

$$-(3M/\alpha^2) D dv_x / d\xi = e d\varphi / d\xi; \quad n_0 dv_x / d\xi = -D dn_r / d\xi,$$

или, интегрируя уравнения и определяя константы из $\xi = -\infty$, получаем

$$-(3M/\alpha^2) D v_x = e\varphi; \quad n_0 v_x = -D(n_r - n_0). \quad (4.135)$$

Здесь учтено, что при $x = -\infty$ $\xi = -\infty$, $v_x = 0$. Уравнение (4.135) определяет поведение φ , v_x и n_r с учетом граничных условий за фронтом волны. Подставляя в них значения величин при $\xi = \infty$ ($\varphi = -mv_0^2/2e$, $n_r = 0$, $v_x = v_{x\infty}$), находим

$$(3M/\alpha^2) D v_{x\infty} = mv_0^2/2; \quad n_0 v_{x\infty} = D n_{r0}.$$

Исключив отсюда $v_{x\infty}$, получим [143]

$$D = \sqrt{(mv_0^2/6M) \alpha^2 n_0/n_{r0}}. \quad (4.136)$$

Рассмотрим значения входящих в формулу (4.136) величин. Для выбранной функции распределения средняя плотность энергии горячих электронов $\int_{-\infty}^{\infty} f_0 (mv^2/2) dv = n_{r0} mv_0^2/6$. Поэтому, вво-

для «температуру» $T_r = mv_0^2/6$, можно переписать формулу (4.136) в виде

$$D = \alpha c_{sr} \sqrt{n_0/n_{r0}}; \quad c_{sr} = \sqrt{T_r/M}. \quad (4.137)$$

Величина α , как это следует из теории турбулентного нагрева для не слишком больших промежутков времени (до наступления асимптотического режима), равна $(M/m)^{1/4}$. Как указывалось в § 4.5, это справедливо при отсутствии убегающих электронов, которые не могут накапливаться в системе с торцами. Кроме того, время турбулентного нагрева холодных электронов в нашей системе мало — порядка s/D , где s — ширина фронта. Если s достаточно мало, то холодные электроны не успевают переходить в асимптотический режим, и $\alpha = (M/m)^{1/4}$ [122]. Чтобы получить эти оценки, а также для более детального сопоставления с экспериментальными данными необходимо найти ширину фронта ударной волны. Проведенные эксперименты подтвердили зависимость скорости скачка от массы ионов. Измеренная скорость равна $c_s(M/m)^{1/4}$, причем измерения проводились для водорода, гелия, аргона и ксенона [143]. В этих же опытах измерили ширину фронта и определили ее зависимость от массы иона. Оказалось, что $s \sim (M/m)^{1/4}$. Для определения ширины фронта теоретически необходимо учесть то, что укрупнение фронта приводит к увеличению напряженности электрического поля, при этом квазилинейный режим может смениться на нелинейный. Это означает, что в системе уравнений (4.120), (4.121) первое уравнение надо заменить следующим:

$$v_x = \frac{e\partial\varphi/\partial x}{m\nu_{эф}}; \quad \nu_{эф} = \omega_{pe}W/n_0T_x,$$

а степень турбулентности W/n_0T_x определяется в соответствии с результатами § 4.3 из уравнения

$$\left. \begin{aligned} 0 = v_x/v_{Tex} - \omega/kv_{Tex} - a\omega/kv_{Tex} - b(W/n_0T_x)\omega/kv_x; \\ a = (M/m)^{1/4} - 1; \quad b = k/\Delta k. \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

Уравнение (4.138) связывает скорость u с электрическим полем на фронте — $\partial\varphi/\partial x$ и температурой холодных электронов. Вводя величину $a = (M/m)^{1/4}$, учитывая, что $\omega/k = c_s$, и связь между u , $\nu_{эф}$ и W/n_0T_x , получим

$$v_x = \alpha c_s + b \frac{e\partial\varphi/\partial x}{\omega_{pe}mv_x} \frac{c_s}{v_x} v_{Tex}. \quad (4.139)$$

Решим кубическое уравнение относительно u методом последовательных приближений, считая, что нелинейность не слишком велика. Тогда в первом приближении имеем прежний результат $u = \alpha c_s$. Далее, подставляя во второе слагаемое первое приближение для скорости u , получаем

$$v_x = \alpha c_s \left(1 + b \frac{\partial \varphi / \partial x}{\sqrt{4\pi n_0 T_x}} \frac{M}{m \alpha^3} \right). \quad (4.140)$$

Таким образом, те участки фронта, в которых больше напряженность электрического поля, будут двигаться с большей скоростью (скорость холодных электронов возрастает, следовательно, увеличивается скорость горячих электронов и ступенька плотности n_r движется быстрее). Добавляя к уравнению (4.140) уравнения $(3/2)\partial T_x/\partial t = e(\partial \varphi/\partial x)v_x$ и $\partial n_r/\partial T = n_0 \partial v_x/\partial x$ и задавая зависимость $n_r(\varphi)$, можно найти скорость движения волны D и структуру фронта. При этом ширина фронта определяется длиной, на которой заметно меняются n_r и v_x . Оценить ширину фронта δ можно, исходя из соотношения (4.140). Действительно, v_x заметно изменится, когда второе слагаемое в скобках станет порядка единицы. Если считать, что скачок потенциала порядка $m v_0^2/2e\delta$, то $\partial \varphi/\partial x \sim m v_0^2/2e\delta$. Отсюда следует, что [143]

$$\delta \sim b (m v_0^2/2 \sqrt{4\pi n_0 T_x}) (M/m) (1/\alpha^3) \sim r_{De} \sqrt{T_r/T_x} (M/m)^{1/4}, \quad (4.141)$$

где $r_{De} = \sqrt{T_r/(4\pi n_0 e^2)}$.

Таким образом, ширина фронта увеличивается пропорционально корню четвертой степени из массы иона. Такая зависимость имеет место лишь в том случае, если $u = \alpha c_s$, где $\alpha = (M/m)^{1/4}$. Соотношение (4.141) хорошо согласуется с экспериментом [143]. Локальный нагрев электронов в системе, имеющей на торцах холодную плазму, приведет к уменьшению электронной температуры за счет обмена горячих электронов с холодными, причем скорость ухода тепла из системы порядка $D = (T_r/M)^{1/2} (M/m)^{1/4}$.

§ 4.6. Пучковый нагрев электронов в пробкотроне

При изложении основ квазилинейной теории в гл. 1 было отмечено, что экспериментальная проверка теоретических результатов осуществлялась на установке типа пробкотрон [144]. Пробкотрон заполнялся плазмой, через которую пропускали электронный пучок. Из теории трехмерной релаксации электронного пучка видно, что происходит не только образование плато на функции распределения, как в одномерной задаче, но и разворот электронов пучка по углу. Таким образом, в системе появляются электроны, у которых поперечная скорость порядка продольной. Они могут быть захвачены в ловушку. Исследованию дальнейшей эволюции этих частиц посвящена экспериментальная работа [145].

Экспериментальное исследование показало, что в ловушке осуществляется сильное плазменно-пучковое взаимодействие, которое приводит к значительному увеличению поперечных размеров плазмы, а также к сильному нагреву энергичных электронов, захваченных в ловушку. При длительности пучка до 10^{-3} с за время порядка 10^{-4} с устанавливается стационарное состояние, которое харак-

теризуется концентрацией горячих электронов порядка 10^{10} см⁻³, при средней энергии от 40 до 250 кэВ в зависимости от напряженности магнитного поля в центре ловушки и от поперечного размера ограничивающих плазму диафрагм.

Энергия частиц пучка, инжектируемого в плазму, была порядка 20 кэВ, а температура холодной плазмы составляла примерно 10 эВ. После прекращения инъекции пучка стационарное состояние распалось за время порядка 10^{-1} с. В течение довольно большого промежутка времени (10^{-1} с) после выключения пучка в пробкотроне удерживалась та небольшая часть электронов, которая имела среднюю энергию, заметно превышающую начальную энергию электронов пучка. Таким образом, при нагреве примерно 1% электронов плазмы приобретал большую энергию поперечного движения и затем удерживался в ловушке.

Один из механизмов нагрева электронов до высокой температуры предложен в работе [146]. Пучок является источником колебаний. Энергия, с которой частицы покидают пучок, близка к энергии частиц пучка, а окончательная энергия, которую они приобретают в процессе ускорения на колебаниях, значительно превышает начальную. Свойства пучка как источника колебаний и источника ускоряемых частиц определяются, конечно, процессами, происходящими внутри пучка; тем не менее выводы, полученные при теоретическом рассмотрении, почти не зависят от исходных предположений. Тип колебаний, обуславливающих процесс нагрева, можно легко определить, учитывая то, что при данных плотности плазмы и магнитном поле $\omega_{pe} > \omega_{He}$. Дисперсионные свойства среды определяются холодной плазмой, так как концентрация горячих электронов много меньше концентрации холодных. Из линейной теории неустойчивости следует, что при $\omega_{pe} > \omega_{He}$ из всех типов колебаний, которые могут распространяться вне области пучка, наибольшим инкрементом обладают электронные ленгмюровские колебания. Поэтому естественно считать, что нагрев горячих электронов происходит из-за взаимодействия с этими колебаниями. Характерный инкремент неустойчивости согласно результатам гл. 1

$$\gamma \sim \omega_{pe} (n_{0b}/n_0) (u/\Delta v)^2 \sim \omega_{pe} (n_{0b}/n_0),$$

где u — начальная скорость пучка, а Δv — ширина пучка в пространстве скоростей. Как показано в работе [144], уже на расстоянии порядка 20—30 см от входа в систему $\Delta v \sim u$. Поэтому инкремент $\gamma \sim \omega_{pe} n_{0b}/n_0$. Если учесть, что радиус пучка $a \sim 1$ см, а характерный волновой вектор возбуждаемых колебаний $k \sim \omega_{pe}/u \approx 5$ см⁻¹, то нетрудно видеть, что $ka \gg 1$.

Это означает, что для оценок можно пользоваться результатами теории безграничного пучка. Дисперсионное соотношение для ленгмюровских колебаний в магнитном поле, как показано в гл. 3, имеет вид

$$1 = [\omega_{pe}^2 / (\omega^2 - \omega_{He}^2)] k_{\parallel}^2 / k^2 + (\omega_{pe}^2 / \omega^2) k_{\perp}^2 / k^2,$$

где k_{\perp} и k_{\parallel} — поперечная и продольная составляющие волнового вектора. Если учесть, что $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{He}^2$, то выражение для частоты собственных колебаний принимает вид

$$\omega = \omega_{pe} \left[1 + (1/2) (\omega_{He}^2 / \omega_{pe}^2) k^2 / (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) \right].$$

При температуре холодных электронов порядка 10 эВ и $\omega_{He}/\omega_{pe} \approx 1/10$, $k_{\parallel} \sim k_{\perp} \sim \omega_{pe}/u$ второе слагаемое в квадратных скобках много больше поправки к частоте из-за теплового движения электронов, равной $(3/2) k^2 r_{De}^2$. Энергия колебаний в поперечном направлении переносится с групповой скоростью

$$\partial\omega/\partial k \sim (k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 / k^2) (\omega_{He}^2 / \omega_{pe}^2) \sim (\omega_{He}^2 / \omega_{pe}^2) v_{\phi},$$

где $v_{\phi} = \omega/k \sim u$ — фазовая скорость колебаний. Время распространения колебаний до диафрагм, ограничивающих плазму, много меньше времени затухания на горячих частицах, которое определяется декрементом затухания ленгмюровских колебаний $\gamma_r \sim \sim (n_r n_0) \omega_{pe} (v_{\phi}/v_{T_r})^3$, где n_r — концентрация горячих электронов; v_{T_r} — их тепловая скорость. На границе холодной плазмы с ограничивающей диафрагмой, где происходит сильное уменьшение плотности плазмы в переходном слое (порядка ларморовского радиуса электронов), колебания почти полностью поглощаются. Это происходит из-за того, что у колебания с фиксированной частотой $\omega = \omega_{pe} [1 + (1/2) k^2 / k^2 + (3/2) k^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2]$ при уменьшении плотности плазмы и постоянной температуре должно сильно возрасти волновое число. Как только kr_{De} достигает значений порядка единицы, колебания сильно затухают (линейное затухание Ландау). Таким образом, можно считать, что вне пучка существует стационарный уровень колебаний, излучаемых на оси цилиндра, где находится пучок, и поглощаемых на его периферии вблизи диафрагмы. Значит, плотность потока энергии колебаний в радиальном направлении постоянна, т. е. $gW2\pi rL = \text{const}$. Здесь g — групповая скорость колебаний в радиальном направлении; L — длина установки; r — расстояние от оси цилиндра до некоторой точки в плазме.

Если считать, что на границе пучка при $r = a$ $W = V_0$, то $W = V_0 a/r$, т. е. плотность энергии колебаний убывает по мере удаления от пучка. Взаимодействие ленгмюровских колебаний, обладающих плотностью энергии W , обусловлено механизмом затухания Ландау на горячих электронах. Отметим, что при квазилинейной релаксации возникает широкий спектр колебаний; в нем, в частности, есть колебания, фазовая скорость которых в 2—3 раза меньше начальной скорости пучка с волновым вектором $k \approx (2 - 3)\omega_{pe}/u$. При $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{He}^2$ на частоту колебаний ω_{pe} , волновое число k и скорость горячих электронов v накладывается условие $\omega_{pe} = kv \cos \psi$, где ψ — угол между k и v . Только при выполнении этого условия возможно эффективное

взаимодействие электронов с ленгмюровскими колебаниями. Если в пространстве, окружающем пучок, есть горячие электроны, скорость которых v превышает ω_{pe}/k , они будут отбирать энергию у колебаний. Из условия резонансного взаимодействия следует, что при $v \gg \omega_{pe}/k$ $\psi \approx \pi/2$, т. е. энергичный электрон будет эффективно взаимодействовать только с теми колебаниями, волновые векторы которых почти перпендикулярны его скорости. Такое взаимодействие быстрых заряженных частиц с колебаниями, обладающими малой фазовой скоростью, как показано в гл. 1 при рассмотрении эволюции ионного пучка в плазме, приводит в основном к упругому рассеянию заряженных частиц на колебаниях и затем, уже в следующем порядке по отношению фазовой скорости к скорости частицы, к изменению энергии частиц.

Такая же ситуация имеет место и для горячих электронов. Формально это сводится к тому, что в квазилинейном уравнении член, описывающий диффузию по углам, $(\partial/\partial\theta)D_{\theta\theta}df/\partial\theta$ много больше $(\partial/\partial|v|)D_{vv}df/\partial|v|$. Так же, как в случае ионного пучка, плазмоны оказываются «тяжелее» частиц, поэтому электроны, сильно меняя направление движения, почти не набирают энергии. Время, за которое электроны набирают энергию порядка начальной, в k^2v^2/ω_{pe}^2 раз больше времени изменения угла в пространстве скоростей примерно на единицу.

Так как упругое рассеяние электронов на колебаниях приводит к изменению направления их скорости и уходу в пробки, а также к их пространственной диффузии в магнитном поле, то может показаться, что быстрые электроны вообще не могут удалиться от пучка на расстояние, большее их ларморовского радиуса, и набрать большую энергию. Это соображение связано с тем, что электрон попадает в конус потерь за время одного упругого столкновения, поэтому он не может сместиться по радиусу на расстояние, превышающее его ларморовский радиус. Действительно, это было бы так в случае изотропного спектра колебаний. Однако из формулы для инкремента пучковой неустойчивости, а также из квазилинейной теории электронного пучка следует, что пучок возбуждает преимущественно колебания с волновыми векторами,

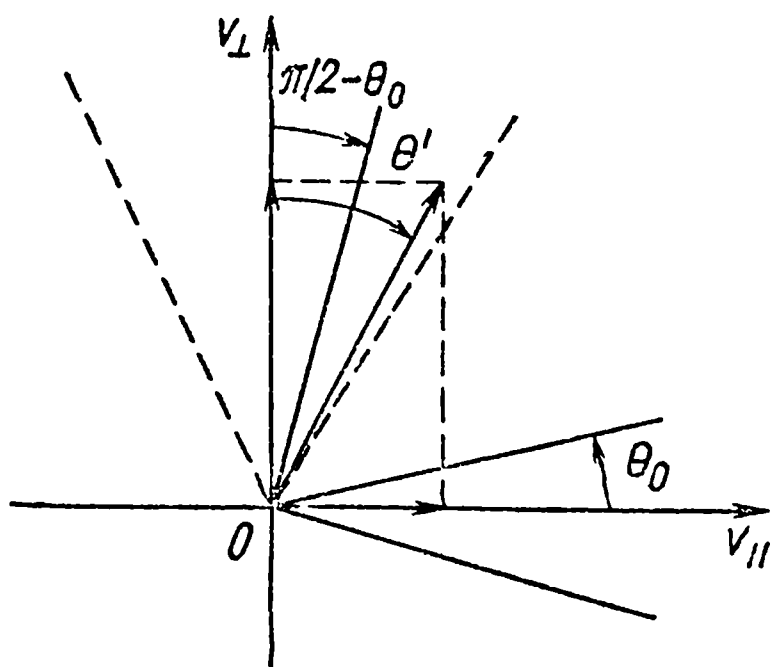


Рис. 65

параллельными его оси, т. е. спектр ленгмюровских колебаний в системе существенно анизотропен. Спектральная плотность колебаний W_k убывает при увеличении угла θ ($\text{arctg } \theta = k_{\perp}/k_{\parallel}$). Будем считать, что спектральная плотность W_k отлична от нуля при $\theta < \theta_0$, где θ_0 — некоторый предельный угол. Так как для горячих частиц $v \gg \omega_{pe}/k$, то рассеиваться на колебаниях будут только те

электроны, для которых выполнено неравенство $\theta' > \pi/2 - \theta_0$, где θ' — угол между v и осью ловушки (рис. 65).

Таким образом, коэффициент квазилинейной диффузии в пространстве скоростей отличен от нуля лишь для скоростей, лежащих в интервале углов $\theta' > \pi/2 - \theta_0$. Если конус потерь таков, как показано на рис. 65 пунктиром, то, взаимодействуя с шумами, электроны не будут попадать в конус потерь в пространстве скоростей и будут диффундировать в обычном пространстве к периферии установки, медленно набирая энергию. Если обозначить частоту рассеяния электрона на угол порядка единицы ν , то коэффициент диффузии в обычном пространстве равен $\rho_e^2 \nu$. За время диффузии электрона до диафрагмы $t \sim r_0^2 / \rho_e^2 \nu$ он будет забирать энергию от шумов. При точном расчете этих процессов необходимо учитывать, что плотность энергии ленгмюровских колебаний зависит от радиуса как r^{-1} [146]. Если ввести пробочное отношение R , можно записать условие, при котором горячие электроны не уходят в пробку из-за взаимодействия с колебаниями:

$$\pi/2 - \theta_0 \geq \arcsin(1/\sqrt{R}) \text{ или } R > 1/\cos^2\theta_0.$$

Указанные зависимости качественно подтвердились при экспериментальной проверке [145]. При этом, меняя радиус диафрагмы и измеряя максимальную энергию горячих электронов при помощи рентгеновских зондов, можно было оценить $W/n_0 T_x$. Результаты находятся в удовлетворительном численном согласии с теорией, если положить $v_0/n_0 T_x \approx 1$.

В дальнейших экспериментах с горячими электронами после выключения пучка увеличивали магнитное поле в несколько десятков раз [147]. Это позволяло сжать горячие электроны по радиусу и нагреть их, поскольку изменение магнитного поля происходило за время, много большее периода вращения электрона по циклотронной орбите. Напомним, что согласно теореме об адиабатическом инварианте при этом сильно увеличивается энергия поперечного движения электронов. Это позволило получить плазму с электронной температурой порядка нескольких мегаэлектронвольт, с плотностью порядка $10^{11} - 10^{12} \text{ см}^{-3}$. Интересно, что в процессе нагрева, по-видимому, не возбуждалась электронная циклотронная неустойчивость, которая согласно линейной теории должна была возникнуть, так как $T \gg T_{\parallel}$ [148]. Возникновение такой неустойчивости привело бы к выравниванию продольной и поперечной температур электронов и выходу их из ловушки. Отсутствие такой неустойчивости могло быть связано с тем, что начальная температура электронов перед сжатием порядка 200 кэВ была сравнима с энергией покоя электронов $m_0 c^2 = 511 \text{ кэВ}$. Значит, электроны были почти релятивистские. Поэтому необходимо учитывать зависимость массы электрона от энергии. Это особенно очевидно при сжатии магнитным полем, когда энергия достигала нескольких мегаэлектронвольт.

Так как распределение электронов по энергии было достаточно широким, циклотронная частота уже не была выделенной в диспер-

сионном соотношении и менялась в зависимости от энергии, поскольку $\omega_{He} = eHc/\mathcal{E}$, где \mathcal{E} — энергия электрона. Таким образом, в плазме могла исчезнуть ветвь колебаний, соответствующая $\omega = \omega_{He} = eH/m_0c$. По-видимому, это позволило удерживать электроны в пробкотроне достаточно долго [147].

§ 4.7. Нагрев электронов циклотронным резонансом

Опубликовано большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению нагрева электронов циклотронным резонансом. При этом образуется обычно небольшая часть горячих электронов с температурой до 100 кэВ, холодные же электроны имеют температуру порядка 10—100 эВ. В большинстве исследований изучали время жизни горячей компоненты при выключенном генераторе (режим послесвечения), а относительно стадии нагрева делали предположение, что или нагрев определяется взаимодействием электронов с волной фиксированной фазы в окрестности циклотронного резонанса [149], или нагрев электронов является стохастическим [150].

Для выяснения природы циклотронного нагрева электронов и роли коллективных взаимодействий рассмотрим модель циклотронного нагрева электронов в ловушке типа пробкотрон.

Пусть на торец магнитной ловушки, в которой находится плазма, падает электромагнитная волна круговой поляризации, непрерывно создаваемая генератором. Такая волна проникает в плазму и распространяется вдоль оси ловушки z . Будем считать, что направление распространения волн совпадает с направлением внешнего магнитного поля H_0 . Частота волн такова, что в пробке есть точка резонанса, где $\Omega = \omega_{He} = eH_0(z)/mc$. При частотах, близких к электронной циклотронной, $\Omega \lesssim \omega_{He}$, в плазме распространяется волна с круговой поляризацией ($E_{kx} = -iE_{ky}$). Дисперсионное соотношение для таких волн при максвелловском распределении электронов по скоростям имеет вид [17]

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\Omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega(\omega_{He} - \Omega)} Z\left(\frac{\Omega - \omega_{He}}{k_z v_{Te}}\right), \quad (4.142)$$

где $Z = 2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt - i\sqrt{\pi} \exp(-x^2)$; $v_{Te} = \sqrt{2T_e/n}$.

Поле в пробке обычно меняется довольно медленно, поэтому при $|z| < L$ можно считать, что

$$\omega_{He} = \Omega(1 - z/L). \quad (4.143)$$

(Здесь за начало отсчета принята точка, где частота волны равна циклотронной частоте плазмы, а координата z отсчитывается в сторону распространения волны.) Условие слабого затухания $|\Omega - \omega_{He}| \gg k_z v_{Te}$ принимает при этом вид $[(v_{Te}/c)\omega_{pe}/\omega_{He}]^{2/3} \ll$

$\ll 1$. Это означает, что циклотронная волна не может подходить к точке резонанса на расстояние, меньшее

$$l_1 = [(v_{Te}/c) \omega_{pe}/\omega_{He}]^2 L. \quad (4.144)$$

Будем считать, что волна теряет энергию, не доходя до точки циклотронного резонанса, в области $0 < |z| \leq l_1$ за счет квазилинейных эффектов, и не будем учитывать влияние неоднородности поля на распространение волн. Это справедливо при выполнении условий применимости квазиклассического приближения, когда $|(d/dz)1/k_z| < 1$ или

$$z > c^2/4\omega_{pe}^2 L = l_2. \quad (4.145)$$

Если соблюдено условие $l_2 = l_1$, волна будет заметно терять энергию, передавая ее резонансным частицам раньше, чем нарушится условие квазиклассического приближения, поэтому в случае

$$L^2 > (c^2/4\omega_{pe}^2) (c\Omega/v_{Te}\omega_{pe})^2 \quad (4.146)$$

при построении теории нагрева электронов можно пользоваться приближением геометрической оптики.

Обычно при решении задачи о нагреве электронов и затухании волны в глубине плазмы часто пользуются несамосогласованной теорией, т. е. или задается функция распределения и находится уменьшение амплитуды волны в плазме или амплитуда волны считается заданной и определяется функция распределения в зависимости от времени.

Квазилинейная теория, впервые предложенная в работе [20], в принципе позволяет решить самосогласованную задачу, однако она строится для достаточно широких пакетов волн, так как не учитывает поведения захваченных волной частиц.

Покажем, что распространение волн с круговой поляризацией в плазме при частоте ω , близкой к ω_{He} , приводит к уширению линии, достаточному для применения квазилинейной теории.

Из квазилинейной теории следует, что условием ее применимости является достаточная ширина пакета волн, а именно, разброс фазовых скоростей $\Delta(\omega/k)$ должен быть больше скорости захваченной частицы относительно волны. На электрон, имеющий скорость v_z , близкую к фазовой скорости волны, действует сила Лоренца $(e/c) [\mathbf{v}_\perp \tilde{\mathbf{H}}]$ или $(e/c) v_{\perp 0} \tilde{H}$; следовательно, скорость осциллирующей частицы определится как $v_z \sim \sqrt{2e\tilde{H}v_{\perp 0}/(mk_z c)}$ (\tilde{H} — напряженность переменного магнитного поля циклотронной волны). Отсюда следует, что $\Delta(\omega/k) > \sqrt{2ev_{\perp 0}\tilde{H}/(mck_z)}$. Используя закон дисперсии для циклотронных волн $\omega = \omega_{He} (1 - \omega_{pe}^2/k^2 c^2)$, получим окончательно

$$\Delta\omega \geq \omega_{He} \sqrt{2 \tilde{H} v_{\perp 0} \omega_{pe} / (H_0 c \omega_{pe})} \sqrt{|\omega - \omega_{He}| / \omega_{He}}. \quad (4.147)$$

Из соотношения (4.147) следует, что так как $v_0 \ll c$ (даже при $T_{\perp} \approx 50$ кэВ, т. е., как будет показано, при предельной энергии), $\omega \sim \omega_{He}$, $(\omega - \omega_{He}) / \omega_{He} \ll 1/10$, то при ширине пакета $\Delta\omega \geq 3 \cdot 10^{-3} \omega_{He}$ захваченными частицами можно пренебречь. Это связано с тем, что для рассматриваемого типа волн сила, с которой волна «увлекает» частицу, очень мала. Если учесть, что для параметров эксперимента по циклотронному нагреву $\omega_{He} \sim \omega_{pe}$, то уширение пакета волн на величину порядка ω_{pi} достаточно для применения квазилинейной теории.

Покажем, что уширение спектра на нужную для применения квазилинейной теории ширину может иметь место. Если в плазме распространяется циклотронная волна с частотой, близкой к ω_{He} , то нетрудно показать, что она может распадаться на две коротковолновые потенциальные волны, волновые вектора которых ориентированы почти вдоль постоянного магнитного поля. Одной из таких волн будет ионно-звуковая с частотой $\omega_{Hi} \ll \omega_s \ll \omega_{He}$ (предполагаем, что $T_e \gg T_i$, это обычно справедливо для установок по циклотронному нагреву электронов), другой — гибридная в. ч.-волна.

Как показано в гл. 3, инкремент распадной неустойчивости есть

$$\gamma = \sqrt{\omega_{He} \omega_s} \sqrt{(W/n_0 T) (\Omega - \omega_{He})^2 / \omega_{pe}^2}. \quad (4.148)$$

Таким образом, в результате воздействия на плазму циклотронной волны появляется спектр ионно-звуковых колебаний. Энергия этих волн начинает нарастать от начальной энергии шумов, фазы которых хаотические, поэтому за время, довольно малое по сравнению со временем циклотронного нагрева, в плазме образуются два широких пакета волн с частотами ω_s и ω_r . Взаимодействуя между собой, эти два пакета волн могут рождать циклотронные волны, но уже с частотами, отличными от первоначальной, и тем самым уширять спектр монохроматической волны.

Найдем характерное время обратной перекачки энергии по спектру. Возбуждение циклотронных волн будет происходить за счет взаимодействия ионно-звуковых волн и волн с частотой ω_r . Этот процесс рассчитывается по стандартной схеме теории слабой турбулентности: находится плотность тока $j^{(2)}$, пропорциональная произведению амплитуд ионно-звуковых колебаний и колебаний с частотой ω_r , затем из уравнений Максвелла определяется скорость роста амплитуды циклотронной волны, возбуждаемой «сторонней» плотностью тока $j^{(2)}$, которая определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} j_k^{(2)} &= -en_0 v_e^{(2)} - (e/2) \int n_{se}^{(1)} v_{Te}^{(1)} d\lambda - (e/2) \int n_{Te}^{(1)} v_{se}^{(1)} d\lambda; \\ d\lambda &= d\omega_s d\omega_r dk_s dk_r \delta(\omega - \omega_s - \omega_r) \delta(k - k_s - k_r). \end{aligned} \right\} \quad (4.149)$$

Здесь $v_e^{(2)}$ — возмущение скорости электронов, обусловленное членами $(v_{se}^{(1)} \nabla) v_{re}^{(1)} + (v_{re}^{(1)} \nabla) v_{se}^{(1)}$; $n_{se}^{(1)}$, $n_{re}^{(1)}$, $v_{re}^{(1)}$, $v_{se}^{(1)}$ — линейные возмущения концентрации и скорости электронов в звуковых волнах и волнах с частотой ω_r . Здесь не учитываются возмущения скорости и концентрации ионов, так как в волнах с частотой ω_r ионы практически не участвуют, а в ионно-звуковых волнах можно пренебречь возмущением скорости ионов. При вычислении $j^{(2)}$ необходимо учесть, что рассматриваются длины волн, много меньшие ларморовского радиуса электронов и дебаевского радиуса.

Нас интересуют только x - и y -компоненты плотности тока $j^{(2)}$, так как циклотронная волна имеет лишь x - и y -компоненты электрического поля. Особенно простой вид имеет величина

$$j_-^{(2)} = j_{kx}^{(2)} - ij_{ky}^{(2)} = (1/2) en_0 \int (k_{rx} - ik_{ry}) \times \\ \times (e^2/m^2) \{ (m/T) 1/(\omega_{He} - \omega_r) \} \varphi_{k_s}^s \varphi_{k_r}^r d\lambda. \quad (4.150)$$

Здесь $\varphi_{k_r}^r$ и $\varphi_{k_s}^s$ — потенциалы волны с частотой ω_r и ω_s соответственно. Мы учли, что $k_{rx} = -k_{sx}$; $k_{ry} = -k_{sy}$. Подставляя в уравнения Максвелла плотность тока $j^{(2)}$, получаем для циклотронных волн, обозначаемых индексом c :

$$[k_{cz}^2 c^2 - \Omega^2 (\epsilon - g)] E_-^c = \frac{4\pi i \Omega}{c} j_{k(-)}^2, \quad (4.151)$$

где ϵ и g — компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле. Выражая $E_{(-)}^c$ через $j_{(-)}^2$, запишем интеграл I в виде

$$I = \int j_{(-)}^{2*} E_{(-)}^c dr = \int dr j_{(-)}^{(2)*} (4\pi i \Omega / c) \times \\ \times j_{(-)}^2 / [k_{cz}^2 c^2 - \Omega^2 (\epsilon - g)]. \quad (4.152)$$

Вводя спектральную плотность энергии волн, отнесенную к единице объема $W_{ki} = \frac{(2\pi)^3}{V} \frac{|E_k|^2}{8\pi} \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon_i)_{\omega=\omega_i}$ ($i = s, r$ определяет тип волн; ϵ_i — диэлектрическая проницаемость), и учитывая, что мнимая часть I , отнесенная к единице объема, есть $\partial W_{k_c}^c / \partial t$, получаем уравнение

$$\frac{\partial W_{k_c}^c}{\partial t} = \omega_{He} \int dk_r W_{k_r}^r \frac{W_{k_c, k_r}^s}{n_0 T} \delta \left(\frac{\omega_{pe}^2}{k_c^2 c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta_r}{2 |\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2|} - \frac{\omega_s}{\omega_{He}} \right) \frac{\omega_{pe}^4}{4 (\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2)^2} \sin^4 \theta, \quad (4.153)$$

определяющее скорость роста циклотронных шумов с данным k_c , ($k_c \parallel H_0$). При помощи уравнения (4.153) можно приближенно оценить время нарастания циклотронных шумов с данным k_c . Быстрее всего нарастают волны с волновыми векторами, удовлетворяющими равенству $\Delta = \omega_s$, поэтому для оценки скорости обратной перекачки энергии по спектру можно в δ -функции воспользоваться этим равенством. Проинтегрируем уравнение (4.153) по k_{rz} , учтем указанное соотношение и то, что $\sin^2 \theta_r$ мало. Тогда

$$\frac{\partial W_{k_c}^c}{\partial t} \approx \omega_{He} \frac{(\omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2 + \omega_s / \omega_{He})}{2\omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2 + 3\omega_s / \omega_{He}} \int W_{k_r}^r \frac{W_{k_s}^s}{n_0 T} dk_r. \quad (4.154)$$

Отсюда следует, что для $\omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2 > \omega_s / \omega_r$ (а именно такие значения нас интересуют) $\partial W_{k_c}^c / \partial t \sim \omega_{He} W_{k_r} (W^s / n_0 T) \omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2$ ($W^s / n_0 T$ — уровень турбулентности для ионно-звуковых волн).

При минимальном значении k_c получим максимальный инкремент. Так, на входе $(\Omega - \omega_{He}) / \omega_{He} \sim 10^{-1}$ максимально, поэтому характерное время уширения

$$t = t_1 \sim [1 / (\Omega - \omega_{He})] n_0 T / W_s. \quad (4.155)$$

Если ω_s / ω_{He} становится больше $\omega_{pe}^2 / k_c^2 c^2$ по мере подхода к точке резонанса, то

$$t = t_2 \sim (1 / \omega_s) n_0 T / W_s. \quad (4.156)$$

Оценки (4.155) и (4.156) приводят примерно к одинаковым результатам.

При обычном уровне турбулентности $W^c / n_0 T \sim 10^{-2}$ время обратной перекачки энергии по спектру порядка одной десятой микро-секунды (также очень мало по сравнению с характерным временем нагрева).

Отметим, что время уширения спектра определяется в основном временем обратной перекачки энергии по спектру (4.155) и (4.156), которое много больше обратного инкремента распадной неустойчивости (4.148).

Будем рассматривать процессы нагрева, происходящие за гораздо большие промежутки времени, чем характерное время уширения спектра. При этом можно считать, что в плазме распространяется циклотронная волна с достаточно широким спектром, и применять квазилинейную теорию. Получим квазилинейные уравнения, описывающие процесс нагрева. Для этого воспользуемся бесстолкновительным кинетическим уравнением

$$\partial f / \partial t + v \partial f / \partial r - (e/m) \{E + (1/c) [vH]\} \partial f / \partial v = 0 \quad (4.157)$$

и уравнениями Максвелла

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad \text{rot } H = -\frac{4\pi e}{c} \int v f dv + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (4.158)$$

Разобьем функцию распределения на сумму двух слагаемых: быстро осциллирующей добавки $f^{(1)}$, связанной с колебаниями, и медленно меняющейся функции $f_0 = \langle f \rangle$, на фоне которой происходят быстрые колебания. Введя цилиндрические координаты в пространстве скоростей v , v_z , φ , получим уравнения для осциллирующей добавки в первом приближении

$$f_k^{(1)} = i \frac{e}{m} \exp(i\varphi) \frac{E_{k_x}}{\Omega - \omega_{pe} - k_z v_z} \left[\left(1 - \frac{k_z v_z}{\Omega}\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_z v_{\perp}}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right]. \quad (4.159)$$

Здесь учтена поляризация циклотронной волны ($E_{k_x} = -i E_{k_y}$). Если подставить теперь выражение для возмущенной плотности тока в уравнения Максвелла, то можно получить обычное дисперсионное соотношение для циклотронных волн

$$-k_z^2 + \frac{\Omega^2}{c^2} = -\frac{2\pi e^2}{m} \int \frac{v_{\perp} dv_{\perp} dv_z}{\Omega - \omega_{He} - k_z v_z} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{k_z v_z}{\Omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_z v_{\perp}}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right]. \quad (4.160)$$

Если рассматривается стационарная задача, то $k = k_1 + i\kappa$, т. е. k имеет мнимую добавку такого знака, что волна затухает в пространстве. Считая, что в действительную часть дисперсионного соотношения резонансные частицы дают малый вклад, получим

$$k_z^2 c^2 / \Omega^2 - 1 - \omega_{pe}^2 / \Omega (\omega_{He} - \Omega) = \\ = -i\pi (2\pi e^2 / m\Omega) \int v_{\perp} dv_{\perp} dv_z \delta(\Omega - \omega_{He} - k_1 v_z) \times \\ \times [(1 - k_1 v_z / \Omega) df_0 / \partial v_{\perp} + (k_1 v_z / \Omega) \partial f_0 / \partial v_z], \quad (4.161)$$

т. е.

$$\kappa = \text{Im } k_z = (\pi \omega_{pe}^2 \omega_{He} / 4k_1 c^2 n_0) \int v_{\perp} dv_{\perp} dv_z \times \\ \times \delta(\Omega - \omega_{He} - k_z v_z) \left[\partial f_0 / \partial v_{\perp} + (k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{He}) \partial f_0 / \partial v_z \right]. \quad (4.162)$$

Теперь, используя выражение для поправки к функции распределения $f_k^{(1)}$, можно получить уравнение, описывающее изменение средней фоновой функции распределения, происходящее за отрезки времени, гораздо большие, чем период осцилляции функции $f_k^{(1)}$, равный $2\pi/\omega_{He}$. Как показано в работе [151], в функции распределения с погрешностью $(\omega_{He} t_k)^{-1} \ll 1$ (t_k — время квазилинейной релаксации) можно не учитывать зависимость f_0 от угла в пространстве скоростей. Уравнение для фоновой функции f_0 получается при учете усредненного эффекта осцилляций, квадратичного по амплитудам полей. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} = & (e/m) \{ \langle \mathbf{E}^{(1)} \partial f^{(1)} / \partial \mathbf{v} \rangle + \\ & + (1/c) \langle [\mathbf{v} \mathbf{H}^{(1)}] \partial f^{(1)} / \partial \mathbf{v} \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Подставляя в правую часть уравнения (4.163) выражение для поправки к функции распределения и производя усреднение по фазам по формуле $\langle H_{k_y} H_{k_y'} \rangle = |H_{k_y}|^2 [(2\pi)^3/V] \delta(k + k')$ (V — нормировочный объем), получаем для резонансных частиц квазилинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + v \frac{\partial f_0}{\partial z} = & \frac{\pi e^2 \omega_{He}^2}{2m^2 c^2} \int dk_{\perp} \left(\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{He}} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \frac{H_{k_x}^2 + H_{k_y}^2}{k_{\perp}^2} \frac{2\pi}{L} \delta(\Omega - \omega_{He} - k_{\perp} v_z) \times \\ & \times \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\perp} v}{\omega_{He}} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right). \end{aligned} \quad (4.164)$$

Для полноты выпишем еще уравнение для затухания пакета волн в стационарном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |H_{k_x}^2 + H_{k_y}^2|}{|H_{k_x}^2 + H_{k_y}^2| \partial z} = & - \frac{\pi \omega_{He} \omega_{pe}^2}{4k_{\perp} c^2 n_0} \int v_{\perp} dv_{\perp} dv_z \times \\ & \times \delta(\Omega - \omega_{He} - k_{\perp} v_z) \left[\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_z v}{\omega_{He}} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right]. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Рассмотрим наиболее простую задачу: пусть с начала нагрева прошло не слишком много времени, так что температура электронов еще не сильно изменилась. Волна, распространяющаяся с групповой скоростью $v_{gr} = v_{Ae} [(\Omega - \omega_{He})/\omega_{He}]^{3/2}$, большей продольной скорости электронов, уже успела выйти на стационарный режим, поскольку она достигла точки $\Omega = \omega_{He}$ гораздо быстрее, чем электроны, отразившись от противоположной пробки, опять подошли к зоне нагрева и получили в ней небольшое приращение энергии. Так как нас интересует длина затухания циклотронной волны, а не поведение функции распределения во времени, то можно еще более упростить задачу, сведя ее к следующей модельной постановке: на полупространство, занятое плазмой, перпендикулярно границе плазмы вдоль постоянного магнитного поля падает циклотронная волна.

Определим самосогласованное поведение величин f_0 , u , $H_k^2(z)$. Для этого удобно ввести вместо v_z и v_{\perp} новые переменные. Характеристики для оператора в уравнении (4.163) имеют вид

$$dv_{\perp}/1 = \partial v_z / (k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{He}); \quad v^2/2 + \int v_z dv_z =$$

$$- \int [\Omega(v_z)/k_1] dv_z = \text{const.}$$

Перейдем в уравнениях (4.163) и (4.164) к новым переменным

$$W = v_{\perp}^2 + v_z^2 - 2 \int_{v_z \text{ мин}(W)}^{v_z} v_{\phi}(v_z) dv_z; \quad v = v_z. \quad (4.166)$$

При этом уравнения (4.164) и (4.165) примут более простой вид:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} = \frac{\pi e^2}{m^2 c^2} \frac{|H_k|^2 2\pi/L}{|v - \partial\Omega/\partial k_1|} v_{\perp}^2 \frac{\partial f_0}{\partial v}; \quad (4.167)$$

$$k_1 = \frac{\Omega - \omega_{He}}{v}$$

$$\frac{1}{\partial\Omega/\partial k} \frac{\partial \ln |H_k|^2}{\partial t} + \frac{\partial \ln |H_k|^2}{\partial z} =$$

$$= \frac{\pi \omega_{pe}^2 \omega_{He}}{4kc^2 n_0} \int \frac{kv_{\perp}^2}{\omega_{He}} dv_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (4.168)$$

Уравнения (4.167), (4.168) полностью описывают циклотронный нагрев. Отметим, что этот нагрев происходит в довольно узкой области вдали от точки, где частота волны равна электронной циклотронной. Поскольку $(dH_0/H_0 dz)^{-1}$ — характерный размер неоднородности — величина очень большая, области нагрева достигают практически все частицы, так как расстояние z до области нагрева таково, что поле не успевает сильно измениться. Интересно еще выяснить долю резонансных частиц.

Так как $\omega_{He} - \Omega \sim \Delta\Omega \sim \omega_s$ и $v_{\text{рез}} = v_{Te}$, то практически все частицы являются резонансными, и можно считать, что квазилинейный коэффициент диффузии примерно одинаков для всех частиц, причем диффузия происходит так, что W остается константой.

Рассмотрим более подробно уравнения для характеристик. Так как диффузия происходит с сохранением W , то $v_{\perp} \Delta v_{\perp} + v_z \Delta v_z - v_{\phi} \Delta v_z = 0$ или

$$\Delta v_z / \Delta v_{\perp} = v_{\perp} / (v_z - v_{\phi}) = v_{\perp} k_z / \omega_{He} \approx v_{\perp} / v_z^{1/3} v_{Ae}^{2/3}, \quad (4.169)$$

где $v_{Ae} = \frac{\omega_{He} c}{\omega_{pe}}$. До тех пор, пока $v_{\perp} \ll v_z^{1/3} v_{Ae}^{2/3}$ (это соответствует энергии поперечного движения меньше 10 кэВ), можно считать, что $\Delta v_z \ll \Delta v_{\perp}$; следовательно, происходит лишь увеличение поперечной температуры электронов. Это также соответствует малому параметру $k_z v_{\perp} / \omega_{He}$, и, следовательно, исходные квазилинейные уравнения можно упростить. Используя соотношение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_1} = 3c \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \left(\frac{v_z}{v_\Phi} \right)^{3/2} = 3c \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \left(\frac{\omega_{pe} v_z}{\Omega c} \right)^{3/2} \approx 3v_z,$$

окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\pi e^2}{m^2 c^2} \left(\frac{c \Omega}{\omega_{pe}} \right)^{4/3} v_z^{-1/3} |H_k|^2 \times \\ &\times \frac{2\pi}{L} \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Если рассматривать стационарный случай, то, интегрируя функцию распределения по $v_\perp dv_\perp$, получим $(\partial/\partial z)\{f_0 v dv\} = 0$, т. е. при такой постановке концентрация частиц не меняется. Величина H_k , зависящая от v_z и z (так как v_z не меняется), оказывается функцией лишь z . Таким образом, в этом случае систему уравнений можно решить точно:

$$\begin{aligned} |H_k|^2 &= |H_k(z_{вх})|^2 \exp \left\{ -\sqrt{\pi} \int_{z_{вх}}^z \frac{\omega_{He} (\omega_{He} - \Omega)}{v_{Te} \Omega} \times \right. \\ &\times \exp \left[-\frac{\Omega^2 c^2}{\omega_{pe}^2 v_{Te}^2} \left(\frac{|\Omega - \omega_{He}|}{\Omega} \right)^3 \right] dz \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.171)$$

Введем в уравнение (4.170) новые безразмерные переменные (функцию распределения электронов при $z \rightarrow \infty$ считаем для простоты максвелловской):

$$u = \frac{v_\perp}{v_{Te}}; \quad x = \int_z^{z_1} \frac{2Am}{T} \frac{|H_k(z')|^2}{|H_k(z_{вх})|^2} dz';$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{\pi e^2}{m^2 c^2} \left(\frac{c \Omega}{\omega_{pe} v_z} \right)^{4/3} |H_k(z_{вх})|^2 \frac{2\pi}{L},$$

где z_1 — расстояние, на котором волна существенно затухает. Уравнение (4.170) принимает вид

$$\partial f_0 / \partial x = (1/4) (\partial / \partial u) (u \partial f_0 / \partial u), \quad (4.172)$$

причем $\int f_0 u du = \text{const}$. Автомодельной подстановкой $y = u^2 / (x + c_1)$ ($c_1 = \text{const}$) уравнение сводится к следующему:

$$(d/dy) [y dg/dy + yg] = 0; \quad f_0 = g(y) / (x + c_1). \quad (4.173)$$

Решение, конечное в нуле, имеет вид $f_0 = [c_2 / (x + c_1)] \exp[-u^2 / (x + c_1)]$. Будем считать, что при $x = 0$ ($z = z_1$), когда нет шумов, f_0 — максвелловская функция. Тогда

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \frac{1}{1+x} \exp \left\{ -\frac{mv_z^2}{2T} - \frac{mv_\perp^2}{2T} \frac{1}{1+x} \right\}. \quad (4.174)$$

В нашем случае, когда справедлива геометрическая оптика, x определяется лишь распределением по продольным скоростям, так как $(\partial/\partial z) \int f_0 v_{\perp} dv_{\perp} = 0$. Поэтому выражение для длины затухания имеет обычный вид:

$$\ln \frac{|H(z_{\text{вх}})|^2}{|H(z_0)|^2} = 2 \int_{z_{\text{вх}}}^z \kappa dz \approx 1,$$

или приближенно

$$\frac{\omega_{\text{He}}}{v_{\text{Te}}} \int_{z_{\text{вх}}}^{z_0} \frac{|z|^2}{L^2} \left(\frac{v_{\text{Ae}}}{v_{\text{Te}}} \right)^{2/3} \exp \left(- \frac{\omega_{\text{He}}^2}{\omega_{\text{pe}}^2} \frac{c^2}{v_{\text{Te}}^2} \frac{|z|^3}{L^3} \right) dz \approx \frac{1}{2 \sqrt{\pi}},$$

откуда

$$|z| = l_1 \left\{ \left| \ln \left[\frac{3}{2 \sqrt{\pi}} \frac{v_{\text{Te}}}{L \omega_{\text{He}}} \left(\frac{v_{\text{Ae}}}{v_{\text{Te}}} \right)^{4/3} \right] \right| \right\}^{1/3}; \quad l_1 = \left(\frac{v_{\text{Te}}}{v_{\text{Ae}}} \right)^{2/3} L.$$

Эта длина $z \approx 3$ см много больше длины волны ($\lambda \approx 0,3$ см); $L \approx 150$ см, $\omega_{\text{pe}} \approx 2\omega_{\text{He}}$.

Если решать нестационарную задачу, то, поскольку функция распределения меняется довольно медленно (частицы должны много раз пройти область нагрева), можно считать, что распределение поля неизменно. При этом можно пользоваться квазилинейным уравнением как уравнением диффузии в пространстве скоростей и найти характерные времена нагрева. Например, из уравнения (4.170) $(\Delta v_{\perp})^2 = D\tau \approx \tilde{\omega}_{\text{He}} (\tilde{H}/H_0) v_{\text{Ae}}^2 \tau$. Время нагрева до $T \approx 100$ эВ для типичных экспериментальных устройств ($\tilde{H}/H_0 \approx 10^{-3}$, $\tilde{H} \approx 0,3\text{Э}$) составляет $(36 \cdot 10^{16}/3 \cdot 10^{20}) 10^3/0,5 \cdot 10^7 \approx 2 \cdot 10^{-7}$ с, однако надо учесть еще, что частица пребывает в области резонанса очень малую долю всего времени пребывания в ловушке. Частица проходит область нагрева за время $L_{\text{нагр}}/v_z = L/v_{\text{Ae}} \sim 10^{-8}$ с. Следовательно, она должна пройти примерно 20 раз через область нагрева, т. е. время появления частиц с энергией 100 эВ в $L_{\text{лов}} v_{\text{Ae}}/v_{\text{Te}} L$ раз больше и равно нескольким десяткам микросекунд:

$$\tau_{\text{нагр}} = \frac{(\Delta v_{\perp})^2}{(\tilde{H}/H_0) \tilde{\omega}_{\text{He}} v_{\text{Ae}}^2} \frac{L_{\text{лов}} v_{\text{Ae}}^{2/3}}{L |v_z|^{2/3}}. \quad (4.175)$$

Одновременно происходит уход частиц в пробки, так как диффузия в пространстве скоростей сглаживает функцию распределения вдоль линии $v_z = \text{const}$ и все большее число частиц попадает в конус потерь. В конце концов все частицы за то же характерное время выйдут в конус потерь и уйдут из системы.

Возможно, что некоторые частицы будут ускоряться до очень больших энергий и не попадут в конус потерь. Однако из вида характеристик [уравнения (4.166) и (4.169)] следует, что $\Delta v_z / \Delta v_\perp \ll 1$ до тех пор, пока $v_\perp / v_\phi \ll 1$. Когда поперечная скорость достигает значения $v_\phi \sim \omega_{He} / k$, приращение Δv_\parallel будет равно приращению Δv , и линия $v_z = \text{const}$ в своей верхней части пойдет примерно под углом 45° к осям координат. Это означает, что частица не может ускоряться беспредельно, а при $v_\perp \sim v_\phi$ может уйти в конус потерь. Найдем эту предельную энергию:

$$\varepsilon^* / mc^2 = (c\omega_{He} / \omega_{pe})^{4/3} v_z^{2/3} / c^2 = (\omega_{He} / \omega_{pe})^{4/3} (\bar{\varepsilon} / mc^2)^{1/3}. \quad (4.176)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ — средняя тепловая энергия электронов в продольном направлении, которая может считаться по порядку равной начальной.

Полученный результат допускает простую физическую интерпретацию, а именно: можно считать, что в области нагрева $\omega_{He} - \Omega \sim k_z v_{Te}$, и из уравнения $k^2 c^2 / \Omega^2 = \omega_{pe}^2 / \Omega (\Omega - \omega_{He})$ найти k , заменив $|\omega_{He} - \Omega|$ на $k_z v_{Te}$:

$$k = \sqrt[3]{(\omega_{pe}^2 / c^2) \omega_{He} / v_{Te}}. \quad (4.177)$$

Из уравнения движения следует, что изменение поперечной энергии определяет степень поляризации волны (\mathbf{E} направлено вдоль циклотронной орбиты) электрическим полем, в то время как энергия продольного движения определяется магнитным полем. Итак,

$$\frac{\Delta v_\perp}{\Delta v_z} = \frac{(e/m) E^{(1)}}{(e/mc) v_\perp H^{(1)}} = \frac{c E^{(1)}}{v_\perp H^{(1)}} = \frac{\Omega}{k v_\perp} \approx \frac{\omega_{He}}{k v_\perp}. \quad (4.178)$$

Эта формула с k из (4.177) уже позволяет получить соотношение (4.176) для максимальной энергии и является одновременно физической интерпретацией характеристик (4.166).

Отметим, что максимальная энергия соответствует результату, полученному по формуле (4.176). Таким образом, можно считать, что из-за возбуждения распаднoй неустойчивости нагрев производится широким пакетом волн со сбитыми фазами, частицы в конце концов уходят из ловушки, при этом их небольшая доля достигает энергии порядка десятков килоэлектронвольт, а волна затухает, не дойдя до точки резонанса [152].

ЛАЗЕРНЫЙ И ПУЧКОВЫЙ НАГРЕВЫ ПЛАЗМЫ ТВЕРДОЙ МИШЕНИ

§ 5.1. Мощный пучок релятивистских электронов в плазме

Наибольшее развитие получили три подхода к решению проблемы управляемой термоядерной реакции. Один из них, по-видимому, наиболее разработанный, состоит в том, что достаточно плотная и горячая плазма удерживается в магнитной ловушке типа Токамак в течение промежутка времени, определяемого критерием Лоусона (см. гл. 1). Для проведения термоядерной реакции необходимо создать в этом случае систему очень больших размеров с сильным магнитным полем. Малый и большой радиусы Токамака при этом определяются тем, что при коэффициентах диффузии и теплопроводности, определенных эмпирически на малых системах типа T-4 [153], находится соответствующее «энергетическое время жизни», т. е. время, в течение которого энергия в системе падает в e раз. Далее размеры гипотетического реактора выбираются из тех соображений, что процессы потерь описываются уравнениями типа уравнения теплопроводности, поэтому энергетическое время жизни увеличивается пропорционально a^2 , где a — характерный размер системы. Установка должна иметь внушительный размер — малый радиус Токамака $r \sim 10^2$ см, отношение большого радиуса к малому примерно равно 3, напряженность основного магнитного поля $H_0 \sim 10^5$ Э. Плотность плазмы порядка 10^{14} см $^{-3}$ [154], время удержания такой плазмы, нагретой предварительно до температуры порядка 10 кэВ, должно быть порядка 1 с.

Помимо технических трудностей, связанных с созданием таких больших систем, на пути к решению проблемы управляемой термоядерной реакции стоит еще целый ряд физических трудностей.

Во-первых, в плазме имеются примеси со стенок камеры. Даже небольшая, казалось бы, доля примесей более тяжелых элементов приводит к сильному увеличению потерь в системе, так как частота столкновений пропорциональна z^2 , где z — атомный номер элемента. Например, наличие 8% восьмикратно ионизованного кислорода O^{8+} приводит к тому, что при заданной концентрации электронов n_0 концентрация ионов водорода составляет лишь $0,36 n_0$, так как в силу квазинейтральности $n_0 = 8n_{O^{8+}} + n_H$, причем потери на восьмикратно ионизованном кислороде определяющие [165].

Во-вторых, в системах большого радиуса продольный ток, создаваемый нарастающим за 1 с магнитным полем, может не достичь

центра установки. Это связано с тем, что при достаточно высокой температуре плазмы проводимость ее велика, а ток скинируется, проникая лишь на глубину порядка c/ω_{pe} . В принципе из-за развития ионно-звуковой неустойчивости можно, как и в теории ударных волн, рассчитывать на увеличение поперек магнитного поля толщины скин-слоя до $c/\omega_{pi}\alpha^{-1}$, где α определяется из соотношения $u = \alpha c_s$ (ток течет вдоль \mathbf{H}_0). Но даже полагая $\alpha = 1$, получим, что глубина проникновения тока в плазму равна c/ω_{pi} , а это при $n_0 \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ много меньше $r \sim 10^2 \text{ см}$. Здесь, однако, можно рассчитывать на разрушение скин-слоя из-за непотенциальных неустойчивостей, т. е. на то, что сосредоточение всего тока на периферии системы будет приводить к неустойчивости и перераспределению тока [156].

В-третьих, установки типа Токамак должны быть обеспечены системами дополнительного нагрева неомического характера, так как частота кулоновских столкновений падает с увеличением температуры. В качестве таковых можно использовать системы нагрева магнитно-звуковым резонансом на частоте порядка ω_{He} и нейтральной инжекции пучка. Все эти системы, приводящие к появлению в плазме колебаний большой интенсивности, исследуются теоретически и экспериментально [157—160].

Чтобы устранить указанные трудности, предложено использовать быстрый нагрев твердой дейтериево-тритиевой мишени источниками энергии большой мощности, а именно лазерами [161] и релятивистскими пучками [162]. При этом предполагалось, что никакого дополнительного удержания плазмы не нужно и за время разлета твердой мишени произойдет термоядерная реакция.

Оценим характерные значения величин. Для этого сначала напомним смысл критерия Лоусона, который связывает необходимые параметры плазмы с временем удержания для инициирования термоядерной реакции. Пусть $\mathcal{E}_я$ — энергия, выделяющаяся при ядерном взаимодействии двух ионов; $\sigma_я$ — сечение реакции и τ_e — энергетическое время удержания. Тогда в единицу времени потери энергии из 1 см^3 составят $n_0 T/\tau_e$, в то время как в результате ядерных реакций в 1 см^3 выделится в единицу времени количество энергии, равное $(n_0/2)^2 \langle \sigma_я V_i \rangle \mathcal{E}_я$. Приравняв выделенную энергию потерям, получим после подстановки численных значений критерий Лоусона: $n_0 \tau_e \geq 10^{14} \text{ с/см}^3$.

Если теперь рассматривать плазму с достаточно большой плотностью, например полностью ионизованную плазму с плотностью, равной плотности твердого тела $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, то время удержания такой плазмы, нагретой до температуры 10 кэВ, составит по порядку 10^{-8} с . Таким образом, быстро разогрев дейтериево-тритиевую твердую мишень, представляющую собой шарик небольших размеров, можно осуществить термоядерную реакцию. Если радиус шарика r , то время разлета плазмы порядка r/c_s , где c_s — скорость звука. Поэтому в критерий Лоусона можно подставить вместо τ_e величину r/c_s и получить

$$rn_0 \geq 10^{14} c_s. \quad (5.1)$$

Скорость звука соответствует температуре примерно 10 кэВ, т. е. для дейтерия $c_s \sim 10^8$ см/с. Подставляя в (5.1) плотность твердого тела, получаем

$$r \approx 0,2 \text{ см.} \quad (5.2)$$

Таким образом, проводя импульсный нагрев твердой мишени за время порядка 10^{-8} — 10^{-9} с, можно получить термоядерный микровзрыв, если сообщить мишени достаточное количество энергии. Необходимо нагреть мишень до температуры 10 кэВ. Это означает, что необходимо сообщить мишени радиуса r энергию $\mathcal{E} = (4\pi/3)r^3 n_0 T$. При $r = 1$ см это составит $3,2 \cdot 10^8$ Дж. Если учесть, что время разлета порядка 10^{-8} с, то мощность источника нагрева должна быть порядка 10^{16} Вт.

Самыми мощными источниками энергии в настоящее время являются лазеры и сильноточные релятивистские пучки электронов [173]. Хотя существующие установки еще не обеспечивают нужных значений энергии и мощности, можно надеяться, что прогресс в технике позволит приблизиться к необходимым параметрам в недалеком будущем.

Рассмотрим физические принципы, лежащие в основе существования и устойчивости релятивистского электронного пучка. При движении электронного пучка в вакууме на электроны действует кулоновская сила расталкивания и сила притяжения между движущимися электронами, создающими ток. Движение частиц в радиальном направлении описывается уравнением

$$m dv_r/dt = -e \{ E_r + (1/c) v_0 H_\phi \}, \quad (5.3)$$

где E_r — напряженность радиального электрического поля; H_ϕ — напряженность азимутального магнитного поля; v_r , v_0 — радиальная и продольная составляющие скорости электрона соответственно.

Напряженность электрического поля в пучке с плотностью зарядов n' на расстоянии r от оси $E_r = -2\pi e n' r$; напряженность магнитного поля $H_\phi = 2\pi r e n' v_0 / c$. Радиальный разлет покоящихся электронов ($v_0 = 0$) происходит только под действием кулоновских сил расталкивания, $F_r = 2\pi e^2 n' r$, где F_r — радиальная проекция силы, действующей на электрон на расстоянии r от оси пучка.

Из-за движения электронов ($v_0 \neq 0$) возникает магнитное поле, которое ослабляет силу расталкивания в γ_0^2 раз:

$$F_r = 2\pi e^2 n' r (1 - v_0^2/c^2) = 2\pi e^2 n' r / \gamma_0^2. \quad (5.4)$$

В электронном пучке с нескомпенсированным зарядом сила расталкивания всегда превышает силу стягивания, так как $\gamma_0^{-2} = 1 - v_0^2/c^2 > 0$, и магнитное поле лишь уменьшает силу расталкивания. Однако добавление в пучок даже небольшого количества покоящихся ионов может существенно изменить картину. Выражение для радиальной силы приобретает вид

$$F_r = 2\pi e^2 n' r (1 - v_0^2/c^2 - n_i/n'), \quad (5.5)$$

где n_i — концентрация ионов. Из (5.5) следует, что при добавлении в релятивистский электронный пучок, движущийся со скоростью $v_0 \approx c$, небольшого количества покоящихся ионов ($n_i/n' \geq 1/\gamma_0^2$) пространственное расталкивание пучка может смениться стягиванием.

Хорошо известны типы равновесия релятивистских пучков, когда пространственный заряд электронов частично компенсируется ионами. Впервые такие типы равновесий рассматривались в работе [164].

Увеличивать мощность электронного пучка можно, наращивая его ток. Но при достаточно больших значениях тока $I > I_{кр}$, где $I_{кр}$ — критическое значение тока, плотность кинетической энергии пучка может оказаться меньше плотности энергии магнитного поля. При этом ларморовский радиус электрона в собственном магнитном поле становится меньше радиуса пучка, что приводит к «запиранию» пучка. Найдем критическое значение тока $I_{кр}$. Из условия $r_0 > v_0/\omega_{He}$, где r_0 — радиус пучка электронов; ω_{He} — циклотронная частота электрона в собственном магнитном поле, нетрудно получить [165]

$$I_{кр} > (\gamma_0 m c^2 / e) v_0 / c = 1,7 \cdot 10^4 \beta \gamma_0 a; \quad \beta = v_0 / c. \quad (5.6)$$

Таким образом, возникает задача проведения пучков с током, большим $I_{кр}$. Для ее решения необходимо уменьшить собственное магнитное поле пучка. Этого можно добиться, помещая пучок в плазму, плотность которой превышает плотность пучка. Проникая в плазму, магнитное поле пучка вызывает в ней обратный ток. Экспериментальные данные, подтверждающие существование обратного тока, получены в работах [166, 167]. Если характерное время нарастания тока пучка много меньше, чем скин-слоевое время $4\pi\sigma r_0^2/c^2$ (здесь σ — проводимость плазмы), то при помещении пучка в плазму возникает обратный ток, почти равный току пучка. Условие $\tau_{нар} < 4\pi\sigma r_0^2/c^2$ легко выполнимо, так как даже при проводимости 10^{14} с^{-1} , соответствующей температуре 10 эВ, скин-слоевое время равно $10^{-6} r_0^2 \text{ с}$, а характерное время нарастания тока в пучке может быть порядка 10^{-8} с .

При помещении электронного пучка в плотную плазму возникнут дополнительные потери $\mathcal{E}_п$ кинетической энергии пучка $\mathcal{E}_{кин}$ на создание обратного тока. Однако нетрудно показать, что эти потери невелики. Действительно,

$$\mathcal{E}_п = (1/2) m n v^2; \quad \mathcal{E}_п / \mathcal{E}_{кин} = (n' n) / \gamma_0^2 \text{ при } \gamma_0 \approx 6 - 7, \\ -1/\gamma_0^2 \approx 1/40,$$

т. е. потери малы.

В случае бесконечной проводимости плазмы магнитные поля прямого и обратного токов взаимно компенсировали бы друг друга

и частицы пучка разлетались бы с радиальными тепловыми скоростями.

Напишем уравнения, пригодные для рассмотрения динамики релятивистского пучка, движущегося в плотной плазме ($n \gg n'$). Нас интересуют такие расстояния, на которых торможением пучка из-за парных столкновений можно пренебречь. Тогда радиальное стягивание пучка можно описать следующими уравнениями:

$$n' (d/dt) m' v_r' = - \partial p' / \partial r - (1/c) j_z' H_\varphi - e n' E_r; \quad (5.7)$$

$$(d/dt) p' n'^{-s} = 0; \quad p' = n' m' c^2 \langle \theta \rangle^2. \quad (5.8)$$

Здесь j_z — продольная компонента плотности тока; p — давление; θ — угол, характеризующий поперечный разброс частиц пучка в пространстве скоростей; s — показатель адиабаты; остальные обозначения общепринятые. В уравнениях для электронов плазмы можно пренебречь инерцией:

$$0 = - \partial p_e / \partial r - (1/c) j_z^e H_\varphi - e n E_r; \quad (5.9)$$

$$0 = - e n E_z - \nu m n v_z - n (e/c) v_r^2 H_\varphi. \quad (5.10)$$

Наконец, выпишем уравнение для радиального движения ионов

$$n (d/dt) M v_r^i = e E_r n - \partial p_i / \partial r. \quad (5.11)$$

Если из уравнения (5.7) вычесть уравнение (5.9), предварительно поделив их соответственно на n' и n , то легко убедиться, что с точностью до членов $n'/n \ll 1$ получим уравнение

$$n' (\partial/dt) (m' v_r') = - \partial p' / \partial r - (1/c) j_z' H_\varphi. \quad (5.12)$$

Оно не содержит параметров плазмы и определяет радиальное сжатие релятивистского пучка под действием только магнитной силы. Квазинейтральность плазмы обеспечивается малым радиальным перемещением электронов плазмы со скоростями, в $n'/n \gamma_0$ раз меньшими, чем скорость сжатия пучка.

Если сложить уравнения (5.9) и (5.11), получим уравнение радиального движения плазмы:

$$M n d v_r / dt = - (\partial/\partial r) (p_e + p_i) - (1/c) j_z^e H_\varphi. \quad (5.13)$$

Если уравнения (5.12) и (5.13) применять для исследования фокусировки пучка за время, много меньшее скин-слоя $4\pi\sigma r_0^2/c^2$, можно воспользоваться условием $|j_z^e + j_z'| \ll |j_z'|$ и в уравнениях (5.13) заменить j_z^e величиной $-j_z'$. В этих условиях из (5.10) и уравнений

$$(1/c) \partial H_\varphi / \partial t = \partial E_z / \partial r; \quad v_r^i = v_r^e; \quad j_z^e = \sigma (E_z + (v_z/c) H_\varphi) = - j_z'$$

следует, что

$$\partial H_\varphi / \partial t = -c (\partial/\partial r) [j'_z/\sigma + (v_r/c) H_\varphi]. \quad (5.14)$$

Систему уравнений (5.8), (5.12) — (5.14) следует дополнить уравнениями, определяющими T_e , T_i и σ . Если σ определяется кулоновскими столкновениями, то $\sigma = 10^{13} T^{3/2} \text{с}^{-1}$, где $[T] = [\text{эВ}]$. Увеличение T_e определяется джоулевым нагревом обратным током, причем $j'_z = -j'_z$:

$$(3/2) ndT_e/dt = j'^2_z/\sigma + (s-1) T_e dn/dt - \text{div} (\kappa \nabla T_e) - (3/2) ndT_i/dt, \quad (5.15)$$

где κ — коэффициент теплопроводности плазмы (обычно замагниченной).

Изучим на основе полученных уравнений сжатие релятивистского пучка, входящего в плазму с начальным радиусом R и средним угловым разбросом частиц $\langle \theta \rangle^2 = \langle (\theta - \bar{\theta})^2 \rangle$ ($\bar{\theta}$ — угол расхождения пучка). Ток пучка нарастает по некоторому закону $I = I(t)$. В первый момент магнитное поле H_φ отсутствует, и пучок разлетается под углом $\bar{\theta}$. Когда H_φ , определяемое уравнением (5.14), достигнет значения

$$H_{0\varphi} = cr'_0/Rj'_0 = (I_{\text{кр}}/cR) \langle \theta \rangle_0^2, \quad (5.16)$$

разлет прекратится и начнется самофокусировка. Будем рассматривать фокусировку сначала для достаточно плотной плазмы, когда можно пренебречь радиальным разлетом плазмы, описываемым уравнением (5.13). Тогда уравнение (5.14) можно записать в виде

$$H_\varphi = c (\partial/\partial r) \int_0^t (j'_z/\sigma) dt, \quad (5.17)$$

а закон изменения электропроводности определится уравнением

$$(3/2) ndT_e/dt = j'^2_z/\sigma. \quad (5.18)$$

Оценки показывают, что в определяющей фазе фокусировки коэффициент теплопроводности κ «замагничен» и мал. Выражая при помощи (5.18) зависимость $\sigma = \sigma(j', t)$, подставляя в (5.12), получим уравнение

$$n' \frac{d}{dt} m' v'_r = - \frac{\partial p'}{\partial r} + j'_z \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t \frac{1}{\sigma_0} j'_z(r, z, t') \times \\ \times \left[1 + \frac{5}{3} \int_0^{t'} \frac{j'^2 dt''}{\sigma_0 n_0 T_0} \right]^{3/5} dt'. \quad (5.19)$$

Здесь индексом 0 обозначены начальные значения.

Оценим из уравнения (5.19) длину, на которой пучок, входящий в плазму с «накопившимся» в ней к этому моменту магнит-

ным полем, фокусируется до квазиравновесного состояния, когда сила сжатия $c^{-1}j'_z H_\varphi$ уравновесится силой давления. Для этого пренебрежем в уравнении (5.19) членом $\partial p'/\partial r$ и заменим $d(m'v'_r)/dt$ на $m'c^2 d^2 r_0/dz^2$. Учтем также, что при фокусировке плотность тока j'_z меняется по закону $j'_z = j'_{z0} R^2/r_0^2$ (радиус пучка r_0 зависит от t и z). Анализ размерности показывает, что длина фокусировки [165]

$$l = R (\varepsilon_0 p_0 j_0^2 t)^{1/5} (n_0 m' c^2 / p_0)^{1/2} \sim j^{1/10} t^{-1/5} n^{-3/10} R^{4/5}. \quad (5.20)$$

На этой длине пучок сожмется до радиуса [165]

$$r_0 \approx l \langle \theta \rangle_0. \quad (5.21)$$

Результат получен в предположении, что $s = 2$ (двумерное сжатие, $\langle \theta \rangle = \langle \theta \rangle_0 R/r_0$). Согласно формулам (5.20), (5.21) длина фокусировки и предельный радиус пучка практически не зависят от тока, времени инжекции и температуры плазмы, а определяются начальным радиусом и плотностью плазмы*.

Оценим l и r_0 для следующих параметров: $I = 10^6$ А, $\mathcal{E} = 10^7$ эВ, $R = 10$ см, $n = 10^{18}$ см $^{-3}$, $t = 10^{-7}$ с. При этом $l \approx 100$ см, $r_0 \sim 10^2 \langle \theta \rangle_0$, т. е. для фокусировки пучка до $r_0 = 1$ см требуется, чтобы начальный угол $\langle \theta \rangle_0$ не превышал 10^{-2} . Эта фокусировка обеспечивается относительно малым магнитным полем [см. (5.16)]

$$H_\varphi = (I_{кр} R^2 / cr_0^3) \langle \theta \rangle_0^2 \approx 400 \text{ Э.}$$

Напряженность собственного поля такого тока пучка в вакууме равнялась бы $2 \cdot 10^5$ Э.

В процессе фокусировки выделяется тепло. Скорость нагрева плазмы легко оценить, если заметить, что стоящее в уравнении (5.19) выражение для магнитной силы есть отношение количества тепла, выделившегося в плазме за время инжекции, к радиусу плазмы. Эта сила в конце фокусировки равна по абсолютному значению градиенту давления p' . Поэтому можно написать, что давление плазмы в области сфокусированного пучка равно примерно p' и может существенно превышать начальное давление плазмы и магнитное давление.

Поясним смысл оценки l на простом примере. Пусть первоначально пучок радиуса R параллельно летящих частиц попадает в поле $H_\varphi = r H_0 / R$. В этом поле частицы начнут совершать бетатронные колебания с периодом $2l_0 = 2 (R m' c^2 / e H_0)^{1/2}$. Плотность тока $j'_z \approx j'_{0z} R^2 / r_0^2$ пропорциональна $\cos^{-2}(z/2l_0)$, и скорость роста

* При $n'/n > (T_e/Mc^2)^{1/2}$ обратный ток может оказаться неустойчивым относительно возбуждения ионно-звуковых колебаний в плазме, что приведет к сильному увеличению частоты рассеяния электронов и существенному уменьшению l и r_0 .

магнитного поля в соответствии с изложенным выше максимальна в сечении $z = l_0$, $z = 2l_0$ и т. д. Но чем больше $\partial H_\varphi / \partial t$ и, следовательно, само поле, чем круче траектория частицы, тем больше плотность тока и H_φ в данном сечении. Так происходит образование канала для пучка. Для каждого потока существует оптимально фокусирующий магнитный канал, при котором r_0 определяется средним разбросом угла разлета частиц $\langle \theta \rangle_0^2 = \langle (\theta - \bar{\theta})^2 \rangle$ при влете пучка в плазму. Оценки (5.20), (5.21) написаны для такого оптимального канала. В эксперименте размер и форму магнитного канала можно менять, задавая $n(z)$. Напомним, что $H_\varphi \sim n^{3/5}$.

В заключение приведем точное решение задачи о радиальном сжатии одномерного (по z) пучка, когда плотность тока распределена по сечению равномерно [165]. В этом случае из уравнений (5.17), (5.18) получаем

$$H_\varphi = c (\partial/\partial r) \int_0^t dt j/\sigma = -c \int_0^t (R^2/r^2) (j'_0/\sigma_0) \times \\ \times \delta[r - r_0(t', z)] \left[1 + (5/3) \int_0^{t'} j^2 dt''/n_0 T_0 \sigma_0 \right]^{-3/5} dt'. \quad (5.22)$$

Отсюда следует, что

$$H_\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq r_0(t); \\ -c \frac{R^2}{r^2} \frac{j'_0(t')}{\sigma_0} \left[1 + \frac{5}{3} \int_0^{t'} \frac{j_0^2 R^4 dt''}{\sigma_0 n_0 T_0 r_0^4} \right]^{-3/5} |r_0(t')|^{-1} & \text{при } r \geq r_0(t), \end{cases} \quad (5.23)$$

где t' определяется из уравнения $r_0 = r_0(t')$. Интеграл в квадратных скобках легко вычислить, если ток меняется во времени медленнее, чем $r_0(t)$. Тогда он равен значению в последний момент, так как подынтегральное выражение пропорционально r_0^{-4} .

Температура плазмы внутри пучка постоянна по сечению и растет во времени как

$$\frac{T}{T_0} \approx \left[1 + \frac{5}{3} \int_0^t \frac{R^4 j_0^2(t') dt'}{r_0^4(t') \sigma_0 n_0 T_0} \right] \approx \\ \approx \left[1 + \frac{5}{9} j_0'^2(t) \frac{R^4}{r_0^3 |r_0(t)|} \frac{1}{\sigma_0 n_0 T} \right]^{2/5}; \quad r < r_0(t). \quad (5.24)$$

Вне пучка нет обратного тока, и там температура во времени не меняется, но является функцией r , так как чем меньше r , тем дольше длится нагрев:

$$\frac{T}{T_0} \approx \left[1 + \frac{5}{9} \frac{R}{|\dot{r}(t)|} \frac{j_0^2(t')}{\sigma_0 n_0 T_0} \frac{R^3}{r^3} \right]^{2/5}, \quad (5.25)$$

где t' определяется уравнением $r = r_0(t')$. Когда $T/T_0 \gg 1$,

$$H_\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_0(t); \\ \frac{c}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{3/5} \left(\frac{j_0^2(t')}{\sigma_0 n_0 T_0}\right)^{-3/5} \frac{j_0(t')}{\sigma_0} \left|\frac{r}{r_0(t')}\right|^{2/5} & \text{при } r > r_0(t). \end{cases} \quad (5.26)$$

Давление, действующее на единицу площади поверхности вдоль пучка, равно

$$\frac{1}{c} \int j_z' H_\varphi dr = p_0 \left(\frac{j_0^2}{\sigma_0 n_0 T}\right)^{2/5} \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2/5} \left|\frac{r_0}{r_0(t')}\right|^{2/5} \frac{R^2}{r_0^2}. \quad (5.27)$$

Так как внутри пучка $H_\varphi = 0$, плотность частиц пучка по сечению и давление постоянны в течение всего времени сжатия, если оно много больше времени пролета частицы между «магнитными стенками». Приравнивая силу (5.27) газокINETическому давлению

$$p' = (1/2) n' m' c^2 \langle \theta \rangle^2 = (R^4 / r_0^4) (m' c j_0' / 2e) \langle \theta \rangle_0^2,$$

получим формулу, определяющую равновесный радиус пучка в соответствии с формулами (5.20) и (5.21).

Мы рассмотрели процесс фокусировки в пренебрежении разлетом частиц под действием градиента давления и силы $-j_z' H_\varphi / c$. Это означает, что найденные решения справедливы для моментов времени, меньших

$$r_0 (nM/p')^{1/2} \approx (R/c_s) (j_0^2 t / \sigma_0 n_0 T_0)^{1/5}. \quad (5.28)$$

При инжекции мощных пучков, когда $T \gg T_0$ [см. (5.24), (5.25)], от пучка пойдет расходящаяся цилиндрическая сильная ударная волна. Ударная волна будет «выметать» из области пучка плазму и вмороженное в нее магнитное поле, являющееся каналом для пучка. Начнется дефокусировка пучка. Течение этого процесса зависит от условий эксперимента: от наличия стенок, препятствующих разлету частиц плазмы в радиальном направлении, от скорости ухода тепла из плазмы на торцевые стенки камеры и пр. Не будем рассматривать разлет частиц плазмы и разрушение магнитного канала в деталях, а постараемся лишь охарактеризовать типы равновесий, к которым может привести разлет.

Равновесные решения для пучка релятивистских электронов в плотной бесстолкновительной плазме определяются уравнением

$$n(d/dt) m \mathbf{v} = en\mathbf{E} + (e/c) n [\mathbf{v} \mathbf{H}] - \nabla n T. \quad (5.29)$$

В равновесии для электронов пучка $v_z' = c$, $T = T'$, $n = n'$, для электронов плазмы $v_z = -|\mathbf{v}|$, $T = T_e$, $n = n_e$, для ионов плаз-

мы $v_z = 0$, $T = T_i$, $n = n_i$. Уравнения Максвелла запишутся в виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = - (4\pi e/c) (n' \mathbf{v}' + n_e \mathbf{v}_e); \quad \text{rot } \mathbf{E} = - (1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t; \quad (5.30)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e - n'). \quad (5.31)$$

В плазме равновесие релятивистского пучка электронов с током, большим критического (ларморовский радиус электрона пучка больше радиуса пучка), возможно только при наличии обратного тока, уменьшающего магнитное поле. Но из (5.29) легко получить, что в плотной плазме ($n_e \geq n'$) плотность обратного тока не больше $(c/H_\varphi) (d/dr)(n_e T_e + n_i T_i)$. Чтобы обратный ток был сравним с током пучка, нужен характерный размер канала обратного тока, меньший

$$a = (n_e T_e + n_i T_i) / (4\pi e^2 n'^2 \Delta). \quad (5.32)$$

Величина $\Delta = |j'/j_e|$ характеризует степень компенсации токов внутри пучка. Обратный ток может плавно распределяться по сечению пучка (a порядка r_0), но тогда необходимо, чтобы Δ было достаточно мало. Обратный ток может также течь по тонким токовым нитям ($a \ll r_0$), так что внутри нити $\Delta \approx 1$. Предельно неоднородное состояние пучка получается, когда и релятивистские электроны текут по тонким токовым нитям с радиусом порядка $(T'/4\pi e^2 n')^{1/2}$, нити прямого и обратного токов перепутаны, а среднее магнитное поле равно нулю. Ниже будет показано, что плавное распределение тока с малым Δ неустойчиво и стремится перейти в состояние с тонкими токовыми нитями.

Приведенные соображения, возможно, станут более убедительными после рассмотрения относительно простого модельного примера: типов равновесия «бесконечного» и однородного по координатам z и y потока релятивистских электронов. Пусть температуры и скорости электронов плазмы и пучка в слое толщиной $2x_0$ по координате x постоянны, а $T_i = 0$. Из (5.29) следует, что вдоль x

$$\left. \begin{aligned} n' T' + n_e T_e + H_y^2 / 8\pi &= \text{const}; \\ n_\alpha &= n_\alpha(0) \exp \left\{ (e v_\alpha / T_\alpha) \int_0^x H_y dx \right\}; \\ v_e &\equiv -v; \quad n_e(0) \equiv n_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Выберем начало координат в точке, где $H_y = 0$, введем новую функцию $u = \ln [n'/n'(0)]$ и безразмерную переменную $\xi = x (T'/4\pi e n'_0)^{-1/2}$. Для $u(\xi)$ из (5.33) следует уравнение

$$\begin{aligned} (1/2) (du/d\xi)^2 &= (1 - eu) + (n_0 T_e / n'_0 T') \{1 - \exp [-(v/c) (T'/T_e) u]\} \equiv \\ &\equiv (1 + n_0 T_e / n'_0 T_e) - U(u). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Его можно интерпретировать как уравнение, описывающее движе-

ние частицы единичной массы в потенциальном поле $-\Delta U(u)$ (u — смещение, ξ — время). Единственный минимум потенциала соответствует точке $u = [1 + (v/c) T'/T_e]^{-1} \ln(vn_0/cn'_0)$. При $vn_0 = cn'_0$, $du/d\xi = 0$, т. е. уравнение (5.34) имеет решение $u = 0$, что соответствует полной компенсации токов внутри слоя при однородной плотности пучка и плазмы. Если $n_0 T_e \ll n'_0 T'$ и $\Delta = 1 - n'_0 c/n_0 v$, уравнение (5.34) легко решается. Внутри слоя

$$(n' - n'_0)/n'_0 = 2(T_e/T') \Delta \sin^2(\pi e^2 n'^2_0/2n_0 T_e)^{1/2} x, \quad (5.35)$$

а плотность плазмы меняется значительно сильнее:

$$n_e/n = (n'/n'_0)^{n'_0 T'/n_0 T_e}; \quad (n_e - n_0)/n_0 \approx \Delta. \quad (5.36)$$

Если принять, к примеру, что вне слоя, т. е. при $|x| > x_0$, направленная скорость электронов плазмы $v = 0$ и давление $n_e T_e$ постоянно, то из (5.34) получаем, что на границе слоя ($x \geq x_0$) магнитное поле и плотность пучка меняются по закону

$$\left. \begin{aligned} H_\phi^2 &= 8\pi n'_0 T' \operatorname{th} \left[\left(\frac{4\pi e^2 n'_0}{T'} \right)^{1/2} (x - x_0) \right]; \\ \frac{n'}{n'_0} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \exp \left[\left(\frac{4\pi e^2 n'_0}{T'} \right)^{1/2} \frac{(x - x_0)}{4} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[\left(\frac{4\pi e^2 n'_0}{T'} \right)^{1/2} \frac{(x_0 - x)}{4} \right] \right\}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

В граничном слое обратного тока нет, и магнитное поле, образованное вылетающими с тепловой скоростью из центра пучка релятивистскими электронами, заворачивает их обратно на длине $(T'/4\pi n'_0 e^2)^{1/2}$. Для такого решения нет ограничений по току.

Наиболее опасны для проведения пучка возмущения, вызывающие поперечное смещение пучка как целого, т. е. неустойчивости возмущений в виде плоских змеек или винта (мода с азимутальным числом, равным единице). Очевидно, есть физическое объяснение существованию таких неустойчивостей. Они связаны с тем, что на поток частиц пучка,двигающихся по искривленной траектории, действует центробежная сила. Но поток релятивистских электронов может двигаться только по магнитному каналу, и чтобы сместить пучок электронов, нужно сместить магнитный канал. Новый магнитный канал пучок может создать лишь за время, большее времени, прошедшего с начала инъекции. Поэтому такая неустойчивость для быстрых процессов не опасна. Для случая отсутствия обратного тока она изучена Розенблютом и др.

Магнитный канал может сместиться под действием центробежной силы вместе с плазмой, в которую он заморожен. Инкремент такой «шланговой неустойчивости» зависит от массы плазмы, захваченной этим движением, и определяется из простого уравнения

$$\left. \begin{aligned} -m' n' c^2 k_z^2 r_0^2 \xi_{\perp} &= Mn \omega^2 (r_0^2 + \kappa^{-2}) \xi_{\perp}; \\ \kappa^2 &= k_z^2 - \omega^2/c_s^2; \quad c_s^2 = (1/M) dp/dn, \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

где ξ_{\perp} — поперечное смещение канала пучка. Волновой вектор возмущения вдоль пучка k_z ограничен условием $k_z < 1/r_0 \langle \theta \rangle$. В случае обратного неравенства заведомо неприменимо гидродинамическое рассмотрение; в этом случае избыточное давление частиц на вогнутую внутрь поверхность «шланга» должно стабилизировать шланговую неустойчивость. Инкремент шланговой неустойчивости равен

$$\text{Im } \omega = (n' m' / nM)^{1/2} k_z c < (n' m' / nM)^{1/2} c / r_0 \langle \theta \rangle. \quad (5.39)$$

Пока скорость поперечного смещения $\gamma \xi_{\perp}$ магнитного канала с пучком и плазмой, захваченной магнитным полем канала, мала по сравнению со скоростью звука в окружающей плазме, справедлива формула (5.39). Но при сверхзвуковом движении резко возрастают потери энергии, и неустойчивость должна стабилизироваться. Поэтому скорость смещения канала не должна превышать c_s , и получаем ограничение на радиус пучка, при котором шланговая неустойчивость незначительна ($\xi_{\perp} < r_0$):

$$r_0 > \xi_{\perp} t_{\text{инж}} \approx c_s t_{\text{инж}}. \quad (5.40a)$$

Это условие можно переписать через начальные параметры пучка, если T_0 определяется формулой

$$\frac{r_0}{R} > \left(\frac{j_0'^2 t}{\sigma_0 n_0 T_0} \right)^{1/10} \left[\left(\frac{T_0}{M} \right)^{1/2} \frac{t_{\text{инж}}}{R} \right]^{1/2}. \quad (5.40b)$$

В плазме малой плотности состояние с плавным распределением плотности частиц по сечению неустойчиво. Прямой и обратный токи разбиваются на тонкие нити. В этом легко убедиться, когда внутри пучка почти полностью компенсируются токи, а электроны пучка и плазмы движутся по почти прямолинейным траекториям. В этом случае во внутренней области для однородных вдоль пучка возмущений с длиной волны, много меньшей радиуса пучка, после обычной процедуры линеаризации уравнений движения (5.29)—(5.31) получается дисперсионное уравнение [165]

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p'^2}{\omega^2 - k^2 v_T'^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2} \right] \left[1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_p'^2}{\gamma'^2 \omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma^2 \omega^2} - \left(\beta'^2 \frac{\omega_p'^2}{\omega^2 - k^2 v_T'^2} + \beta^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \right] = \\ & = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2 \beta}{\omega^2 - k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_p'^2 \beta'}{\omega^2 - k^2 v_T'^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Здесь $\omega_{pa}^2 = 4\pi n_a e^2/m_a$; $v_{T_a} = (T_a/m_a)^{1/2}$; $m' = \gamma m_e$; $\beta_a = v_a/c$; s — показатель адиабаты; $\beta' n_0 = \beta n_e$; $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$; $\gamma' = \sqrt{1 - v'^2/c^2}$.

Из уравнения (5.41) легко получить критерий неустойчивости, положив $\omega^2 = 0$ и $s = 1$:

$$k_x^2 = \beta'^2 \omega_p'^2 / v_T'^2 + \beta^2 \omega_{pe}^2 / v_{Te}^2 - (1/c^2) (\omega_{pi}^2 + \omega_p'^2 / \gamma'^2 + \omega_{pe}^2 \gamma^2) \geq \geq \pi^2 / x_0^2, \quad (5.42)$$

Это условие неустойчивости практически можно переписать в виде неравенства ($\beta' = 1$; $\gamma = 1$; $x_0 \gg v_T' / \omega_p'$) [165]

$$n'/n > (T'/mc^2) (1 + n'T/n_e T_e)^{-1}. \quad (5.43)$$

Таким образом, в плотной плазме пучок может быть устойчив, а в разреженной плазме — неустойчив.

Физическая причина этих неустойчивостей очевидна. При нарушении условия $n's = n_e v_e$ из-за локального увеличения концентрации электронов плазмы возникают нескомпенсированный ток и магнитное поле, «отшнуровывающее» в первую очередь электроны плазмы как более легкие частицы. «Шнурование» может идти без возмущения плотности плазмы за счет пространственного разделения электронов плазмы и пучка ($\delta n' = -\delta n_e$). Эта быстрая неустойчивость развивается с инкрементом $\text{Im}\omega = 2kv(\gamma^3/\gamma')^{1/2}$. Но она существует лишь в разреженной плазме [$n'/n > > (T'/mc^2)^{1/2}$]. Более медленная неустойчивость с инкрементом $\text{Im}\omega = \omega_{pi}\beta$ приводит к шнурованию плазмы и может иметь место в более плотной плазме: $n'/n > T'/\gamma mc^2$. Качественно ясно, что эти неустойчивости развиваются до тех пор, пока весь пучок не разобьется на тонкие нити, по каждой из которых течет ток. Они будут равномерно перемешаны с нитями обратного тока, так что среднее магнитное поле равно нулю.

§ 5.2. Коллективное торможение мощного пучка релятивистских электронов в плазме

Сечение столкновения релятивистских электронов с частицами плазмы весьма мало (10^{-18} — 10^{-19} см²), поэтому даже при плотности плазмы $5 \cdot 10^{22}$ см⁻³ на расстоянии порядка радиуса мишени, примерно равном 1 см, релятивистский электрон практически не теряет энергии. Следовательно, быстрый и эффективный ввод мощности в плазменную мишень можно осуществить лишь в результате коллективных процессов. Таким образом, необходимо исследовать вопрос о возбуждении релятивистским пучком ленгмюровских колебаний, которые затем, поглощаясь тем или иным способом, должны нагреть плазму. Очень важна при этом длина, на которой происходит передача энергии от пучка колебаниями плазмы. Эта длина в плотной плазме должна быть меньше характерного размера мише-

ни. Рассмотрим сначала неустойчивости монохроматического релятивистского пучка в линейном приближении [168].

Если u — скорость пучка, n' — его плотность, n — плотность плазмы, то, как показано в работе [169], используя то, что n'/n мало, и считая колебания потенциальными, можно получить дисперсионное соотношение тем же способом, что и для нерелятивистских пучков. Отличие состоит лишь в том, что «продольная» масса электронов пучка равна $\gamma^3 m$, а «поперечная» — γm , где $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Это непосредственно следует из соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = -eE. \quad (5.44)$$

Действительно, если \tilde{v} — возмущение скорости электронов пучка, много меньшее u , то $v = u + \tilde{v}$. Уравнение движения для колебаний электронов в направлении скорости u имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_0 \frac{(\tilde{v}_{\parallel} + u)}{\sqrt{1 - (v_{\parallel} + u)^2/c^2}} &\approx \frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\tilde{v}_{\parallel}}{dt} = \\ &= \gamma^3 m_0 \frac{d\tilde{v}_{\parallel}}{dt} = -eE_{\parallel}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

в то время как для колебаний поперек пучка

$$\frac{d}{dt} m_0 \frac{\tilde{v}_{\perp}}{\sqrt{1 - (v_{\perp}^2 + u^2)/c^2}} \approx \frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\tilde{v}_{\perp}}{dt} = -eE_{\perp}. \quad (5.46)$$

Отсюда с использованием результатов гл. 1 следует, что дисперсионное соотношение имеет вид

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2 (n'/n) \left[(k_{\perp}^2/k^2) 1/\gamma^3 + (k_{\parallel}^2/k^2) 1/\gamma \right]}{(\omega - k_{\parallel} u)^2}. \quad (5.47)$$

Максимальный инкремент (чтобы не путать с релятивистским фактором, в этой главе инкремент обозначим δ) δ достигается при $\omega_{pe} = k_{\parallel} u$

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_{pe} \left(\frac{n'}{n} \right)^{1/3} \left(\frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \frac{1}{\gamma^3} + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{1}{\gamma} \right)^{1/3}; \quad k_{\parallel} = \frac{\omega_{pe}}{u}. \quad (5.48)$$

В релятивистском случае в первую очередь возбуждаются колебания, распространяющиеся почти перпендикулярно пучку. Такая угловая зависимость инкремента связана с тем, что при $\gamma \gg 1$ «поперечная» масса электрона существенно меньше «продольной». Если увеличивать отношение $k_{\perp} u / \omega_{pe} \approx k_{\perp} c / \omega_{pe}$, то становится существенным учет поперечного теплового движения в пучке, и, вообще говоря, необходимо переходить к кинетическому описа-

нию неустойчивости. (Напомним, что условие незамагниченности электронов в колебаниях есть $\delta \geq \omega_{He}$.)

Условие применимости гидродинамического описания, как показано в гл. 1, заключается в малом тепловом разбросе частиц пучка; для нашего случая его можно записать в виде

$$k_z |\Delta v_z| < \delta. \quad (5.49)$$

Здесь ось z направлена вдоль пучка ($k_{\parallel} = k_z$). Найдем Δv_z . В релятивистском случае она определяется не только ΔP_z , но также и ΔP_{\perp} , так как

$$P = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad v = Pc / \sqrt{P^2 + m_0^2 c^2}. \quad (5.50)$$

Таким образом,

$$v_z = P_z c / \sqrt{P_z^2 + P_{\perp}^2 + m_0^2 c^2} = c \Phi(P_{\perp}, P_z). \quad (5.51)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta v_z = c \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P_z} \Delta P_z + \frac{\partial \Phi}{\partial P_{\perp}} \Delta P_{\perp} \right) = c \left[\frac{m_0^2 c^2}{P_z^2 + m_0^2 c^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Delta P_z}{(P_z^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}} - \frac{P_z P_{\perp} \Delta P_{\perp}}{(P_z^2 + m_0^2 c^2)^{3/2}} \right].$$

Так как $\Delta P_{\perp} \sim P_{\perp} \ll P_z$, а $\gamma = 1 + P_z^2/m_0^2 c^2 \gg 1$, то

$$\Delta v_z \approx c \Delta P_z / \gamma^2 P_z - c P_{\perp}^2 / P_z^2. \quad (5.52)$$

Из уравнения (5.44) следует, что $\Delta P_z / \Delta P_{\perp} \sim k_z / k_{\perp} \ll 1$. Поэтому основной вклад в Δv_z дает P_{\perp} . К тому же возмущения с большими значениям k_{\perp} наиболее неустойчивы и согласно последней оценке и формуле (5.52) приводят довольно быстро к нарушению условия (5.49), в которое следует подставить $k_z = \omega_{pe}/c$ и $\delta \sim \sim \omega_{pe} (n'/n\gamma)^{1/3}$. Вообще говоря, в зависимости от параметра $\bar{\theta}^2 \gamma^2 = (P_{\perp}^2/P_z^2) \gamma^2$ у пучка с заданным разбросом импульса гидродинамическое приближение нарушается из-за поперечного или продольного разброса [см. (5.52)]. При фокусировке пучка по пути к мишени $\bar{\theta}$ сильно возрастает, и, например, для параметров пучка, приведенных в § 5.1, гидродинамическое приближение несправедливо. Таким образом, основную стадию торможения пучка нужно описывать при помощи кинетических уравнений [170].

Различие состоит лишь в том, что теперь дифференцирование функции распределения производится не по скорости v , а по импульсу P , так как частицы релятивистские. Так как по самой постановке задачи нас интересует стационарная инжекция пучка в полу-

пространство $z > 0$, занятое плазмой, то система квазилинейных уравнений примет вид

$$(3v_{Te}^2 k_z/\omega_{pe}) \partial W_k/\partial z = 2\delta_k W_k; \quad (5.53)$$

$$c(P_z/P) \partial f_b/\partial z = (\partial/\partial P_\alpha) D_{\alpha\beta} \partial f_b/\partial P_\beta, \quad (5.54)$$

где $3v_{Te}^2 k_z/\omega_{pe}$ — групповая скорость ленгмюровских колебаний вдоль оси z ; $D_{\alpha\beta}$ — квазилинейный коэффициент диффузии в пространстве импульсов:

$$D_{\alpha\beta} = 8\pi e^2 \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W_k \delta(\omega - kv) dk; \quad (5.55)$$

$W_k(z)$ — спектральная плотность энергии ленгмюровских колебаний; δ_k — инкремент:

$$\begin{aligned} \delta_k &= (\omega_k^3/k^2) m_0 \int k (\partial f_b/\partial P) \delta(\omega_k - kv) dP; \\ v(P) &= Pc (P^2 + m_0^2 c^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Для вычисления δ и $D_{\alpha\beta}$ удобно использовать сферические координаты P, θ, φ в пространстве импульсов и k, θ', φ' в пространстве волновых векторов. Здесь θ и θ' — углы между осью z и векторами \mathbf{P} и \mathbf{k} соответственно. Таким образом, как и в гл. 1, имеем

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta' \cos \varphi'; & P_x &= P \sin \theta \cos \varphi; \\ k_y &= k \sin \theta' \sin \varphi'; & P_y &= P \sin \theta \sin \varphi; \\ k_z &= k \cos \theta'; & P_z &= P \cos \theta. \end{aligned}$$

Вследствие аксиальной симметрии задачи функция распределения частиц пучка f в любой момент не зависит от азимутального угла φ .

Найдем $k_P = (\mathbf{k} \mathbf{e}_P)$, $k_\theta = (\mathbf{k} \mathbf{e}_\theta)$, $k_\varphi = (\mathbf{k} \mathbf{e}_\varphi)$ — проекции вектора \mathbf{k} на направления единичных векторов \mathbf{e}_P , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ в пространстве импульсов. Чтобы найти k_P , k_θ и k_φ , зная проекции \mathbf{k} в декартовой системе координат, необходимо определить в этой же системе координат составляющие векторов \mathbf{e}_P , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ . Это нетрудно сделать, если вспомнить, что каждый из них направлен по нормали к поверхностям $P = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ соответственно. Найдем, например, вектор \mathbf{e}_P . По определению он имеет следующие компоненты в декартовой системе координат:

$$\mathbf{e}_P = \frac{\{\partial P/\partial P_x, \partial P/\partial P_y, \partial P/\partial P_z\}}{\sqrt{(\partial P/\partial P_x)^2 + (\partial P/\partial P_y)^2 + (\partial P/\partial P_z)^2}}.$$

Используя то, что $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$, получим

$$\mathbf{e}_P = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}.$$

Аналогично можно записать

$$\mathbf{e}_\theta = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\}; \quad \mathbf{e}_\varphi = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}.$$

Окончательно имеем

$$k_P = k (\sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta');$$

$$k_\theta = k (\sin \theta' \cos \theta \cos (\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta');$$

$$k_\varphi = -k \sin \theta' \sin (\varphi - \varphi').$$

Осталось вычислить скалярные произведения $(\mathbf{k}\mathbf{v})$ и $(\mathbf{k} \partial f / \partial \mathbf{P})$. Подставляя проекции векторов \mathbf{k} и \mathbf{v} в декартовой системе координат, получаем, что $(\mathbf{k}\mathbf{v}) = kc (\sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta')$.

Здесь учтено, что при $\gamma \gg 1$ $(\mathbf{k}\mathbf{v}) = (kcP/P) = kc$. Найдем теперь скалярное произведение $(\mathbf{k} \partial f / \partial \mathbf{P})$ в сферической системе координат с учетом того, что $\partial f / \partial \varphi = 0$:

$$(\mathbf{k} \partial f / \partial \mathbf{P}) = k_x \partial f / \partial P_x + k_y \partial f / \partial P_y + k_z \partial f / \partial P_z.$$

Производная $\partial f / \partial P_x = (\partial f / \partial P) \partial P / \partial P_x + (\partial f / \partial \theta) \partial \theta / \partial P_x$, но так как

$\theta = \arctg \sqrt{P_x^2 + P_y^2} / P_z$, а $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$, то $\partial f / \partial P_x = \partial f / \partial P \sin \theta \cos \varphi + (1/P) (\partial f / \partial \theta) \cos \theta \cos \varphi$. Вычисляя аналогично $\partial f / \partial P_y$ и $\partial f / \partial P_z$, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \partial f \partial s = & (1/\bar{P}^2) (\partial/\partial \bar{P}) \bar{P}^2 [D_{\bar{P}\bar{P}} \partial f / \partial P + D_{\bar{P}\theta} (1/\bar{P}) \partial f / \partial \theta] + \\ & + (1/\bar{P} \sin \theta) (\partial/\partial \theta) \sin \theta [D_{\bar{P}\theta} \partial f / \partial \bar{P} + (D_{\theta\theta} / \bar{P}) \partial f / \partial \theta], \end{aligned} \quad (5.57)$$

где $f = f_b P_0^3 / n'$; P_0 — начальный импульс электрона пучка; $\bar{P} = P P_0$; $s = z (m_0 c^2 \omega_{pe} / 3v_{Te} P_0) n' / n$; $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} 3v_{Te}^2 n / (mc^3 P_0 \omega_{pe} n')$ — новые безразмерные переменные [41]. Тензор диффузии при этом имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} D_{PP} \\ D_{P\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{array} \right\} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dk}{k} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \frac{\sin \theta' \omega(k, \theta') d\theta'}{\sqrt{(\cos \theta'_1 - \cos \theta)(\cos \theta - \cos \theta'_2)}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\cos \theta - (kc/\omega_{pe}) \cos \theta'}{\sin \theta} \\ -\frac{(\cos \theta - (kc/\omega_{pe}) \cos \theta')^2}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}; \quad (5.58)$$

$$\omega(k, \theta') = W_k \frac{3\omega_{pe}^3 v_{Te}^2}{c^3 P_0 n'};$$

$$\cos \theta'_{1,2} = \frac{\omega_{pe}}{kc} \left(\cos \theta \pm \sin \theta \sqrt{\frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} - 1} \right).$$

Чтобы найти начальный инкремент и его угловую зависимость, будем считать, что функцию распределения при $z = 0$ можно представить в виде произведения двух функций:

$$f_{b_{z=0}} = [n' g(\theta) / 2\pi P_0^2] \delta(P - P_0). \quad (5.59)$$

Введя теперь безразмерный инкремент $\bar{\delta}_k = \delta_k n P_0 / \omega_{pe} n' m_0 c$, получим из формулы (5.56) для функции вида (5.59)

$$\bar{\delta}(k, \theta') = \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 c^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{[\cos \theta - (kc/\omega_{pe}) \cos \theta'] \partial g / \partial \theta - 2g \sin \theta}{\sqrt{(\cos \theta_1 - \cos \theta)(\cos \theta - \cos \theta_2)}} d\theta, \quad (5.60)$$

где $\cos \theta_{1,2} = (\omega_{pe}/kc) (\cos \theta' \pm \sqrt{k^2 c^2 / \omega_{pe}^2 - 1} \sin \theta')$. Соответственно второе квазилинейное уравнение для шумов имеет вид

$$\partial \omega(k, \theta') / \partial z = 2 \bar{\delta}(k, \theta') \omega(k, \theta'). \quad (5.61)$$

Прежде всего найдем начальный инкремент. Для волн, распространяющихся точно вдоль пучка ($\theta' = 0$), из формулы (5.60) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(k, 0) &= \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 c^2} \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(\cos \theta - kc/\omega_{pe}) \partial g / \partial \theta - 2g \sin \theta}{i(\cos \theta - \omega_{pe}/ku)} d\theta = \\ &= \pi \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 c^2} \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \left(\cos \theta - \frac{\omega_{pe}}{ku} \right) \left[\frac{\partial g}{\partial \theta} \left(\cos \theta - \frac{kc}{\omega_{pe}} \right) - 2g \sin \theta \right] d\theta = \\ &= \pi \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 c^2} \left[\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \sin^2 \theta g(\theta) \right] \Big|_{\theta = \frac{\omega_{pe}}{kc}}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Аналогично можно проанализировать зависимость инкремента от θ' для $\theta' > \Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — угловой разброс в пространстве импульсов.

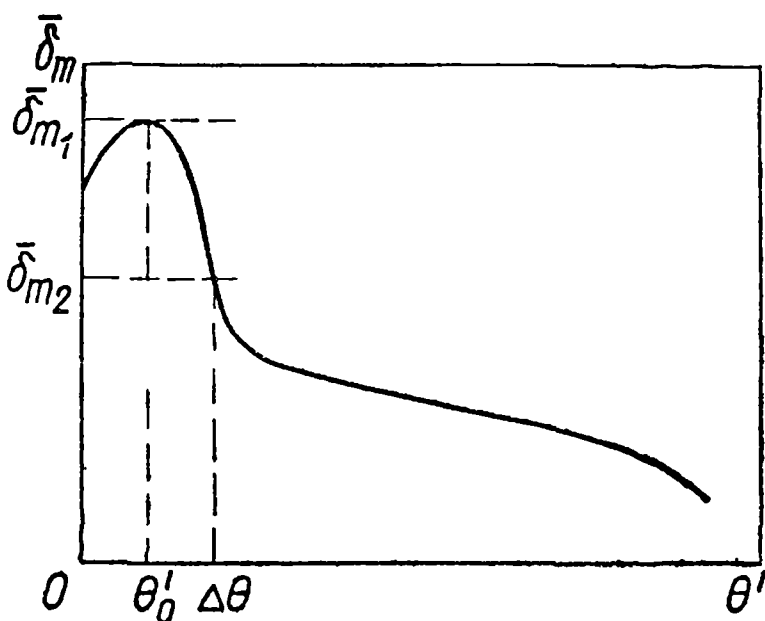


Рис. 66

В работе [170] функция $g(\theta)$ выбиралась пропорциональной $\exp(-\theta^2 / \bar{\theta}^2)$, в работе [171] зависимость инкремента от θ' анализировалась численно. Результаты расчетов для инкремента, максимизированного по k , удобнее всего представить в виде графика $\delta_m(\theta')$ (рис. 66 [41]).

Ширина максимума на кривой $\delta_m(\theta')$ примерно равна угловому разбросу в пространстве импульсов. Вблизи точки $\theta' = \theta'_0$ спектр

колебаний имеет вид

$$\omega = \omega_T \exp \left[\delta_{m_1} + (1/2) \partial^2 \delta_{m_1} / \partial \theta'^2 \Big|_{\theta'=\theta'_0} (\theta' - \theta'_0) \right] z/v_{gz},$$

где v_{gz} — групповая скорость; ω_T — нормированная спектральная плотность энергии тепловых шумов. Обратное влияние шумов на функцию распределения существенно при $z/v_{gz} \sim \Lambda/\delta_{n_1}$, где Λ — кулоновский логарифм (см. гл. 1). К этому моменту

$$\omega = \omega_T \exp(\Lambda) \exp \left[(\Lambda/2\delta_{m_1}) \partial^2 \delta_{m_1} / \partial \theta'^2 \Big|_{\theta'=\theta'_0} (\theta' - \theta'_0)^2 \right].$$

Таким образом, как во всех квазилинейных задачах, рассматривавшихся ранее, спектр колебаний будет стянут в узкую область шириной порядка $\Delta\theta \sqrt{\Lambda}$ вокруг точки $\theta' = \theta'_0$ (см. рис. 66).

Полагая $\omega(k, \theta') = \bar{\omega}(k) \delta(1 - \cos \theta')$ и проводя такие же выкладки, как и при вычислении инкремента по направлению $\theta' = 0$, получаем для $\theta \ll 1$

$$\left. \begin{array}{l} D_{PP} \\ D_{P\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{array} \right\} = \pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta \\ \theta^2 \end{pmatrix} \bar{\omega} \Big|_{kc/\omega_{pe} = 1 + \theta^2/2}. \quad (5.63)$$

Значит, диффузия по импульсу идет гораздо быстрее, чем по углу, и за время, в течение которого угловой разброс $\Delta\theta$ увеличивается примерно на $\Delta\theta_0$, пучок выделяет в плазме значительную энергию. Согласно обычным формулам одномерной теории это происходит на расстоянии

$$l \sim \Lambda / \delta_{m_1} = \Lambda(c/\omega_{pe}) (v_{Te}^2/c^2) \gamma (n/n') (\Delta\theta_0)^2, \quad (5.64)$$

так как в размерных переменных

$$\delta \sim \omega_{pe} (n'/n) (1/\gamma) 1/(\Delta\theta_0)^2. \quad (5.65)$$

Последнее соотношение следует и из формулы (5.62), так как

$$\int_0^\pi g(\theta) \sin \theta d\theta = 1. \quad \text{Проверим теперь условия применимости кинетического приближения. Его можно записать в виде } k_z \Delta v_z > \delta_{\text{кин}},$$

где $\delta_{\text{кин}}$ определяется формулой (5.65). Считая, что $k_z = \omega_{pe}/c$, а $\Delta v_z \sim c P_\perp^2 / P_0 = c (\Delta\theta_0)^2$, получим, что кинетическое рассмотрение справедливо при

$$\Delta\theta_0 > [(n'/n)/\gamma]^{1/4}. \quad (5.66)$$

Для опытов с плазмой твердой мишени при $n' \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $\gamma \approx 20$ кинетический подход справедлив уже при $\Delta\theta > 0,05$. Подставляя в формулу (5.64) значения величин, полу-

чаем, что длина квазилинейной релаксации очень мала. Отметим, что v_{Te} следует вычислять по $T_{\text{макс}} \approx 10$ кэВ.

Однако задача о длине торможения релятивистского пучка гораздо сложнее. Во-первых, при квазилинейной релаксации пучка, инжектируемого в полупространство, уровень шумов очень большой. Это связано с тем, что групповая скорость ленгмюровских колебаний v_{gz} много меньше скорости пучка c , поэтому, как и в нерелятивистских задачах, $W_k \approx (c/v_{gz})n'P_0c$, где P_0c — энергия релятивистского электрона. Нелинейное взаимодействие колебаний может приводить к подавлению неустойчивости и перекачке шумов в область меньших значений k , т. е. в область более высоких фазовых скоростей, таких, что $\omega_{pe}/k > c$ [170, 172]. Во-вторых, в плотных мишенях необходимо учитывать затухание колебаний из-за кулоновских столкновений электронов с ионами, частота которых ν_{ei} , вообще говоря, не мала [170].

Кроме того, в ряде случаев могут оказаться весьма существенными эффекты неоднородности плазмы, приводящие к подавлению неустойчивости [173]. Рассмотрим эти эффекты последовательно. Спектр ленгмюровских колебаний является нераспадным, поэтому основным нелинейным процессом, стабилизирующим неустойчивость, будет индуцированное рассеяние колебаний на электронах и ионах, рассмотренное в гл. 4. В уравнение для шумов, таким образом, нужно добавить два члена, и оно примет вид

$$v_{gz} \partial W_k / \partial z = \delta W_k - \delta_{\text{нел}}^e W_k - \delta_{\text{нел}}^i W_k. \quad (5.67)$$

По порядку $\delta_{\text{нел}}^e$ равен $\omega_{pe}(W/nT_e)(kr_{De})^3$.

Рассеяние на ионах доминирует, когда (см. гл. 4) $\omega/k > v_{Te}^2 / v_{Ti}$, т. е.

$$T_i > [T_e^2 / m (\omega/k)^2] M/m. \quad (5.68)$$

При этом $\delta_{\text{нел}}^i \sim (W/nT) \omega_{pe}$, когда $T_e \sim T_i$. Если же имеет место неравенство, обратное (5.68), то рассеяние на ионах возможно только при малом изменении модуля волнового вектора («эстафетная» перекачка). При этом

$$\Delta k/k < v_{Ti} \omega / kv_{Te}^2. \quad (5.69)$$

В этом случае можно описать весь процесс при помощи дифференциального уравнения, полученного в гл. 4, и характерную частоту спектральной перекачки оценить как $\omega_{pe}(W/nT)(\Delta k/k)^2$. Так как $\omega/k \sim c$, $\delta_{\text{нел}}^i$ и в этом случае больше, чем $\delta_{\text{нел}}^e$. Рассеяние на электронах и ионах приводит к уменьшению k и увеличению фазовой скорости колебаний ω_{pe}/k , которая становится больше c . Такие колебания могут накапливаться до высокого уровня, не взаимодействуя с частицами. Нелинейное рассеяние колебаний на электронах может почти полностью подавить неустойчивость, так как рассеяние на электронах происходит с изменением k на величину порядка

единицы, а уровень шумов в области малых k велик. Частота нелинейного рассеяния при этом определяется плотностью энергии шумов W_{II} в области $\omega/k > c$, и при

$$W_{II}/nT > (\delta/\omega_{pe}) (kr_{De})^{-3} \quad (5.70)$$

неустойчивость стабилизируется. После достижения уровня W_{II} , определяемого формулой (5.70), неустойчивость может быть связана с тем, что колебания с W_{II} затухают из-за кулоновских столкновений. Если считать, что температура плотной плазменной мишени

$$T_i = T_e > mc^2 m/M, \quad (5.71)$$

то выполнено условие (5.69), и длинноволновые колебания ($\omega_{pe}/k > > 2c$) могут влиять на неустойчивость только через рассеяние на электронах. Рассеяние на ионах лишь эстафетно перекачивает колебания в область $\omega/k > c$, уменьшая энергию шумов в неустойчивой области.

Запишем баланс энергии, связывающий скорость рождения колебаний из-за неустойчивости и скорость их затухания в области $\omega/k > c$:

$$2\delta W_I = \nu_{ei} W_{II}. \quad (5.72)$$

Здесь W_I — плотность энергии колебаний в области неустойчивости. Подставляя значение W_{II} из формулы (5.70) в уравнение (5.72), получаем оценку для плотности энергии колебаний в области неустойчивости в нелинейном режиме:

$$W_I \sim nT_e (\nu_{ei}/\omega_{pe}) (c/v_{Te})^3. \quad (5.73)$$

Если исследовать эту оценку для квазилинейной релаксации, то из уравнений (5.57) и (5.63) для D_{PP} следует, что

$$l \sim P_0^2 c/D_{PP} \approx \delta^2 (v_{Te}/\nu_{ei}) (\Delta\theta_0)^2. \quad (5.74)$$

При этом длина торможения и передачи энергии в фокусирующей плазме достаточно велика, а в мишени мала.

Формулы (5.70)—(5.74) имеют смысл оценок, так как решение интегрально-дифференциальных уравнений, описывающих нелинейную перекачку, получить довольно трудно. Более того, в работе [172] показано, что уравнение, учитывающее лишь рассеяние на ионах, $(\delta + \delta_{нел}^i)W_k = 0$ является интегральным уравнением первого рода и, вообще говоря, не имеет регулярных решений. Таким образом, спектр колебаний должен быть пульсирующим. При этом изотропизация колебаний приводит к тому, что энергия их в среднем понижается, распределяясь на больший интервал углов θ' , в результате чего отдача пучком энергии происходит на больших расстояниях. Формально этот результат сводится к тому, что в формуле для длины релаксации (5.64) угол $\Delta\theta_0$ следует заменить единицей. Длина релаксации при этом увеличивается примерно на

два порядка, так как $\Delta\theta_0 \approx 0,1$. При этом по-прежнему происходит накопление ленгмюровских колебаний в области больших фазовых скоростей.

В следующих параграфах разобран механизм модуляционной неустойчивости, приводящий к образованию в плазме локальных возмущений плотности (каверн), в которых «заперты» ленгмюровские колебания. Каверны за конечное время коллапсируют, а энергия передается электронам и ионам. Возбуждение н. ч.-колебаний при модуляционной неустойчивости может сильно исказить картину релаксации пучка, поскольку звуковая волна модулирует концентрацию плазмы и вызывает перекачку ленгмюровских колебаний по спектру.

В заключение отметим, что задачу о передаче энергии мощного релятивистского пучка плазме в настоящее время, по-видимому, нельзя еще считать полностью решенной. Необходимо провести большое количество экспериментов для выяснения характера интересующих исследователей процессов.

§ 5.3. Сжатие вещества излучением лазера

В последнее время появились предложения по всестороннему сжатию дейтериевой капли мощным импульсом лазерного излучения до плотности, превышающей плотность твердого дейтерия при нормальном давлении ($n_0 = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$) в 10^4 раз. Такое сжатие получается в результате программированного подвода мощности лазера к капле. Система, использующая дейтерий и тритий, в принципе может оказаться эффективно действующим термоядерным реактором. Полная энергия в импульсе составляет приблизительно 10^5 — 10^6 Дж за время порядка нескольких десятков наносекунд, причем $4/5$ энергии должно быть вложено в систему за время порядка 1 нс.

Основная идея этого метода состоит в том, что нагретая внешняя часть капли разлетается, оказывая давление на внутреннюю часть. Сжатие больше в том случае, если в системе не образуются ударные волны, прогревающие середину и сжимающие вещество не более чем в $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ раз [$\gamma = (a + 2)/a$ — показатель адиабаты, где a — число степеней свободы] — для одноатомного газа сжатие равно 4. Тепловая волна будет распространяться со скоростью движения границы плотного и разлетающегося вещества, не обгоняя ее.

Необходимо рассмотреть следующие основные проблемы: 1) оптимальную зависимость подводимой мощности N от времени t ; 2) эффективность поглощения мощности в мишени; 3) роль неустойчивостей на всех стадиях сжатия.

Рассмотрим условия инициирования термоядерной реакции. Оптимум для термоядерной реакции получается при $T_i \approx 10$ кэВ и выполнении критерия Лоусона

$$n\tau = 10^{14} \quad \text{или} \quad nr_{\text{кр}} = 10^{14} c_s, \quad (5.75)$$

где n — плотность плазмы; $\tau = r_{\text{кр}}/c_s$ — время удержания, c_s — определяемое скоростью разлета капли c_s и ее радиусом $r_{\text{кр}}$. Количество энергии, которое должно быть передано капле, $\mathcal{E}_{\text{кр}} = n(4\pi/3)r_{\text{кр}}^3 T_i$. Подставив значение $nr_{\text{кр}}$ из критерия Лоусона, получим $\mathcal{E}_{\text{кр}} = (4\pi/3)c_s 10^{14} r_{\text{кр}}^2 T_i = (4\pi/3)[c_s^3 (10^{14})^3/n^2] T_i$ или $\mathcal{E}_{\text{кр}} = (10^{42}/n^2) T_i^{5/2}$ Дж. При нормальной плотности твердого дейтерия $\mathcal{E}_{\text{кр}} \sim 10^7$ Дж, $r_{\text{кр}} = 0,3$ см.

Если нагревать каплю, не задавая специальную форму импульса, то энергия, необходимая для инициирования термоядерной реакции, возрастет примерно еще на порядок из-за того, что испарившаяся часть капли унесет энергию и $\mathcal{E}_{\text{кр}}$ станет порядка 10^8 Дж.

Если же использовать программированную форму импульса, то примерно $2/3$ массы капли испарится, унеся энергию порядка $(4\pi/3)n_0 r^3 T_i$, где $\gamma = 0,5$ мм; $T_i \approx 10$ кэВ; $n_0 = 5 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$. Начальный радиус выбран меньшим из-за того, что предполагается увеличение плотности за счет обжатия внутренней части в 10^4 раз, а критический радиус $r_{\text{кр}}$ обратно пропорционален плотности, т. е. $r_{\text{кр}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ см, в то время как объем капли обратно пропорционален $(n/n_0)^{1/3}$.

Поэтому основной задачей нужно считать определение формы импульса лазера: необходимо добиться того, чтобы сердцевина капли оставалась холодной. Вообще говоря, этому могут помешать два процесса: образование ударной волны и теплопроводность.

Рассмотрим их более подробно.

Образование ударной волны. Энергия излучения лазера, поглощенная поверхностью капли, приводит к образованию плазмы с плотностью порядка $n_0 = 5 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$, поэтому луч лазера может проникать в плазму лишь на расстояния порядка толщины аномального скин-слоя c/ω_{pe} , т. е. доходить до точки, где $n_{\text{кр}}$ (см $^{-3}$) = $10^{21}/\lambda^2$ (мкм). (Для лазера на неодимовом стекле $\lambda = 1$ мкм, для лазера на CO_2 $\lambda = 10$ мкм.) Не вдаваясь в детали, будем считать, что значительная доля энергии поглощается в этой области и температура плазмы при $n \geq n_{\text{кр}}$ составляет 10 кэВ. Разлетаясь, плазма сдавливает оставшуюся часть капли, что в принципе может привести к образованию ударных волн.

Действительно, макроскопическое поведение плазмы можно описать при помощи обычных уравнений газодинамики:

$$\left. \begin{aligned} Mndv/dt &= -\partial p/\partial x; \\ \partial n/\partial t + (\partial/\partial x)(nv) &= 0; \\ p &= p_0(n/n_0)^\gamma; \quad p = nT, \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

где M — масса иона; v — скорость; p — давление; x — координата, отсчитываемая внутрь капли. Движение можно считать изоэнтропическим до тех пор, пока не произошло образование ударной

волны. Найдем момент t и координату x , при которых произойдет образование ударной волны.

Исключим p из уравнений движения и непрерывности:

$$\left. \begin{aligned} Mdv/dt &= -\gamma (n/n_0)^{\gamma-1} T_0 (1/n_0) \partial n / \partial x; \\ \partial n / \partial t + n \partial v / \partial x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

Будем считать, следуя Риману, что $n = n(v)$, а v зависит, в свою очередь, от x и t . Тогда уравнения (5.77) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{T_0 \gamma}{M} \left[\frac{n(v)}{n_0} \right]^{\gamma-1} \frac{d \ln (n/n_0)}{dv} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{d \ln (n/n_0) / dv} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

Видно, что уравнения полностью совпадают, когда

$$\frac{d \ln (n/n_0)}{dv} = \pm \frac{1}{c_0} \frac{1}{(n/n_0)^{\frac{\gamma-1}{2}}}; \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma T_0}{M}}; \quad (5.79)$$

c_0 — скорость звука при начальной температуре. Это уравнение легко интегрируется, если учесть, что $\ln (n/n_0)^{\frac{\gamma-1}{2}} = [(\gamma - 1)/2] \ln (n/n_0)$. Итак, $v = [2/(\gamma - 1)]c + \text{const}$, где $c = c_0 (n/n_0)^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука.

В формуле (5.79) взят знак плюс, так как нас интересует волна сжатия.

Чтобы найти, как распространяется возмущение концентрации n или, что то же, скорости $[n = n(v)]$, можно воспользоваться любым из уравнений (5.78):

$$dv/dt = \partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = c(v) \partial v / \partial x, \quad (5.80)$$

где

$$\partial v / \partial t + (v + c) \partial v / \partial x = 0. \quad (5.81)$$

Уравнение (5.81) можно решить следующим образом. Рассмотрим пространство x, t . Тогда уравнение $1 \partial v / \partial t + B \partial v / \partial x = 0$ можно интерпретировать как равенство нулю скалярного произведения векторов \mathbf{R} и \mathbf{z} , где $\mathbf{R} = \{1, B\}$, а $\mathbf{z} = \{\partial v / \partial t, \partial v / \partial x\}$. Но вектор \mathbf{z} представляет собой нормаль к поверхности $v(x, t)$, следовательно, перпендикулярный ему вектор \mathbf{R} параллелен касательному вектору $\{dt, dx\}$, т. е.

$$dt/1 = dx/B, \quad B = (v + c). \quad (5.82)$$

Отсюда $x - [v + c(v)]t = c$, а v — произвольная функция c , так

как остается постоянной вдоль найденной линии в пространстве x, t :

$$v = \varphi [x - (v + c) t] \quad (5.83)$$

или

$$x = (v + c) t + x_0(v). \quad (5.84)$$

Здесь $x_0(v)$ — функция, обратная φ , определяется начальным распределением возмущенных скоростей среды по x . Уравнения (5.83) и (5.84) представляют собой решения уравнений гидродинамики и описывают так называемую волну Римана. Нетрудно показать с помощью уравнений (5.83) и (5.84), что такая волна должна укручаться со временем и опрокидываться.

Действительно, если есть возмущение скорости, а следовательно, и плотности такого вида, как показано на рис. 67, в начальный момент, то согласно уравнению (5.84) в тех местах, где скорость больше, выше давление, а следовательно, и скорость звука. Скорость переноса возмущения описывается уравнением (5.84), из которого следует, что участки с большим давлением движутся с большей скоростью, в то время как точка x_0 остается на месте. Найдем момент, в который произойдет опрокидывание волны, т. е. образование ударной волны. Это произойдет, когда скорость перестанет быть однозначной функцией x_0 , что с необходимостью приведет к сильному рассеянию энергии. Математически условие опрокидывания имеет вид $(\partial x / \partial v)|_{x=x_{\text{опр}}} = 0$. Отсюда, используя уравнение (5.84), получим

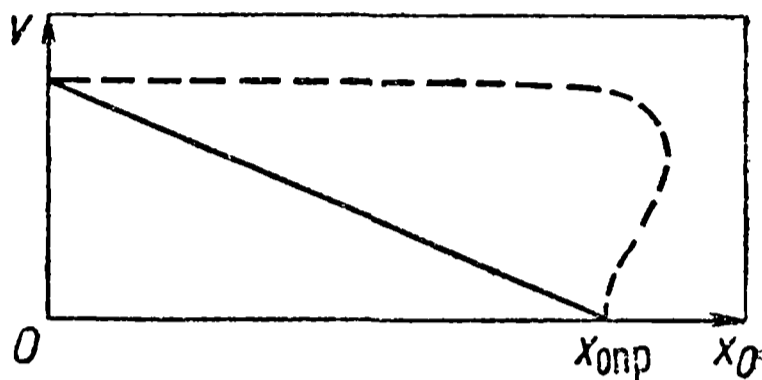


Рис. 67

$$0 = t_0 + \partial c / \partial v|_{v=0} t + \partial x_0 / \partial v|_{v=0}.$$

Выберем в уравнении (5.83) константу таким образом, чтобы при $n = n_0$ скорость среды $v = 0$, т. е. $c = c_0 + v(\gamma - 1)/2$. Следовательно, момент опрокидывания определится соотношением

$$t_0 = - [2/(\gamma + 1)] \partial x_0 / \partial v|_{v=0}.$$

Вообще говоря, при произвольной зависимости $v(x)$ опрокидывание может произойти и раньше. В этом случае момент и место опрокидывания определяются из условия образования точки перегиба на кривой $v(x)$: $\partial x / \partial v = 0$; $\partial^2 x / \partial v^2 = 0$. Это сводится к уравнениям $t_{\text{опр}} = - [2(\gamma + 1)] \partial x_0(v) / \partial v$; $\partial^2 x(v) / \partial v^2 = 0$, из которых видно, что ударная волна образуется или на границе с неподвижным газом, или в точке перегиба функции $x_0(v)$.

Соотношение (5.84) обычно называют характеристикой, так как вдоль нее v постоянна, что следует хотя бы из уравнения

(5.81). Следовательно, в плоскости x, t характеристики представляют собой прямые линии, а точка пересечения каких-либо двух характеристик соответствует точке опрокидывания.

На рис. 68 представлены характеристики, по которым распространяется возмущение от поршня, движущегося с ускорением. Точ-

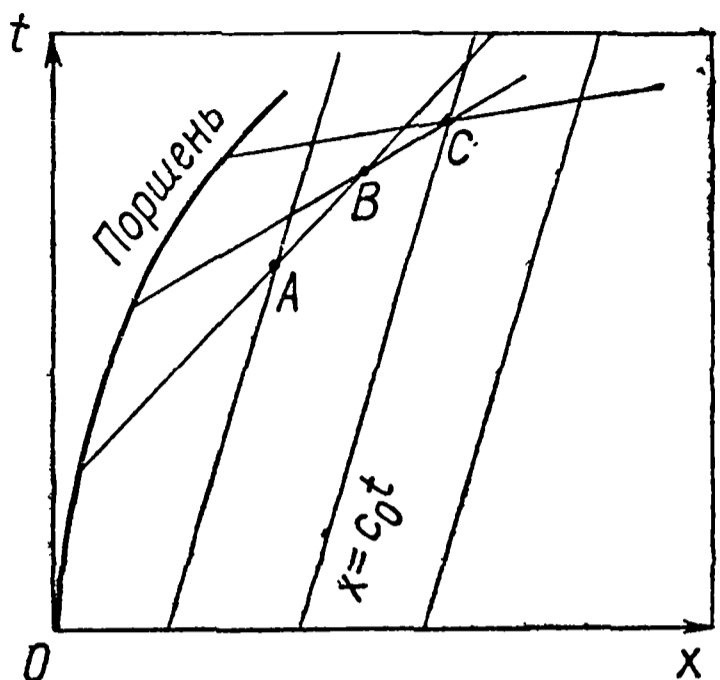


Рис. 68

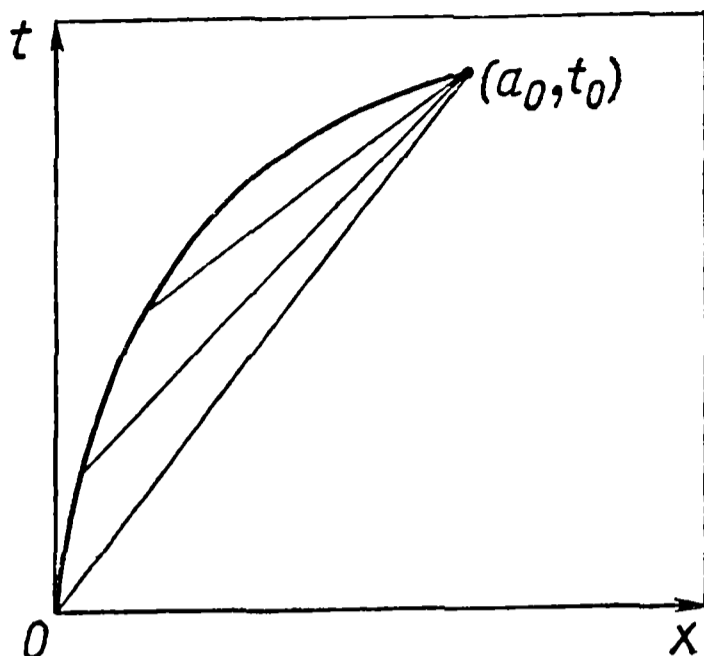


Рис. 69

ки A, B, C представляют собой точки пересечения характеристик и определяют место и время образования ударных волн. Так как в каждый момент от поршня распространяется возмущение со скоростью $v_{\text{п}} + c$, то совокупность точек пересечения образует сплошную кривую, огибающую семейство характеристик. При произвольно заданном законе ускорения поршня образование ударных волн может происходить в разных точках системы. Двигаясь к центру капли, такие волны будут прогревать вещество, поэтому заметного сжатия получить не удастся. Если все характеристики пересекутся в одной точке (в центре капли), опрокидывание произойдет только в последний момент. До этого момента вещество будет сжиматься изэнтропически; следовательно, в этом случае можно достичь максимального сжатия.

Найдем закон движения поршня, соответствующий такой «центрированной» волне. Рассмотрим сначала для простоты случай плоской геометрии. Потребуем, чтобы все характеристики в момент t_0 пересеклись в точке a_0 . Из уравнения (5.84) имеем (рис. 69): $(x - a_0)/(t - t_0) = v_{\text{п}} + c$. Подставляя $c = c_0 + v_{\text{п}}(\gamma - 1)/2$, получаем

$$(x - a_0)/(t - t_0) = c_0 + v_{\text{п}}(\gamma + 1)/2. \quad (5.85)$$

Но $v_{\text{п}}$ представляет собой скорость движения среды, заданную поршнем, т. е. $v_{\text{п}} = dx_{\text{п}}/dt$. Когда поршень движется со скоростью, большей скорости звука в невозмущенной среде, можно пренебречь в уравнении (5.84) величиной c_0 :

$$d(a_0 - x)/d(t_0 - t) = [2/(\gamma + 1)](a_0 - x_{\text{п}})/(t_0 - t).$$

Отсюда сразу получаем закон движения поршня:

$$a_0 - x_{\Pi} = (t_0 - t)^{\frac{2}{\gamma+1}}. \quad (5.86)$$

При $\gamma = 5/3$ для создания плоской центрированной волны поршень должен двигаться по закону $\Delta x \sim \Delta t^{3/4}$. В случае сферически-симметричной задачи необходимо добиться образования сферически сходящейся центрированной волны. Такая задача аналитически точно не решается, однако показатель степени в законе движения поршня можно получить из следующих простых соображений. Видно, что единственной переменной, от которой могут зависеть скорость, координата и давление, является $\xi = r/t$. Проверим это непосредственной подстановкой в уравнения движения и непрерывности для сферического случая

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial r = - (c^2/n) \partial n / \partial r, \quad c = c_0 (n/n_0)^{\frac{\gamma-1}{2}}; \quad (5.87)$$

$$\partial n / \partial t + (1/r^2) (\partial / \partial r) (r^2 n) = 0. \quad (5.88)$$

Сделав замену $r/(-t + t_0) = \xi$; $\partial / \partial t = -[r/(-t + t_0)^2] \partial / \partial \xi$; $\partial / \partial r = [1/(-t + t_0)] \partial / \partial \xi$, получим вместо уравнений (5.87) и (5.88)

$$(v - \xi) v' = -c^2 n'/n; \quad (v - \xi) n'/n = -v' - (2/\xi) v. \quad (5.89)$$

Для оценок достаточно заменить $v - \xi$ величиной v' , тогда, решая уравнения (5.89) относительно v' и n'/n , найдем, что нетривиальное решение существует, если $(v - \xi)^2 = 3c^2$, т. е.

$$\xi = -r/(-t + t_0) = v + \sqrt{3}c. \quad (5.90)$$

Волна достигает центра капли ($r = 0$) при $t = t_0$.

В формуле (5.90) выбран знак плюс, так как рассматриваем волны сжатия. Подставим $v - \xi = -\sqrt{3}c$ в первое уравнение (5.89), имея в виду, что $cn'/n = c'2/(\gamma - 1)$, $v' = (1/\sqrt{3})[2/(\gamma - 1)]c'$ или

$$v = (1/\sqrt{3})[2/(\gamma - 1)]c. \quad (5.91)$$

Напомним, что величиной $c_0 \ll c$ мы пренебрегаем.

Подставляя значение v из (5.91) в (5.90) и учитывая, что $v_{\Pi} = dr_{\Pi}/dt$, получаем, что скорость поршня

$$v_{\Pi} = \frac{dr_{\Pi}}{d(t_0 - t)} = \frac{r_{\Pi}}{(t_0 - t)} \frac{2}{(3\gamma - 1)}. \quad (5.92)$$

Из формулы (5.92) следует закон движения поршня для создания сферически-симметричной центрированной волны сжатия:

$$r_{\Pi} \sim (t_0 - t)^{\frac{2}{3\gamma-1}} = (t_0 - t)^{1/2}. \quad (5.93)$$

Поршень должен двигаться при $t \rightarrow t_0$ быстрее, чем в случае плоской геометрии, так как сжатие, а следовательно, и увеличение скорости звука больше из-за эффекта кумуляции [см. (5.86)].

Найдем теперь закон нарастания светового потока во времени. Для этого вычислим подводимую к поршню мощность, равную работе, которая произведена световым потоком над каплей в единицу времени. Сила $F \sim 4\pi r_{\text{п}}^2 p_{\text{п}}$, где $p_{\text{п}}$ — давление. Путь, пройденный за 1с, равен скорости движения поршня $v_{\text{п}}$. Таким образом, подводимая к поршню мощность $N \sim p_{\text{п}} r_{\text{п}}^2 v_{\text{п}}$, но $p_{\text{п}} =$

$$= Mc^2 n \sim c^{2 + \frac{2}{\gamma - 1}},$$

а скорость звука c , в свою очередь, пропорциональна $v = \frac{dr_{\text{п}}}{d(t_0 - t)} \sim (t_0 - t)^{\frac{2}{3\gamma - 1} - 1}$. Итак,

$$N \sim p_{\text{п}} r_{\text{п}}^2 v_{\text{п}} \sim (t_0 - t)^{\frac{-3\gamma + 3}{3\gamma - 1} + \frac{3 - 3\gamma}{3\gamma - 1} \left(2 + \frac{2}{\gamma - 1}\right) + \frac{4}{3\gamma - 1}} = (t_0 - t)^{\frac{7 - 9\gamma}{3\gamma - 1}}. \quad (5.94)$$

Таким образом, выбирая при $\gamma = 5/3$ форму импульса в виде

$$N = N_i / (1 - t/t_0)^2, \quad (5.95)$$

можно получить максимальное сжатие. Более точное решение уравнения приводит к тому, что вместо показателя степени 2 в формуле (5.95) стоит показатель 15/8 [177]. Нетрудно видеть, что формула справедлива лишь для $t < t_0$. Характерное значение t_0 , определяющее темп роста, оценивается как время схождения характеристик в центре холодной капли. При температуре холодной центральной части капли 10 эВ и ее радиусе в сжатом состоянии порядка 10^{-2} см t_0 составляет порядка 10 нс.

Теплопроводность. Другим процессом, который может существенно уменьшить сжатие, является перенос тепла внутрь капли в результате теплопроводности. Коэффициент температуропроводности полностью ионизованной плазмы довольно просто получить из оценок, основанных на газокинетической теории: $\chi \sim \lambda^2/\tau$, где λ — длина свободного пробега, а $\tau = 1/\nu$ — время между столкновениями. Так как $\lambda = v_T/\nu$, где v_T — тепловая скорость частицы, то $\chi = v_T^2/\nu$. В полностью ионизованной плазме есть заряды двух сортов: электроны и ионы. Частота электрон-электронных столкновений ν_{ee} порядка частоты электрон-ионных столкновений ν_{ei} и в $\sqrt{M/m}$ раз превышает частоту ион-ионных столкновений. Если считать, что температура электронов не меньше температуры ионов, и учесть, что при столкновении электронов с ионами последним передается лишь малая доля энергии электронов (примерно m/M), то нетрудно понять, что в данном случае наиболее опасна электронная теплопроводность, которая в определенных условиях может сильно прогреть центральную часть капли.

Рассмотрим на примере плоской задачи этот процесс подробнее. Для этого получим сначала уравнение нелинейной теплопроводнос-

ти. Вырежем мысленно двумя плоскостями площадью s (рис. 70) слой плазмы, температура которой зависит от x , и определим количество тепла, поступающего в эту область. Пусть слева поступает тепловой поток $J_1 = -\chi n \partial T / \partial x |_{x=x_1}$, а справа выходит тепловой поток $J_2 = -\chi n \partial T / \partial x |_{x=x_2}$. Тогда изменение количества тепла Q в системе определяется разностью этих двух потоков:

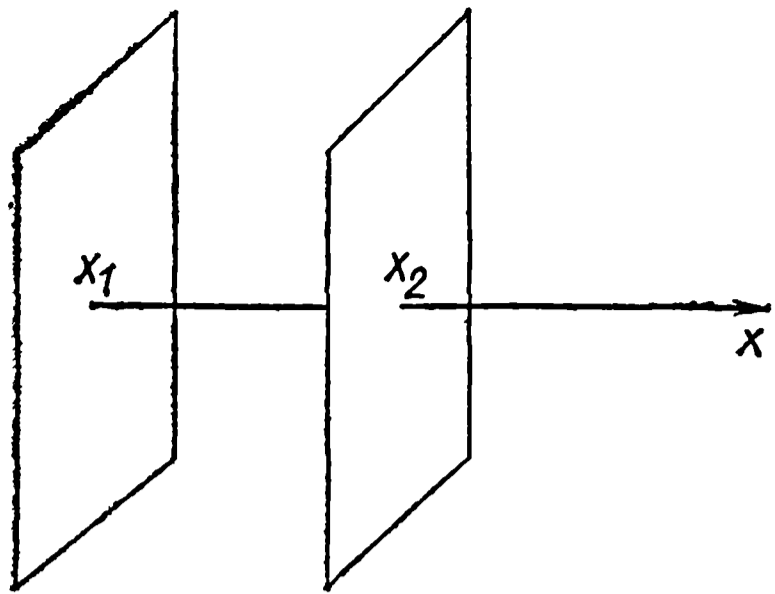


Рис. 70

$$\begin{aligned} \partial Q / \partial t &= sn (\partial T / \partial t) (x_2 - x_1) = s (J_1 - J_2) = \\ &= s [\chi n \partial T / \partial x |_{x=x_2} - \chi n \partial T / \partial x |_{x=x_1}]. \end{aligned}$$

Считая расстояние $x_2 - x_1$ достаточно малым, получаем:

$$\partial T / \partial t = (\partial / \partial x) (\chi \partial T / \partial x). \quad (5.96)$$

Следует обратить внимание на то, что коэффициент температуропроводности χ есть функция температуры и концентрации $\chi = 10^{20} T_e^{5/2} / n$.

Так как нас интересуют большие перепады температур (центральная часть имеет температуру 10 эВ, в то время как температура оболочки 10 кэВ), следует учитывать зависимость коэффициента температуропроводности от плотности и температуры. Если коэффициент температуропроводности — постоянная величина, решение уравнения (5.96) хорошо известно.

Нетрудно видеть, что размер области l , в которой температура заметно отлична от нуля, увеличивается по закону $l \sim \sqrt{\chi t}$. При этом если температура отлична от нуля в начальный момент в некотором слое длиной l , то в следующий момент она отлична от нуля во всем пространстве, хотя и экспоненциально мала [$T \sim \sim \exp(-x^2/l^2)$]. Никаких волн при этом не образуется, и в принципе при постоянной температуропроводности центр капли прогреет. Если температура меняется достаточно сильно, а концентрация постоянна, возможно образование тепловых волн [25]. Это связано с тем, что температуропроводность велика в области больших T и мала при малых T . Будем искать решение уравнения (5.96) в виде волны $T = T(x - ut)$, $x - ut = \xi$, тогда

$$-u \frac{\partial T / T_0}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \chi_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \frac{\partial T / T_0}{\partial \xi},$$

где T_0 — максимальная температура в прогретой области, а χ_0 — коэффициент температуропроводности при $T = T_0$.

Интегрируя уравнение один раз, имеем

$$-uT/T_0 = \chi_0 (T/T_0)^{5/2} (\partial/\partial\xi) (T/T_0) + c_1.$$

Постоянную c_1 определяем из условия, что при $\xi = \xi_0$ $T/T_0 = 0$ и $(T/T_0)^{5/2} (\partial/\partial\xi) (T/T_0) = 0$. Последнее можно проверить, предварительно решив уравнение с $c_1 = 0$. Проинтегрировав еще раз, получаем

$$T/T_0 \sim (\xi_0 - \xi)^{2/5}. \quad (5.97)$$

Действительно,

$$\chi_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \frac{\partial T/T_0}{\partial \xi} \sim \frac{\chi_0 (\xi_0 - \xi)}{(\xi_0 - \xi)^{3/5}} \sim \chi_0 (\xi_0 - \xi)^{2/5}$$

при $\xi = \xi_0$ равно нулю (рис. 71).

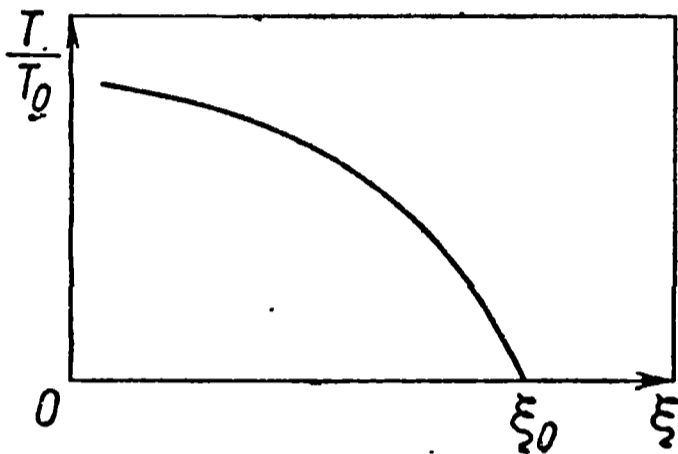


Рис. 71

Такая волна движется со скоростью, определяемой подводимой мощностью, и очень быстро проходит область плазмы малой плотности $n[\text{см}^{-3}] \leq 10^{21}/\lambda^2(\text{мкм})$. Время ее распространения можно получить из выражения для коэффициента температуропроводности при $T = T_0$.

Проведем теперь некоторые интересные оценки. Всю каплю можно разделить на две области — внешнюю область с размером $c/\omega_{pe} \approx 1$ мкм, в которую проникает лазерное излучение и которая затем, расширяясь, образует довольно широкий слой разреженной плазмы размером порядка 1 см, и внутреннюю область, начальный размер которой составляет $5 \cdot 10^{-2}$ см и начальная плотность которой равна $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. В первой области пойдет тепловая волна, которая за характерное время $t_{T \text{ внешн}} \approx \frac{1 \cdot 10^{21}}{10^{20} (10^4)^{5/2}} = 10^{-9}$ с установит температуру порядка 10 кэВ во всей внешней области. Во внутреннюю область с плотностью n тепло будет проникать за характерное время $t_{T \text{ внутр}} \approx t_{T \text{ внешн}} (r_0/1 \text{ см})^2 n/n_{\text{кр}}$. Как показано выше, $n/n_0 \sim v^{\frac{2}{\gamma-1}} \sim 1/(1 - t/t_0)^{3/2}$; следовательно, за время порядка времени прогрева внешней области (несколько наносекунд) плотность заметно возрастает. Поэтому при достаточно малом значении t_0 может реализоваться ситуация, когда тепловая волна будет двигаться вместе с поршнем, создающим сжатие, не обгоняя его.

Действительно, координата поршня $r_{\text{п}} \sim c_0 t_0 (1 - t/t_0)^{1,2}$ [см. (5.93)]. Константа c_0 есть скорость звука в холодном веществе температура которого составляет несколько десятков электронвольт. Координата, до которой проникает тепло, $r_T \sim \sqrt{\chi t_0 (1 - t/t_0)}$. Что-

бы тепло «не обгоняло» поршень, должно выполняться неравенство ($[T] = [\text{эВ}]$)

$$1 \ll r_{II}/r_T = (c_0 \sqrt{t_0}/T^{5/4}) (n/n_0)^{1/2} \cdot 2,4 \cdot 10 = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 2,4 \cdot 10 \sqrt{T_0}}{T^{5/4}} \times \\ \times \frac{1}{(1-t/t_0)^{3/4}} \approx \frac{10^3 \sqrt{t_0}}{(T/10 \text{ кэВ})^{5/4}} \frac{1}{(1-t/t_0)^{3/4}}.$$

Отсюда видно, что если температура на поршне порядка 10 кэВ, то с учетом того, что время выравнивания температуры в прогретой области составляет несколько наносекунд при $t_0 \ll 10^{-8}$ с, тепло распространяется медленнее поршня.

Оценим реактивное давление, создаваемое потоком испарившегося вещества. Для этого можно воспользоваться квазистационарным приближением, т. е. считать, что постоянные значения всех величин устанавливаются в прогретой и холодной областях быстрее, чем движется к центру их граница. Тогда во внешней прогретой области (параметры плазмы в этой области обозначены буквами с тильдой):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= (\tilde{T}/m) \tilde{n}; & G &= \tilde{n} \tilde{v} r^2; & \tilde{v} \nabla \tilde{v} &= -\nabla \tilde{n} / \tilde{n}; \\ G(c_p \tilde{T} + \tilde{v}^2/2) - r^2 \chi \nabla \tilde{T} &= c_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

Здесь p — давление; n — плотность плазмы; G — поток разлетающегося вещества; $c_p \tilde{T}$ — энтальпия; c_1 — некоторая константа. Первые три уравнения — уравнение состояния идеального газа, закон сохранения потока вещества в сферической геометрии и уравнение Эйлера для стационарного течения. Последнее уравнение описывает поток энергии с учетом теплопроводности. Состояние газа во внутренней непрогретой области описывается уравнением вырожденного электронного газа

$$p = Bn^{5/3}; \quad T = Bn^{2/3}. \quad (5.99)$$

Значения \tilde{n} и n , \tilde{T} и T , \tilde{p} и p должны стать равными на границе нагретого и холодного веществ. Скорость испарения холодного вещества задается уравнением

$$(d/dt) 4\pi nR^3 = -G, \quad (5.100)$$

где R — радиус границы.

Условие поглощения мощности вблизи $\tilde{n} = n_{кр} (\text{см}^{-3}) = 10^{21}/\lambda$ (мкм) задается формулой

$$G(c_p \tilde{T}_{кр} + \tilde{v}_{кр}^2/2) = N. \quad (5.101)$$

Условие реализации режима тепловой волны, движущейся в холодном газе, выражается равенством $c_1 = 0$. Начальное давле-

ние $\tilde{p}_i = Vc_0^2 = 10^6$ атм ($c_0 = 2,3 \cdot 10^6$ см/с). Подставляя найденную ранее зависимость мощности N от времени, можно оценить из этих уравнений параметры при конечной плотности $n = 10^3$ г см³, $p = 10^{12}$ атм, $M \approx 0,5 M_0$, где M — испаренная масса; M_0 — начальная масса капли.

§ 5.4. Эффективность поглощения мощности в мишени

Для получения максимального эффекта сжатия мощность лазерного импульса должна эффективно поглощаться плазмой. Обсудим два возможных механизма такого поглощения.

Механизм обратного тормозного поглощения. Этот механизм представляет собой поглощение электромагнитной волны в результате кулоновских столкновений и может быть легко рассчитан следующим образом. Пусть в системе распространяется электромагнитная волна с частотой Ω : электронная плазменная частота есть ω_{pe} , а частота кулоновских столкновений ν_e . Тогда из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t - (4\pi/c) (en_0 \mathbf{v}_e);$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - (1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t$$

имеем для световых волн ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$)

$$k^2 \mathbf{E} = (\Omega^2/c^2) \mathbf{E} + (4\pi en_0/c^2) (-i \Omega \mathbf{v}_e). \quad (5.102)$$

Скорость \mathbf{v}_e электронов можно определить из уравнения движения $\mathbf{v}_e = -ie\mathbf{E}/m(\Omega + i\nu)$. Подставив скорость в уравнение (5.102), получим

$$k^2 = \Omega^2/c^2 - (\omega_{pe}^2/c^2) \Omega (\Omega + i\nu). \quad (5.103)$$

Из этой формулы следует хорошо известный результат, заключающийся в том, что волны с частотой $\Omega < \omega_{pe}$ отражаются от бесстолкновительной плазмы. Действительно, при $\nu = 0$ и $\Omega < \omega_{pe}$ $k^2 < 0$, и электрическое поле, пропорциональное $\exp(ikx)$, проникает в плазму только на глубину аномального скин-слоя c/ω_{pe} . Когда $\Omega > \omega_{pe}$, частота кулоновских столкновений достаточно велика, но $\nu_e \ll \Omega$, $k = k_0 + ik_r$, где $k_0 = \Omega/c$, а $k_r = (1/2) (\nu_e/c) \omega_{pe}^2 \Omega^2$.

Отсюда следует, что из-за поглощения амплитуда волны затухает до точки, где $n = n_{кр}$ по закону $\exp(-k_r x)$. Как и в случае тормозного излучения, $k_r \sim n^2 T^{-3/2}$.

Такой механизм поглощения может оказаться мало эффективным из-за высокой температуры в нагретой области и не обеспечить заметного поглощения волны до точки, где $\Omega = \omega_{pe}$, $n = n_{кр}$.

Распадная неустойчивость. Более эффективным оказывается другой механизм поглощения, связанный с возбуждением парамет-

рических неустойчивостей в области $\Omega \approx \omega_{pe}$. Суть его можно пояснить на следующей простой модели.

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в плазме, концентрация которой меняется вдоль распространения волны [$n = n(x)$]. Исследуем явления, происходящие вблизи той точки x , где $\Omega \approx \omega_{pe}$, точнее $(\Omega - \omega_{pe})/\omega_{pe} \ll 1$.

Электрическое поле в такой волне направлено вдоль направления распространения волны (для простоты волна считается линейно поляризованной). Так как амплитуда волны заметно меняется вдоль x лишь на расстояниях $c/\omega_{pe} \gg r_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$, можно считать, что в окрестности точки $n = n_{кр}$ на систему действует постоянное по амплитуде электрическое поле, меняющееся с частотой, близкой к плазменной. В этом случае можно ожидать резонансного возбуждения ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний, являющихся собственными колебаниями данной системы (см. гл. 3). Пусть напряженность электрического поля $E = E_0 \exp(-i\Omega t)$. Считая, как обычно, $\omega_s = k\sqrt{T/M}$ и $\omega_L = \omega_{pe}$, найдем, что

$$k = \frac{\Omega - \omega_{pe}}{\sqrt{T/M}} = \frac{\Delta}{\sqrt{T/M}}, \quad (5.104)$$

где Δ — расстройка. Инкремент такой неустойчивости и ее пороги можно определить из уравнения

$$\begin{aligned} &(\omega^2 + 2i\omega\delta_1 - \omega_s^2)[(\omega + i\delta_2)^2 - \Delta^2] + \\ &+ (k^2 e^2 E_0^2/4mM) \Delta/\omega_{pe} = 0. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Здесь δ_1 и δ_2 — линейные декременты затухания соответственно ионно-звуковой и ленгмюровской волн, которые и определяют пороговое значение напряженности E_0 . При лазерном нагреве E_0 значительно превышает пороговое значение. Инкремент для распаднoй неустойчивости, когда $\Delta = \omega_s$, а δ_1 и δ_2 малы, можно определить из уравнения (5.105)

$$(\omega^2 - \omega_s^2)^2 = - [k^2 e^2 E_0^2/(4mM)] \omega_s/\omega_{pe}.$$

При $\Delta \ll \omega_s$

$$\omega = \omega_s + i(1/4) \sqrt{E_0^2/(4\pi n_0 T)} \sqrt{\omega_s \omega_{pe}}. \quad (5.106)$$

При достаточно больших значениях $E_0^2/(4\pi n_0 T)$ инкремент может достигать значения, равного ω_{pi} — плазменной ионной частоте.

Последовательной аналитической теории, описывающей нелинейное развитие такой неустойчивости, нет, поэтому для выяснения влияния неустойчивости на поглощение пользуются методами численного моделирования [175, 176]. Положение облегчается тем, что неустойчивость практически одномерна, поэтому можно использовать одномерные модели, когда плазма представляется в виде набора плоских слоев (электроны и ионы) на отрезке длины L с пе-

риодическими граничными условиями. В момент $t = 0$ включается электрическое поле, направленное вдоль этого отрезка и осциллирующее с частотой Ω , близкой к ω_{pe} .

При распадной неустойчивости возникают ленгмюровские и ионно-звуковые в. ч.-колебания, причем фазовая скорость ленгмюровских колебаний должна быть

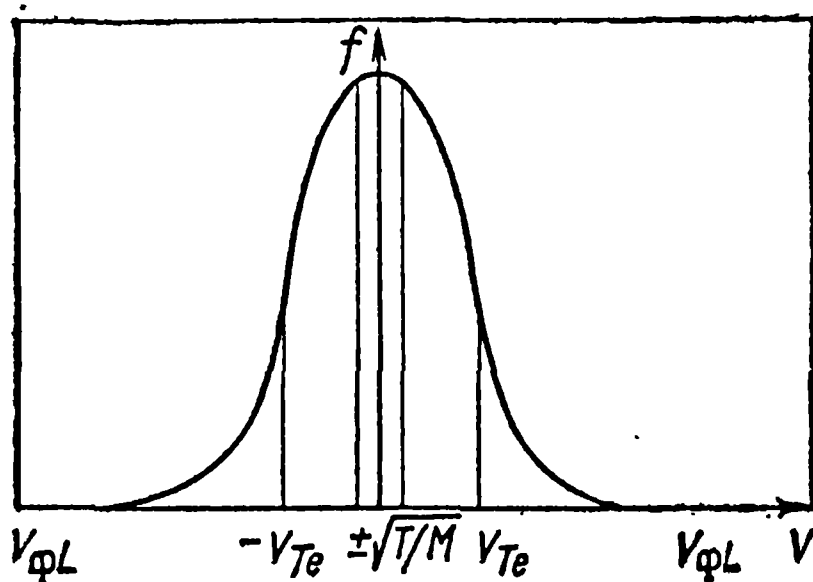


Рис. 72

много больше тепловой скорости электронов, так как в противном случае они не возбуждались бы из-за затухания Ландау (рис. 72).

Ленгмюровские колебания при этом не затухают, так как нет электронов,двигающихся с большими фазовыми скоростями, а ионно-звуковые не затухают из-за того, что при малых фазовых скоростях мала производная $\partial f/\partial v$. Амплитуда колебаний нарастает с инкрементом,

определяемым формулой (5.106). Когда амплитуда ленгмюровской волны станет достаточно большой, электроны под действием давления в. ч.-колебаний $E_L^2/8\pi$ будут выталкиваться из тех областей пространства, где амплитуда волны максимальна. Электроны начинают тянуть за собой ионы, плотность плазмы в области максимальной амплитуды волны уменьшается, а волна, попавшая в такую яму, уже не может выйти из нее из-за уменьшения групповой скорости. Таким образом, ленгмюровская волна начинает коллапсировать, образуя пакет, в котором все в большем количестве появляются короткие волны, их фазовые скорости, уменьшаясь, достигают значения порядка v_{Te} . В результате в пространстве скоростей от $v_{\phi L}$ и до v_{Te} образуется сплошной спектр ленгмюровских колебаний, которые «вытягивают» хвост функции распределения до значений $v_{\phi L}$ (см. рис. 72). После этого распадная неустойчивость может развиваться уже для k , меньших первоначального, т. е. для больших фазовых скоростей $v_{\phi L} = \omega_{pe}/k$. В действительности процесс происходит непрерывно и эффективная частота поглощения при $E_0^2 (4\pi n_0 T) = 0,36$ достигает значений порядка ω_{pi} [175]. Таким образом, эффективная частота поглощения $\nu_{эф} = (dT_e/dt) \times (E_0^2/4\pi n_0 T)^{-1}$ оказывалась много больше частоты обратного тормозного поглощения. При этом в принципе могут образовываться надтепловые электроны, длина пробега которых уже не определяется теплопроводностью и которые могут прогреть центральную часть капли.

Вообще говоря, к таким же эффектам приводит параметрическая неустойчивость для значений плотности, в два раза меньших критической. При этом согласно работе [177] $\Omega = \omega_{L_1} + \omega_{L_2}$; $k = k_{L_1} + k_{L_2}$. Максимальный инкремент этой неустойчивости

$$\delta \sim \omega_{pe} (E_0^2 / 4\pi n_0 m c^2)^{1/2} \quad (5.107)$$

того же порядка, что инкремент при распаде на звуковую и ленгмюровскую волны.

§ 5.5. Механизм передачи энергии ленгмюровских колебаний электронам плазмы

На основании предыдущего рассмотрения можно считать установленным, что в плазме при облучении ее мощным импульсом лазерного света, а также при инжекции в нее электронного пучка, в частности релятивистского (см. § 5.2), интенсивно генерируются ленгмюровские колебания. Они связаны с плазмой и не могут из нее выходить.

В этом параграфе несколько более подробно исследованы механизмы передачи энергии ленгмюровских шумов электронам плазмы и эффективность такого нагрева. Имеются сообщения [178] о том, что плотность потока энергии в световых импульсах достигает 10^{16} Вт/(с·см²), а это достаточно для возбуждения параметрических неустойчивостей основных типов, приводящих к генерации ленгмюровских колебаний. Эксперименты по лазерному нагреву также дают основание полагать, что эффективность нагрева может быть очень высокой [179, 180].

Существует убедительное экспериментальное подтверждение того, что ленгмюровская турбулентность, развивающаяся в процессе взаимодействия пучка с плазмой, приводит к эффективному нагреву электронов плазмы [181, 184, 185]. Таким образом, представляется необходимым исследовать ленгмюровскую турбулентность при высокой энергии, т. е. найти по возможности простую модель для ее описания, выяснить основные каналы диссипации энергии и механизмы появления быстрых частиц.

Первые теоретические и экспериментальные исследования ленгмюровской турбулентности были проведены в 60-х годах методом теории возмущений по малому параметру W/nT (так называемая теория слабой турбулентности). Установлено, что энергия ленгмюровских колебаний в этом случае сохраняется с точностью до $r_D^2 k^2 \ll \ll 1$, поэтому нельзя ожидать существенного повышения температуры плазмы при диссипации энергии. Изучение процессов распада ленгмюровских волн с образованием ионно-звуковых волн (и вообще трехплазмонных процессов), индуцированного рассеяния на частицах, четырехплазмонного рассеяния привело к выводу о тенденции этих волн к конденсации вблизи $k = 0$ и о возможности образования «конденсата плазмонов» в области, где диссипативные процессы вообще малы. Кроме того, было показано, что теория слабой турбулентности справедлива лишь при $W/nT < (\Delta k r_{De})^2$ (Δk — ширина спектра ленгмюровских колебаний в k -пространстве), а при большой плотности потока энергии ленгмюровская турбулентность неустойчива относительно разбиения однородного рас-

пределения на «сгустки» в x -пространстве, т. е. подвержена модуляционной неустойчивости. Наличие порога у этой неустойчивости означает, что уравнения, описывающие систему при $W/nT > (\Delta k r_{De})^2$, должны быть нелинейными.

Физический смысл модуляционной неустойчивости можно просто пояснить. При достаточно высокой энергии (выше порогового значения) давление ленгмюровских в. ч.-колебаний способно конкурировать с тепловым давлением плазмы. Поэтому электроны, как более легкие частицы, выталкиваются из области пространства, занятой пакетом ленгмюровских волн. Возникающее поле разделенных зарядов вытягивает из этой области ионы до тех пор, пока избыток давления в. ч.-колебаний не уравновесится тепловым давлением. Возникающая область пониженной плотности заполняется ленгмюровскими волнами и называется ленгмюровским солитоном.

Как следует из качественного рассмотрения, основная составляющая электрического поля в данном случае — это поле генерируемых в плазме ленгмюровских колебаний с частотой ω_{pe} . Кроме того, E имеет медленно меняющуюся со временем компоненту \bar{E} (черта сверху означает усреднение по в. ч.-осцилляциям). Имеются еще составляющие, которые осциллируют с частотами, кратными ω_{pe} , но мы их для простоты учитывать не будем. Таким образом, в одномерном случае

$$E = \bar{E} + \tilde{E}_1; \quad \tilde{E}_1 = \mathcal{E}(x, t) \cos \{ \omega_{pe} t + k_0 x \}. \quad (5.108)$$

Скорость и концентрацию электронов будем искать в виде, аналогичном (5.108): $v_e = \bar{v}_e + \tilde{v}_e$; $n_e = \bar{n}_e + \tilde{n}_e$. Для ионов будем пренебрегать в. ч.-осцилляциями, считая, что $v_i = \bar{v}_i$; $n_i = \bar{n}_i$. При решении задачи будем исходить из уравнений движения и непрерывности для электронов и ионов и уравнения Пуассона:

$$\left. \begin{aligned} n_e m_e (\partial v_e / \partial t + (v_e \nabla) v_e) &= -n_e e E - T_e \nabla n_e; \\ \partial n_e / \partial t + \operatorname{div} (n_e v_e) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

$$n_i M (\partial v_i / \partial t + (v_i \nabla) v_i) = n_i e E; \quad (5.110)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial n_i / \partial t + \operatorname{div} (n_i v_i) &= 0; \\ \operatorname{div} E &= 4\pi e (n_i - n_e). \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

Сложим уравнения движения для электронов ионов. Пренебрегая инерцией электронов по сравнению с инерцией ионов, а также нелинейным членом $(v_i \nabla) v_i$, получаем $M n_i \partial v_i / \partial t + m_e n_e (v_e \nabla) v_e = -T_e \nabla n_e$. Произведем усреднение по быстрому времени, учитывая, что для медленных движений выполняются условия квазинейтральности $n_i = n_e$. Тогда в одномерном случае имеем

$$M n_i \partial v_i / \partial t + m_e n_e (1/2) \partial v_e^2 / \partial x = -T_e \partial n_e / \partial x. \quad (5.112)$$

Напомним, что $v_e = \bar{v} + \tilde{v}_{e1}$. Первая гармоника скорости электронов определяется линейным уравнением

$$m_e \partial \tilde{v}_e / \partial t = e \mathcal{E}_1 \cos(\omega_{pe} t + k_0 x).$$

Определим отсюда скорость электронов и подставим ее в уравнение (5.114). Производя усреднение по в. ч.-колебаниям и рассматривая стационарный случай, получаем

$$(1/n_e) \partial n_e / \partial x = - (\partial / \partial x) \mathcal{E}_1^2 / 16\pi n_0 T,$$

откуда следует, что

$$n_e = n_0 \exp(-\mathcal{E}_1^2 / 16\pi n_0 T) \approx n_0 (1 - \mathcal{E}_1^2 / 16\pi n_0 T). \quad (5.113)$$

Отметим, что появляющееся из-за давления в. ч.-колебаний профилирование электронной концентрации имеет период, вдвое меньший длины волны рассматриваемого колебания. Рассмотрим теперь обратное влияние профилирования концентрации электронов на ленгмюровские колебания. Для этого перепишем уравнения (5.109) и (5.111) в следующем виде (снова рассматривается одномерный случай):

$$\partial \tilde{v}_e / \partial t + (e/m) E + (T_e / mn_0) \tilde{n}_e = 0; \quad (5.114)$$

$$\partial \tilde{n}_e / \partial t + n_0 \partial \tilde{v}_e / \partial x + (\partial / \partial x) (\bar{n}_e \tilde{v}_e) = 0; \quad (5.115)$$

$$\partial E / \partial x = -4\pi \tilde{n}_e e. \quad (5.116)$$

Продифференцируем уравнение (5.115) один раз по времени:

$$\frac{\partial^2 n_e}{\partial t^2} = -n_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{n}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial t} \right).$$

Здесь мы пренебрегли малым членом $\partial \bar{n}_e / \partial t$. Подставляя сюда выражение для $\partial \tilde{v}_e / \partial t$ из уравнения (5.114) и удерживая лишь члены до $\theta(\tilde{E}_1^3)$, получаем

$$\frac{\partial^2 n_e}{\partial t^2} = \frac{n_0 e}{m} \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial x} + \frac{T_e}{m} \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial^2 \tilde{E}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{n}_e \frac{e \tilde{E}_1}{m} \right).$$

Подставим теперь это выражение в дважды продифференцированное по времени уравнение Пуассона (5.116) и проведем интегрирование по x . Тогда уравнение для ленгмюровских колебаний примет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_1}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \tilde{E}_1 + \omega_{pe}^2 r_{De}^2 \frac{\partial^2 \tilde{E}_1}{\partial x^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \bar{n}_e \tilde{E}_1; \quad (5.117)$$

Подставляя сюда выражение для $\tilde{E}_1 = \mathcal{E}_1(x, t) \cos(-\omega t + kx)$

и учитывая, что $\omega \gg \partial/\partial t$, $k \ll \partial/\partial x$, получаем, производя усреднение по $1/\omega$,

$$2\omega \partial \mathcal{E}_1 / \partial t = 2n_0 (\partial \mathcal{E}_1 / \partial x) r_{De}^2 \omega_{pe}^2 \quad (5.118)$$

и

$$r_{De}^2 \partial^2 \mathcal{E}_1 / \partial x^2 + k_0^2 r_D^2 \omega_{pe} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^3 / (32\pi n_0 T). \quad (5.119)$$

Из соотношения (5.118) следует, что $dt/\omega = dx / (k_0 r_{De}^2 \omega_{pe}^2)$, т. е. $\xi = x - k_0 r_{De}^2 \omega_{pe} t$. Это значит, что пакет ленгмюровских волн движется с групповой скоростью $v_g = k_0 r_{De}^2 \omega_{pe}$. Тогда уравнение (5.119) примет вид

$$r_{De}^2 \partial^2 \mathcal{E}_1 / \partial \xi^2 + v_g \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^3 / (32\pi n_0 T). \quad (5.120)$$

Уравнение (5.120) имеет решение в виде одномерного солитона [188]

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\max} / \text{ch}(k_0 \xi). \quad (5.121)$$

Исследованию солитонов посвящено много работ, в которых показано, что эти образования неустойчивы относительно модуляционной неустойчивости или схлопывания (коллапс), т. е. процесса, при котором энергия концентрируется во все меньшем объеме. Коллапс идет до тех пор, пока радиус образования не станет сравним с дебаевским радиусом, при котором включается механизм затухания Ландау и вся энергия диссипируется. Важно подчеркнуть, что коллапс зависит от начальных условий, и, строго говоря, его существование доказано лишь для сферически-симметричных задач [184]. Были предприняты попытки исследовать аналитически двумерную задачу [187, 188]. Результат исследования такой. Если есть солитон с различными начальными размерами по x и y , причем $k_x \ll \ll k_y$, то такое образование неустойчиво относительно разбиения на сгустки с одинаковыми размерами порядка k_y , а также способно коллапсировать. Коллапса может и не быть, если модуляционная неустойчивость успеет разрушить солитон (разбить на равные по размеру образования). В работе [186] приведен пример неколлапсирующего двумерного образования с приблизительно равными размерами по x и y . В качестве механизма диссипации энергии таких солитонов предполагается процесс парных столкновений, приводящий к слиянию солитонов и уменьшению их характерной ширины. При достаточном количестве актов слияния ширина такого образования может стать порядка дебаевского радиуса, где включается механизм затухания Ландау. Возможны и другие механизмы диссипации энергии, например неустойчивость солитона относительно роста электронной температуры.

Модуляционная неустойчивость или коллапс солитонов должны приводить к обогащению спектра колебаний коротковолновыми пульсациями. Обогащенный короткими волнами сплошной спектр коле-

баний с фазовыми скоростями, простирающимися до v_{Te0} , начинает вытягивать электронную функцию распределения в область больших значений фазовых скоростей, таким образом быстро нагревая электроны плазмы за счет обычной квазилинейной диффузии [175]. Такова качественно картина возможного механизма нагрева электронов за счет диссипации энергии ленгмюровских шумов.

§ 5.6. Эффективность лазерного нагрева

Как было показано, инициирование термоядерных реакций при помощи мощных лазеров, обладающих относительно небольшой энергией, требует изучения ряда важных вопросов, относящихся к общим проблемам физики сильнонеравновесной плазмы. К ним относятся эффективность нагрева плазмы при параметрической неустойчивости, необходимость знания точного вида функции распределения электронов и доли надтепловых частиц, которые могут разогреть ядро мишени, эволюция ленгмюровских колебаний большой амплитуды, накопившихся в системе, и т. д. Все эти обстоятельства должны быть учтены при оценке энергии лазера, необходимой для инициирования термоядерной реакции. Выясним зависимость полной энергии лазера \mathcal{E}_L от коэффициента $\alpha_L < 1$, равного доле энергии, переданной мишени при оптимальных условиях. Условие зажигания самоподдерживающейся реакции можно записать в виде

$$\mathcal{E}_F/\tau \leq (4/3) \pi r^3 (n^2/4) \langle \sigma v_i \rangle \mathcal{E}_я, \quad (5.122)$$

где $\mathcal{E}_я$ — энергия, выделяемая при термоядерной реакции; \mathcal{E}_F — пороговая энергия для зажигания реакции, равная $(4/3) \pi r^3 3n T_i$ ($T_i \sim 10$ кэВ; n — плотность плазмы). Так как мишени передается не вся энергия лазера, а лишь $\alpha_L \mathcal{E}_L$, то

$$\mathcal{E}_L \geq (4/3) \pi r^3 3n T_i / \alpha_L. \quad (5.123)$$

Время удержания τ определяется как r/c_s , где c_s — скорость звука при температуре порядка 10 кэВ (вообще говоря, при сильном сжатии эта температура, являющаяся пороговой, снижается примерно в 2—3 раза). Подставляя значение τ в формулу (5.122) и пользуясь соотношением (5.123), имеем

$$nr > \frac{1}{\alpha_L} \frac{12 T_i}{\mathcal{E}_я} \frac{c_s}{\langle \sigma v_i \rangle} = \frac{F(T_i)}{\alpha_L}. \quad (5.124)$$

Функция $F(T_i)$ довольно слабо зависит от температуры, и для интересующих нас параметров [187] $F(T_i) \approx 6 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2}$.

Таким образом, мы нашли связь между nr и \mathcal{E}_L . Введем теперь известную величину $\mathcal{E}_F^0 = (4/3) \pi r_0^3 3n_0 T_i$, где n_0 — нормальная плотность несжатого твердого водорода, а r_0 согласно фор-

муле (5.124) определим при $\varepsilon_L = 1$ как $r_0 = F(T_i)/n_0$. Тогда $\mathcal{E}_F^0 = (4/3) \pi 3T_i [F(T_i)]^3/n_0^2$.

Подставляя r из соотношения (5.124) в формулу для энергии лазера, получаем

$$\mathcal{E}_L = (4/3) \pi [F(T_i)]^3 3T_i \alpha_L^4 n^2 = \mathcal{E}_F^0 (n_0^2/n)/\alpha_L^4, \quad (5.125)$$

или для интересующих нас значений величин

$$\mathcal{E}_L \geq \frac{1}{\alpha_L^4} \frac{1,6 \cdot 10^6}{(n/n_0)^2} \text{ Дж.} \quad (5.126)$$

При оптимизации всех параметров и максимальном сжатии $\mathcal{E}_L \sim 10^4$ Дж. Следует отметить, что энергия \mathcal{E}_L сильно зависит от коэффициента α_L . В том случае, если, например, энергия лазера не полностью доводится до мишени, рассеиваясь по пути, величина \mathcal{E}_L сильно возрастает. Если рассеивается половина энергии и $\alpha_L = 0,5$, то \mathcal{E}_L возрастает в 16 раз, что весьма существенно. Одним из механизмов такого рассеяния может быть возбуждение параметрической неустойчивости в разлетающейся плазме малой плотности, на важность которого было указано в работе [177].

Рассмотрим распад электромагнитной волны с частотой, равной частоте лазера Ω , на электромагнитную и ионно-звуковую волны в случае $\omega_{pe} \ll \Omega$. Из законов сохранения следует, что такой распад возможен, когда длины волн электромагнитных колебаний сопоставимы с длиной волны ионно-звуковых колебаний, т. е. когда Ω/c порядка $r_{De} = \omega_{pe}/v_{Te}$. Так как Ω соответствует частоте ω_{pe}^0 при $n = 10^{21} \text{ см}^{-3}$, то $\Omega/c = \omega_{pe}^0/c \sim \omega_{pe}/v_{Te}$. Отсюда следует, что рассеяние возможно при плотностях

$$n \sim 10^{21} T_e/m_e c^2. \quad (5.127)$$

Подставляя сюда $T_e \sim 10$ кэВ и $m_e c^2 = 0,511$ МэВ, получаем, что $n \sim 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Таким образом, если распадная неустойчивость обладает значительным инкрементом для волн, распространяющихся в обратном направлении, то происходит заметное отражение первоначальной волны и α_L уменьшается. Вообще говоря, распад может происходить и на меньших плотностях, однако, как будет показано, инкремент максимален при максимальном значении ω_s — частоты ионно-звуковых колебаний, т. е. при $k_s \sim r_{De}^{-1}$.

Итак, рассмотрим задачу о распаде электромагнитной волны с частотой ω_1 и волновым вектором \mathbf{k}_1 на ионно-звуковую (ω_s, k_s) и электромагнитную волны (ω_2, \mathbf{k}_2). Будем считать амплитуду первой электромагнитной волны заданной. Тогда

$$[k_2^2 c^2 - \varepsilon(\omega_2) \omega_2^2] E_{k_2, \omega_2} = -4\pi i \omega_2 j_{k_2, \omega_2}^{\text{нел}}; \quad (5.128)$$

$$k_s^2 \varepsilon(\omega_s) \varphi_{k_s, \omega_s} = 4\pi e n_{k_s, \omega_s}^{\text{нел}}. \quad (5.129)$$

Здесь $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, так как $\omega_2 \gg \omega_{pi}^2$, $k_2 \approx \omega_2/c$, а $\varepsilon(\omega_s) = 1 + 1/k_3^2 r_{De}^2 - \omega_{pi}^2/\omega_s^2$. Если пренебречь нелинейными членами, то сразу получаются дисперсионные соотношения для электромагнитной волны и ионно-звуковых колебаний. Плотность нелинейного тока $j_{k_2, \omega_2}^{\text{нел}}$ и плотность плазмы $n_{k_s, \omega_s}^{\text{нел}}$ можно легко вычислить, если учесть, что вклад в нелинейный ток в уравнении (5.128) дают ионно-звуковые колебания и электромагнитная волна с частотой ω_1 и волновым вектором k_1 , а вклад в возмущение плотности второго порядка дают исходная электромагнитная волна и электромагнитная волна, появившаяся в результате распада. При этом выкладки полностью аналогичны тем, которые приводились в гл. 3. Так,

$$j^{\text{нел}} = - \sum_{\substack{k_1, k_s \\ \omega_1, \omega_s}} e v_{k_1} n_{k_s} \exp \{ i(k_1 + k_s) r - i(\omega_1 + \omega_s) t \}, \quad (5.130)$$

где $v_{k_1} = e E_{k_1, \omega_1} / m_i \omega_1$; $n_{k_s} = e \varphi_{k_s, \omega_s} / T_e$.

Аналогично возмущение концентрации можно найти из уравнения движения электрона $n_0 m \nabla v^2/2 = -T_e \nabla n_H$. Отсюда следует, что

$$n^{\text{нел}} = \frac{n_0 m}{T_e} \sum_{\substack{k_1, \omega_1 \\ k_2, \omega_2}} \frac{e E_{k_1, \omega_1}}{m \omega_1} \frac{e E_{k_2, \omega_2}}{m \omega_2} \exp [i(k_1 + k_2) r - i(\omega_1 + \omega_2) t]. \quad (5.131)$$

Подставляя фурье-компоненты выражений (5.130), (5.131) в уравнения (5.128) и (5.129) и разлагая левую часть, как обычно: $\omega_2 \rightarrow \omega_{k_2} - i \partial/\partial t$, получаем обычные уравнения для распадной неустойчивости и выражение для инкремента

$$\delta = (\omega_{pe}^2/\omega_1) \sqrt{\omega_s/\omega_2} |E|^2 / 16\pi n_0 T_e, \quad (5.132)$$

При этом ω_s определяется из законов сохранения следующим образом. Так как $k_s = k_1 - k_2$, то

$$k_s^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2. \quad (5.133)$$

Но так как $k_s = \omega_s/c_s$, $k_{12} \approx \omega_{12}/c$, причем $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_s$, то из выражения (5.133) следует, что

$$\omega_s^2 \approx [2\omega_1^2 T_e / M c^2] (1 - \cos \theta). \quad (5.134)$$

Таким образом, максимум инкремента неустойчивости достигается при $\theta = \pi$, т. е. когда рассеяние происходит назад.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 98.
2. Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа. М., «Наука», 1972.
3. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 196.
4. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958, с. 182.
6. Стикс Т. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
7. Синельников К. Д., Руткевич Б. Н. Лекции по физике плазмы. Харьков, ХГУ, 1964.
8. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
9. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Гостехиздат, 1959.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.
11. Langmuir I. Scattering of Electrons in Ionized Gases. — "Phys. Rev.", 1925, v. 26, p. 585.
12. Vineman O. Dissipation of Currents in Ionized Media. — "Phys. Rev.", 1959, v. 115, p. 503.
13. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы. — «Успехи физ. наук», 1961, т. 73, № 4, с. 701.
14. Файнберг Я. Б. Взаимодействие заряженных частиц с плазмой. — «Атомная энергия», 1961, т. 11, с. 313.
15. Закатов Л. П., Плахов А. Г. Торможение мощного электронного пучка в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 588.
16. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1948, т. 16, с. 574.
17. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
18. Лаврентьев И. А., Шабат Б. А. Теория функций комплексного переменного. Изд. 2-е, перераб. М., Физматгиз, 1958.
19. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.
20. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейное колебание разреженной плазмы (1). — «Ядерный синтез», 1961, т. 1, с. 82; «Ядерный синтез. Приложение», 1962, ч. 2, с. 465.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.
22. Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф. Взаимодействие потоков быстрых электронов с продольными плазменными волнами. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 40, с. 123.

23. Драммонд В. Е., Пайнс Д. Нелинейная стабилизация плазменных колебаний. — «Ядерный синтез. Приложение», 1962, ч. 2, с. 1049.
24. Веденов А. А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 203.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953, с. 239.
26. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.
27. Иванов А. А., Рудаков Л. И. Динамика квазилинейной релаксации бесстолкновительной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 1522.
28. Взаимодействие пучка электронов с плазмой в магнитном поле. — «Ядерный синтез. Приложение», 1962, ч. 3, с. 1101. Авт.: И. Ф. Харченко и др.
29. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Неустойчивость в сильнонеоднородных пучках. — В кн.: Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. Киев, Изд-во АН УССР, 1965, с. 59.
30. Roberts K., Berk N. Nonlinear Evolutions of Two-Stream Instability. — "Phys. Rev. Lett.", 1967, v. 19, p. 297.
31. Dawson J., Shanny R. Some Investigation of Nonlinear Behavior of One-Dimensional Plasma. — "Phys. Fluids", 1968, v. 11, p. 1506.
32. Доусон Дж. Электростатическая модель плоских листов для плазмы и ее модификация для частиц конечного размера. — В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы. Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. Пер. с англ. М., «Мир», 1974.
33. К нелинейной теории возбуждения монохроматической плазменной волны электронным пучком. — «Письма ЖЭТФ», 1970, № 12, с. 407. Авт.: И. Н. Онищенко и др.
34. On Decay Instability of Langmuir and Ion-Sound Oscillations in Plasma-Beam System. — In: Proc. 6th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. V. 1. Дубна, ОИЯИ, 1974, p. 537. Auth.: N. G. Matsiborko e. a.
35. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
36. Иванов А. А., Параил В. В., Соболева Т. К. Нелинейная теория взаимодействия моноэнергетического пучка с плотной плазмой. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 63, с. 1678.
37. Левитский С. М., Шашурин И. П. Пространственное развитие пучково-плазменной неустойчивости. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 350.
38. Böhmer H., Chang J., Raether M. Influence of Collisions on the Instability of Cold and Warm Electron Beams in a Plasma. — "Phys. Fluids", 1971, v. 14, N 1, p. 150.
39. Сизоненко В. Л., Степанов К. Н. О квазилинейной релаксации продольных колебаний плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 49, с. 1197.
40. Bernstein I. B., Engelman F. Quasi-Linear Theory of Plasma Waves. — "Phys. Fluids", 1966, v. 9, p. 937.
41. Веденов А. А., Рютов Д. Д. Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 3.
42. Иванов А. А., Соболева Т. К., Юшманов П. Н. Трехмерная квазилинейная релаксация. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 69, с. 2023.
43. Взаимодействие ионных пучков с плазмой. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 753. Авт.: А. А. Иванов и др.
44. Beam and high-frequency heating of plasma in tokamak-type systems. — In: Proc. 5th Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. V. II. Vienna, IAEA, 1975, p. 203. Auth.: A. A. Ivanov e. a.
45. Завойский Е. К., Рудаков Л. И. Физика плазмы. (Коллективные процессы в плазме и турбулентный нагрев.) М., «Знание», 1967.
46. Роуландс Дж., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Квазилинейная теория цик-

- лотронной неустойчивости плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 50, с. 979.
47. Степанов К. Н., Киценко А. Б. О возбуждении электронных волн в магнитоактивной плазме пучком заряженных частиц. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 31, с. 167.
 48. Ivanov A. A., Teichmann J. A Glass of Solutions of Quasilinear Equations. — "Plasma Phys.", 1970, v. 4, p. 4, 667.
 49. Брейзман Б. М., Рютов Д. Д. Квазилинейная релаксация ультрарелятивистского электронного пучка в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 408.
 50. Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. Ч. 1, 3. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 331.
 51. Сахаров А. Д. Теория магнитного термоядерного реактора. Ч. 2. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 20.
 52. Будкер Г. И. Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном магнитном термоядерном реакторе. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 66.
 53. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1936, т. 7, с. 203.
 54. Сивухин Д. В. Кулоновские столкновения в полностью ионизированной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 81.
 55. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
 56. Пост Р. Высокотемпературная плазма и управляемые термоядерные реакции. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
 57. Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 27.
 58. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1973.
 59. Rosenbluth M. N., Rostoker N., Krall N. A. Finite Larmor Radius Stabilization of "Weakly" Unstable Confined Plasmas. — "Nucl. Fus. Suppl.", 1962, part I, p. 143.
 60. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. М., Физматгиз, 1962.
 61. Михайловский А. Б. Желобковая неустойчивость аксиально-симметричной плазмы с конечным ларморовским радиусом ионов. — «Ядерный синтез», 1964, т. 4, с. 108.
 62. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, с. 581.
 63. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. Микроскопические неустойчивости пространственно неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Ядерный синтез. Приложение», 1962, ч. 2, с. 481.
 64. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Турбулентные процессы в тороидальных системах. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 209.
 65. Тимофеев А. В. Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 146, с. 581.
 66. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. Под ред. В. А. Фока. М., Гостехиздат, 1954.
 67. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по высшей математике. М., «Наука», 1967, с. 138.
 68. Бучельникова Н. С. Универсальная неустойчивость в калиевой плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 1147; Chu T. K., Hendel H. W., Politzer P. A. Measurement of Enhanced Plasma Losses Caused by Collisional Drift Waves. — "Phys. Rev. Lett.", 1967, v. 19, p. 1110.
 69. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. — В кн.: Вопросы теории плаз-

- мы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
70. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. К вопросу об устойчивости пространственно-неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 912.
 71. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. О дрейфовой неустойчивости в плотной плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 45, с. 1566.
 72. Михайловский А. Б. Конвективная неустойчивость и эффект стабилизации в разреженной высокотемпературной плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 509.
 73. Михайловский А. Б. Поперечные дрейфовые колебания неоднородной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 1552.
 74. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1953.
 75. Галеев А. А., Рудаков Л. И. Нелинейная теория дрейфовой неустойчивости неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 45, с. 647.
 76. Hoh F. C. Quasi-Linear Theory for Small Larmor Radius Universal Instabilities. — "Phys. Fluids", 1965, v. 8, p. 968.
 77. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 141.
 78. Силин В. П. Колебания слабонеоднородной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 1271.
 79. Иванов А. А., Маркеев Б. М., Рудаков Л. И. О динамике квазилинейной релаксации в неустойчивой неоднородной плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 594.
 80. Taylor J. V. Some Stable Plasma Equilibria in Combined Mirror-Cusp Field. — "Phys. Fluids", 1963, v. 6, p. 1529.
 81. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, с. 92.
 82. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О высокочастотном нагреве плазмы. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 153.
 83. Кулешов В. Ф., Рухадзе А. А. Теория желобковой неустойчивости неоднородной плазмы. — «Ядерный синтез», 1964, т. 4, с. 169.
 84. Иванов А. А. О стабилизации дрейфовой неустойчивости в ловушках с нарастающим к границе магнитным полем. — «Докл. АН СССР», 1966", т. 166, с. 1084.
 85. Rosenbluth N. N., Krall N. A. Demonstration of the Minimum B Stability Theorem for the Universal Instability. — "Phys. Fluids", 1975, v. 8, p. 1004.
 86. Церковников Ю. А. Устойчивость плазмы в сильном магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 32, с. 67.
 87. Иванов А. А. О стабилизации дрейфовой неустойчивости изотермической плазмы в ловушке. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 229.
 88. Иванов А. А. Динамика квазилинейной релаксации. Канд. дис. М., МФТИ 1967.
 89. Леонтович М. А. О силах, действующих на прямолинейный ток, находящийся внутри проводящей цилиндрической трубы. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых реакций. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 110.
 90. Леонтович М. А., Шафранов В. Д. Об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 207.
 91. An Energy Principle for Hydrodynamic Stability Problems. — "Proc. Roy. Soc.", 1958, v. A, 224, p. 17—40. Auth.: I. V. Bernstein et al.
 92. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, с. 132.

93. Kruscal M. D., Oberman C. R. On the Stability of Plasma in Static Equilibrium. — "Phys. Fluids", 1958, v. 1, p. 275.
94. Веденов А. А. Физика плазмы. М., Изд-во АН СССР, ВИНТИ, 1965.
95. Сайдем Б. Устойчивость самосжатого линейного разряда. — В кн.: Труды Второй междунар. конф. по мирному использованию атомной энергии. Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат. 1959, с. 55.
96. Иванов А. А. Взаимодействие ВЧ-полей с плазмой. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 139.
97. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
98. Силин В. П., Алиев Ю. М. Теория колебаний плазмы, находящейся в высокочастотном электрическом поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 901.
99. Силин В. П. Параметрический резонанс в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 1679
100. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 32, с. 1291.
101. Андреев Н. Е., Кирий А. Д., Силин В. П. Параметрическое возбуждение продольных колебаний в плазме слабым высокочастотным электрическим полем. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 57, с. 1024.
102. Андреев Н. Е., Кирий А. Д. К теории параметрической неустойчивости плазмы, находящейся в ВЧ электрическом и постоянном магнитном полях. — «Журн. техн. физ.», 1971, т. 41, с. 1080.
103. Сагдеев Р. З., Галеев А. А. Нелинейная теория плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 7, М., Атомиздат 1973, с. 3.
104. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. Дрейфовая неустойчивость в плазме, помещенной в высокочастотное электрическое поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 293.
105. Иванов А. А., Рудаков Л. И., Тейхманн И. О влиянии высокочастотного магнитного поля на неустойчивости плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 1690.
106. Ivanov A. A., Rudakov L. I., Teichmann J. L'influence de champ magnétique h. f. sur les instabilités du plasma. — In: 2 ème Colloque Internat. entre les champs Oscillants et les Plasmas. V. 4. Sacley, 1968, p. 1077; Ivanov A. A., Rudakov L. I., Teichmann J. Stabilization of Some Dissipative Instabilities by Means of H. F. Electromagnetic Field. — "Czechosl. J. Phys.", 1969, v. B 19, p. 941.
107. Рудаков Л. И., Кораблев Л. В. Квазилинейная теория неустойчивости тока в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 50, с. 220.
108. Брейзман Б. Н., Мирнов В. В., Рютов Д. Д. Влияние ионно-звуковой неустойчивости на скин-эффект в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 39, с. 1817.
109. Соболева Т. К. Канд. дис. М., ФИАН СССР, 1973.
110. Иванов А. А., Соболева Т. К. Стабилизация дрейфовых неустойчивостей магнитно-звуковой волной. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 2170.
111. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1964.
112. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. — "Phys. Rev.", 1954, v. 94, p. 511.
113. Тимофеев А. В. Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 146, с. 581.
114. Соболева Т. К. Стабилизация дрейфово-диссипативной неустойчивости магнитно-звуковой волной. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 5, с. 818.

115. Кирий А. Д. Канд. дис. М., ФИАН СССР, 1972.
116. Шафранов В. Д. Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза. Т. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 61.
117. Градов О. М., Зюндер Д. Парметрическое возбуждение потенциальных волн в полностью ионизированной плазме вблизи электронного циклотронного резонанса. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», т. 58, с. 975.
118. Иванов А. А., Параил В. В. Взаимодействие с плазмой прямой магнитно-звуковой волны большой амплитуды и частоты. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 932.
119. О роли ионного звука при электронном циклотронном нагреве. Препринт ИАЭ № 2058. М., 1970. Авт.: А. А. Иванов и др.
120. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Нелинейная теория плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 7. М., Атомиздат, 1973, с. 3.
121. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
122. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
123. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
124. Amodt R., Drummond W. B. Radiation of Double-Plasma Frequency Electromagnetic Waves by Turbulent Plasma. — "J. Nucl. Energy", 1964, v. 6, p. 147.
125. Иванов А. А., Рютов Д. Д. Рассеяние электромагнитных волн плазменными колебаниями в плоском слое плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 1366.
126. Поглощение энергии, обусловленное пучковой неустойчивостью плазмы в тороидальной системе. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 497. Авт.: С. Д. Фанченко и др.
127. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Слаботурбулентная плазма в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 2234.
128. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Lectures on Nonlinear Plasma Theory. Preprint IC/66/64; Nonlinear plasma theory. Ed. by T. O'Neil, D. Book. N. Y. — Amsterdam, Benjam., 1969.
129. Завойский Е. К. Коллективные взаимодействия и проблема получения высокотемпературной плазмы. — «Атомная энергия», 1963, т. 14, с. 56.
130. Advances in Research of Turbulent Heating of a Plasma. — In: Proc. 4th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. Vienna, IAEA, 1971, p. 3. Auth.: E. K. Zavojskii e. a.
131. Измерение электрических полей в турбулентной плазме по штарковскому уширению спектральных линий водорода. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, с. 55. Авт.: Е. К. Завойский и др.
132. Ахиезер И. А. К теории нелинейных движений неравновесной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 952; т. 47, с. 2269.
133. Коврижных Л. М. О квазилинейной теории ионно-звуковых волн. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 915.
134. Векштейн Г. Е., Сагдеев Р. З. Аномальное сопротивление плазмы при ионно-звуковой турбулентности. — «Письма ЖЭТФ», 1970, т. 11, с. 297.
135. Турбулентный нагрев плазмы током в пробкотроне. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 643. Авт.: М. В. Бабыкин и др.
136. Rudakov L. I. The Mechanism of Turbulent Heating and of Losses in Tokamak Devices. — In: Proc. 4th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 2. Vienna, IAEA, 1971, p. 235.
137. Векштейн Г. А., Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З. Асимптотическое решение в задаче об аномальном сопротивлении плазмы. — «Письма ЖЭТФ», 1970, т. 12, с. 419.
138. Sagdeev R. Z. "Shock" Waves in Rarefied Plasma. — In: Proc. 4th Internat. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. V. 2. Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1959, v. 1081.

139. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 20.
140. Шолин Г. В., Демура А. В., Лисица В. С. Теория штарковского уширения спектральных линий в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 2097.
141. Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. Автомоделное движение разреженной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 49, вып. 8, с. 647.
142. Иванов А. А., Козоровицкий Л. Л., Русанов В. Д. Распространение тепла в плазме вдоль магнитного поля (волна замещения). — «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 4, с. 811.
143. Иванов А. А., Русанов В. Д., Сагдеев Р. З. Электронные ударные волны в бесстолкновительной плазме. — «Письма ЖЭТФ», 1970, т. 12, с. 29.
144. Закатов Л. П., Плахов А. Г. Торможение мощного электронного пучка в плотной плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 588.
145. Шапкин В. В. Экспериментальное исследование механизма нагрева плазмы мощным электронным пучком в пробкотроне. Канд. дис. Харьков, ХГУ, 1968.
146. Ryutov D. D. Contribution to the Theory of Beam Heating of a plasma in an Open Trap. — "Nucl. Fusion", 1969, v. 9, p. 297.
147. Получение релятивистской плазмы адиабатическим сжатием в системе плазма — пучок. — «Письма ЖЭТФ», 1972, т. 15, вып 1, с. 16. Авт.: Л. П. Закатов и др.
148. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1, 2. М., Атомиздат, 1970, 1971.
149. Kuckes A. F. Resonant Absorption of Electromagnetic Waves in a Nonuniformly Magnetized Plasma. — "Plasma Phys.", 1968, v. 10, p. 367.
150. Brambilla M. Self-Consistent Field from Electron Cyclotron Resonance in a High Frequency Plasma Accelerator. — "Plasma Phys.", 1968, v. 10, p. 358.
151. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Квазилинейная теория колебаний плазмы. — «Ядерный синтез. Приложение», 1962, ч. 2, с. 147.
152. Иванов А. А. Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой. Докт. дис. Харьков, Укр. физ.-техн. ин-т, 1971.
153. Стрелков В. С. Исследование джоулева нагрева по Т-4 плазмы в устойчивом режиме Токамака. Докт. дис. М., ИАЭ, 1974.
154. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Турбулентные процессы в тороидальных системах. Препринт ИАЭ № 1227, М., 1966.
155. Decharges a fort Courant dans TFR. Equipe TFR. (High Current Discharges in TFR. TFR Groop). — In: Proc. 5th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 1. Vienna, IAEA, 1975, p. 135.
156. Mercier C., Soubbaramayer. Equilibre, Perturbation et Evolution d'un Systeme Plasma-vide du Type Tokamak. (Equilibrium, Perturbation and Evolution of a Plasma-Vacuum Tokamak System). — In: Proc. 5th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 1. Vienna, IAEA, 1975, p. 403.
157. Investigation of the Electron Energy Distribution Function and its Variation during Electron Cyclotron Resonance Heating. — In: Proc. 5th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 1. Vienna, IAEA, 1975, p. 241. Auth.: V. V. Alikeev e. a.
158. Возбуждение магнитно-звукового резонанса в плазме установки Токамак. — «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 14, с. 228. Авт: В. Л. Вдовин и др.
159. Ivanov N. V., Kovan I. A. Magnetoacoustic Heating of Plasma in Tokamak TO-1 — In : Proc. 5th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 1. Vienna, IAEA, 1975, p. 255.
160. Параил В. В. Исследование неустойчивостей, связанных с протеканием по плазме тока поперек внешнего магнитного поля. М., МФТИ, 1971.
161. Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 171.

162. Evaluation of the Possibilities of Using a Powerful Beam of Relativistic Electrons for Thermonuclear Fusion. — In: Proc. 4th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 1. Vienna, IAEA, 1971, p. 635. Auth.: M. V. Babykin e. a.
163. Bobin Y. A. Comparaison Entre les Lasers et les Faisceaux d'electrons Relativistes pour la Fusion Controlee. — "Nucl. Fusion", 1974, v. 14, p. 553.
164. Будкер Г. И. Релятивистский стабилизированный электронный пучок. — «Атомная энергия», 1956, т. 5, с. 9.
165. Иванов А. А., Рудаков Л. И. Мощный пучок электронов в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 58, с. 1332.
166. Bennett W. H. Magnetically Self-Focusing Streams. — "Phys. Rev.", 1934, v. 45, p. 890.
167. Bennett W. H. Self-Focusing Streams. — "Phys. Rev.", 1955, v. 98, p. 1584.
168. Watson K. M., Bludman S. A., Rosenbluth M. N. Statistical Mechanics of Relativistics Streaming. — "Phys. Fluids", 1960, v. 3, p. 741.
169. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. К нелинейной теории взаимодействия с плазмой «монохроматического» пучка релятивистских электронов. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 57, с. 966.
170. Рудаков Л. И. Коллективное торможение мощного пучка релятивистских электронов в плотной плазменной мишени. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 2091.
171. Рютов Д. Д., Брейзман Б. И. Квазилинейная релаксация ультрарелятивистского электронного пучка в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 408.
172. Рютов Д. Д., Брейзман Б. И., Чеботаев П. З. Нелинейные эффекты при взаимодействии ультрарелятивистского электронного пучка с плазмой. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 1409.
173. Рютов Д. Д., Брейзман Б. И. Влияние неоднородности плазмы на релаксацию ультрарелятивистского электронного пучка. — «Письма ЖЭТФ», 1970, т. 11, с. 606.
174. Laser Compression of Matter to Super-High Densities. Report of Univ. of California Lawrence Livermore Laboratory, 1972. Auth.: J. Nuckolls e. a.
175. Иванов А. А., Сигов Ю. С., Ходырев Ю. В. К нелинейной теории высокочастотного нагрева плазмы. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 214, с. 1291.
176. Anomalous High-Frequency Resistivity and Heating of a Plasma. — "Phys. Rev. Lett.", 1970, v. 24, p. 987. Auth: W. L. Krueer e. a.
177. Взаимодействие мощной электромагнитной волны с плазмой. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 65, с. 973. Авт.: А. А. Галеев и др.
178. Kerhar J. E., Godwin R. P., McCall G. H. Bremsstrahlung Emission from Laser-Produced Plasmas. — "Appl. Phys. Lett.", 1974, v. 25(2), p. 108.
179. Аномальное взаимодействие мощного лазерного излучения с плотной плазмой. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 67, № 1, с. 118. Авт.: Н. Г. Басов и др.
180. Saturation of a Convective Instability due to Trapped Particles. — "Phys. Lett.", 1973, v. 43(A), p. 45. Auth.: D. Boyd e. a.
181. Plachov A. G., Rutov D. D., Shapkin V. V. Investigation of the Mechanism of a Beam Heating of a Plasma in a Magnetic Mirror Trap. — In: Proc. 3th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. V. 2. Vienna, IAEA, 1968, p. 709.
182. Образование плотной плазмы при инжекции электронного пучка в магнитную ловушку. — «Укр. физ. журн.», 1969, т. 14, с. 1167. Авт.: М. Ю. Бредихин и др. Исследование условий образования плотной плазмы при инжекции электронного пучка в магнитную ловушку. — «Атомная энергия», 1970, т. 29, вып. 4, с. 276. Авт.: М. Ю. Бредихин и др.
183. Влияние величины магнитного поля на нагрев плотной плазмы, образованной электронным пучком. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971,

- т. 61, с. 694. Исследование условий нагрева плотной плазмы, образованной электронным пучком в магнитной ловушке. — Там же, т. 16, с. 1180. Авт.: М. Ю. Бредихин и др.
184. Колоколов А. А. Устойчивость основной моды нелинейного волнового уравнения в кубической среде. — «Журн. прикл. мат. и техн. физ.», 1973, № 3, с. 1530.
185. Захаров В. Е., Рубенчик А. М. Неустойчивость волноводов и солитонов в нелинейных средах. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 65, с. 997.
186. Дегтерев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. Два примера коллапса ленгмюровских волн. — Препринт ИПМ АН СССР № 35, 1974.
187. The Super-High Density Approach to Laser Fusion CTR. Report of University of California Lawrence Livermore Laboratory, 1972. Auth.: J. Nuckolls et al.
188. Рудаков Л. И. Торможение электронных пучков в плазме с высоким уровнем ленгмюровской турбулентности. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, с. 821.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомодельное решение 39, 40, 44, 257, 265
 Адиабатический инвариант 119, 152
 Аномальное сопротивление 250, 253, 254, 257
 Атмосферика свистящие 212

 Взаимодействие волн 233
 — волна—частица 237
 Возмущения желобковые 122
 — типа змеек 183
 — типа перетяжек 183
 Волна альфвеновская 105, 109, 111
 — быстрая 135
 — гибридная 214, 222, 284
 — дрейфовая 138
 — ионно-звуковая 222, 253, 255, 262
 — ленгмюровская 326, 327
 — магнитно-звуковая 105, 109, 204, 206, 261, 270
 — медленная 135
 — нелинейная 258, 260
 — поляризованная по кругу 109
 — Римана 317
 — сжатия 316
 — циклотронная 284, 286
 — электромагнитная 11, 325
 Время жизни плазмы 8
 — квазилинейной релаксации 43
 — нагрева 291
 — обмена энергией 8
 — скиновое 296
 — удержания 120, 121, 315

 Геликон 212

 Дебаевский радиус 5, 6, 265
 Декремент 256
 Дисперсия 258, 261
 Диффузии коэффициент 136
 — тензор 309
 — квазилинейный коэффициент 255, 308
 Длина квазилинейной релаксации 312
 — свободного пробега 6
 Доплера эффект 129

 Дрейф ларморовский 125
 — центробежный 124
 — электрический 130

 Закон Больцмана 202
 — дисперсии 260
 — сохранения импульса 233
 — — потока вещества 323
 — — частиц в элементе фазового объема 131
 — — энергии 233
 Замагниченность 255
 Затухание бесстолкновительное (Ландау) 137, 140, 145, 202, 211, 239, 256
 — линейное 243, 244
 — нелинейное 244

 Инкремент неустойчивости 10, 17, 59, 326
 — — локальный 153

 Квазинейтральность плазмы 5, 6, 12, 170, 261
 Колебания дрейфово-циклотронные 148
 — ионно-звуковые 24, 211, 325, 326, 333
 — ленгмюровские 15, 211, 325—327
 — непотенциальные 102
 — потенциальные 20, 102
 — циклотронные 148
 — электростатические (потенциальные) 15, 102
 Коллапс 330
 Коллективные процессы 305
 Критерий Лоусона 294, 314
 Кулоновский логарифм 7
 Кулоновское сечение столкновений 9

 Ландау затухание 137, 145, 239, 256
 Ларморовский радиус 118, 130, 199
 Ленгмюровская турбулентность 327
 Лиувилля теорема 9

 Метод интегрирования по траектории 189

- Найквиста 171
- теории слабой турбулентности 189, 221
- численного моделирования 53
- Момент магнитный 119, 131
- Моменты (бесстолкновительного кинетического уравнения) 13, 19

- Нагрев лазерный 293
 - циклотронным резонансом 282
 - пучковый 277, 293
 - турбулентный 228
- Неравновесность 12
- Неустойчивость бунемановская (токовая) 18, 23, 251, 252
 - дрейфовая 138, 145
 - дрейфово-диссипативная 191, 206
 - дрейфово-температурная 135, 191, 202, 204
 - желобковая 122, 125
 - ионно-звуковая 146, 251—253, 257, 270
 - ионного пучка в плазме 23
 - модуляционная 314, 328
 - параметрическая (или распадная) 209, 221, 324, 333
 - пучковая 14
 - универсальная дрейфовая 201, 202
 - циклотронная 146, 257

- Плазмон 233
- Подвижность электронов 191
- Поляризация
 - круговая 212
 - линейная 235
- Поляризуемость плазмы 11
- Порог неустойчивости 21, 23
- Плазма полностью ионизованная 8
 - слабоионизованная 8
- Приближение геометрической оптики 153
 - гидродинамическое 19, 32, 189, 222, 307
 - дрейфовое 131
 - изотропного инкремента 252
 - квазиклассическое 283
 - квазилинейное 33, 255
 - кинетическое 32
 - линейное 11, 36
 - нулевого ларморовского радиуса 130
- Прицельный параметр 5
- Пробкотрон 118, 119, 121
- Пробочное отношение 119

- Равновесие тепловое 11
 - — локальное 8
- Распределение Больцмана 266
 - Максвелла 19, 267

- Рассеяние колебания индуцированное 244, 312
 - комптоновское 244, 248
 - нелинейное на ионах 252
 - нелинейное на электронах 248
 - упругое электронов на колебаниях 280

- Сжатие вещества излучением лазера 314
- Скин-слой 191, 195
- Скорость групповая 11, 15
 - ионно-звуковых колебаний 21
 - фазовая 12, 15, 18, 23, 24, 203

- Солитон 260, 330
- Соотношение дисперсионное 11, 21, 139, 152, 170, 202, 204, 210, 222, 333
- Спектр ионно-звуковой турбулентности 252
 - нераспадный 249, 312
 - распадный 233
- Стабилизация дрейфовой неустойчивости в ловушках с минимумом $|H|$ 164
 - желобковой неустойчивости 127
 - магнитно-звуковыми волнами 207
 - неустойчивости слабонеоднородной изотермической плазмы в ловушке 169
 - универсальной дрейфовой неустойчивости 202
- Столкновительный член в форме Батнагара—Гросса—Крука 205
 - в форме Ландау 120

- Температуропроводности коэффициент 321
- Тензор диэлектрической проницаемости 102, 103, 153
 - проводимости 102
- Тепловая волна 264, 270, 321
- Теплопроводности коэффициент 40, 136, 298
- Теорема Лиувилля 9
 - Остроградского—Гаусса 6, 15
- Теория слабой турбулентности 37, 250—252, 284
 - квазилинейная 252
- Турбулентности уровень 237, 286
- Турбулентный нагрев 228

- Убегание электронов 255
- Ударная волна 264, 301, 315, 317
- Уравнение гармонического осциллятора 15
 - квазилинейное 37
 - кинетическое бесстолкновительное 8, 9

- непрерывности 14
- Пуассона 5, 15, 222, 239
- состояния идеального газа 323
- Эйлера 323
- Условие незамагниченности ионов 151
- незамагниченности электронов 307
- квазинейтральности 5, 152
- Крускала—Шафранова 186
- равновесия (плазмы в магнитном поле) 168
- Сайдема 187

- Фронт волны 40, 44, 274
- Функция Крампа 140
- распределения Максвелла 9, 19

- Частота ионная циклотронная 101
- обратного тормозного поглощения 326
- плазменная электронная (ленгмюровская) 15
- рассеяния электронов на ионах 7
- столкновений 5, 6, 255
- — заряженных частиц с нейтральными 8
- — электронов с ионами 7
- Число волн в единице объема 11
- частиц в дебаевской сфере 11, 53

- Штарковское уширение спектральных линий 252

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Г л а в а 1. Электронные и ионные пучки в плазме	5
§ 1.1. Квазинейтральность плазмы	5
§ 1.2. Столкновения в плазме	6
§ 1.3. Бесстолкновительное кинетическое уравнение	8
§ 1.4. Неустойчивости холодной плазмы	11
§ 1.5. Пучковая неустойчивость	14
§ 1.6. Токовая неустойчивость в плазме	17
§ 1.7. Влияние теплового разброса на устойчивость плазмы	18
§ 1.8. Неустойчивость ионного пучка в плазме	23
§ 1.9. Кинетические эффекты	25
§ 1.10. Границы гидродинамического и кинетического описаний	31
§ 1.11. Квазилинейное приближение	33
§ 1.12. Автомодельные решения	39
§ 1.13. Обобщение автомодельных решений	44
§ 1.14. Пределы применимости одномерной автомодельной теории	48
§ 1.15. Стационарная инжекция пучка электронов в плазму	50
§ 1.16. Взаимодействие моноэнергетического пучка электронов с плазмой	53
§ 1.17. Взаимодействие моноэнергетического пучка электронов с плотной плазмой	55
§ 1.18. Численное моделирование взаимодействия пучка с плотной плазмой	57
§ 1.19. Экспериментальные исследования релаксации пучков в плазме	65
§ 1.20. Трехмерная релаксация электронного пучка в плазме	69
§ 1.21. Релаксация ионного пучка малой плотности в плазме	84
§ 1.22. Двумерное численное моделирование взаимодействия пучка электронов с бесстолкновительной плазмой	95
§ 1.23. Двумерное численное моделирование взаимодействия ионного пучка с бесстолкновительной плазмой	98
§ 1.24. Низкочастотные колебания плазмы в магнитном поле	101
§ 1.25. Интегрирование по траекториям	106
§ 1.26. Квазилинейная релаксация ионного пучка в плазме, помещенной в магнитное поле	112
Г л а в а 2. Удержание плазмы магнитными полями	118
§ 2.1. Плазменная ловушка с магнитными пробками	118
§ 2.2. Желобковая неустойчивость	122
§ 2.3. Эффект стабилизации желобковой неустойчивости	127

§ 2.4.	Дрейфовая неустойчивость плазмы при $k_{\perp}\rho_i \ll 1$	130
§ 2.5.	Дрейфовая неустойчивость при $k_{\perp}\rho_i \gg 1$	138
§ 2.6.	Ионно-звуковая и циклотронная неустойчивости неоднородной плазмы	146
§ 2.7.	Вывод системы квазилинейных уравнений для неоднородной плазмы	151
§ 2.8.	Начальная стадия квазилинейной релаксации	155
§ 2.9.	Смещение пакета волн в область $k_{\perp}^2 \rho_{\perp}^2 > 1$	156
§ 2.10.	Распространение шумов в пространстве волновых чисел	160
§ 2.11.	Равновесие плазмы в магнитном поле	163
§ 2.12.	Стабилизация дрейфовой неустойчивости в ловушках с минимумом $ N $ при $T_e \gg T_i$	164
§ 2.13.	О стабилизации неустойчивости слабонеоднородной изотермической плазмы в ловушке	169
§ 2.14.	Квазилинейная релаксация неустойчивой функции распределения частиц в поле с минимумом $ N $	174
§ 2.15.	Устойчивость плазменного шнура	182
Глава 3.	Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой	188
§ 3.1.	Основные понятия и качественные оценки	188
§ 3.2.	Интегрирование по траекториям в в.ч.-поле	196
§ 3.3.	Универсальная дрейфовая неустойчивость	201
§ 3.4.	Дрейфово-температурная неустойчивость	202
§ 3.5.	Дрейфово-диссипативная неустойчивость	205
§ 3.6.	Обсуждение результатов по стабилизации магнитно-звуковыми волнами	208
§ 3.7.	Параметрические или распадные неустойчивости	209
§ 3.8.	Распадная неустойчивость магнитно-звуковых волн	215
§ 3.9.	Методы теории слабой турбулентности и распадная неустойчивость	221
Глава 4.	Турбулентный нагрев плазмы	228
§ 4.1.	Взаимодействие волн	228
§ 4.2.	Нелинейное взаимодействие волна — частица	237
§ 4.3.	Аномальное сопротивление	250
§ 4.4.	Нелинейное движение плазмы	258
§ 4.5.	Бесстолкновительные тепловые волны	264
§ 4.6.	Пучковый нагрев электронов в пробкотроне	277
§ 4.7.	Нагрев электронов циклотронным резонансом	282
Глава 5.	Лазерный и пучковый нагревы плазмы твердой мишени	293
§ 5.1.	Мощный пучок релятивистских электронов в плазме	293
§ 5.2.	Коллективное торможение мощного пучка релятивистских электронов в плазме	305
§ 5.3.	Сжатие вещества излучением лазера	314
§ 5.4.	Эффективность поглощения мощности в мишени	324
§ 5.5.	Механизм передачи энергии ленгмюровских колебаний электронам плазмы	327
§ 5.6.	Эффективность лазерного нагрева	331
	Список литературы	335
	Алфавитно-предметный указатель	343

ИБ № 209

АНДРЕЙ АКИМОВИЧ ИВАНОВ
Физика сильнонеравновесной плазмы

Редактор *Е. В. Сатарова*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Переплет художника *В. М. Прокофьева*
Технический редактор *О. Н. Моцева*
Корректоры *Н. И. Курьянова, Л. С. Тимохова*

Сдано в набор 5. XI. 1976 г. Подписано к печати 17. V. 1977 г. Т-07359. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 22,76. Тираж 2200 экз. Цена 3 р. 70 к. Зак. изд. 74351. Зак. тип. 846.

Атомиздат, 103031. Москва, К-31, ул. Жданова, 5.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.